THÈSE DE DOCTORAT

Schémas d'interpolation et ondelettes

Daniel Lemire

Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal
Université de Montréal

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.) en mathématiques de l'ingénieur
Mars 1998

Édition corrigée et recomposée, 2026. Le texte est celui de 1998, reconstitué à partir de l'exemplaire numérisé (Thèses Canada, NQ37377), avec les coquilles corrigées et les figures recalculées.

Cette thèse est dédiée à ma mère et à mon père.

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de recherche, Gilles Deslauriers, qui m'était toujours disponible et qui a investi une énergie considérable dans nos travaux. Il faut aussi dire qu'il a payé une partie du café.

Mon codirecteur de recherche, Serge Dubuc, a su m'inspirer et relire mes textes avec patience. Je lui dois aussi ce mot de sagesse : *on peut faire de grandes choses en mathématiques, à condition d'en sortir.*

Je remercie aussi les autres membres du jury de la thèse qui ont fait de judicieux commentaires. Finalement, j'aimerais remercier tous ceux, parents et amis, qui m'ont aidé à leur façon.

Résumé

Au début des années 80, la convergence de travaux en génie (traitement des signaux), en mathématiques (analyse harmonique) et en physique (mécanique quantique) donna naissance à la théorie des ondelettes. Durant cette même période, Gilles Deslauriers et Serge Dubuc (avec d'autres) mirent sur pied l'interpolation itérative. Plus tard, au début des années 90, lorsque les ondelettes atteignirent leur maturité, le lien entre les travaux sur l'interpolation itérative et les ondelettes devint incontournable. Maintenant, de nombreux chercheurs au Québec, en Alberta, aux États-Unis, en France, en Israël, en Scandinavie et à Singapore travaillent sur l'interpolation itérative pour ses applications en informatique (graphisme) et en génie (modélisation). Pourtant, malgré tout, peu de chercheurs ont construit des ondelettes à partir de schémas d'interpolation itérative. C'est ce que l'on a voulu faire.

D'une part, on a observé et démontré que des ondelettes bien connues, les ondelettes biorthogonales de Cohen-Daubechies-Feauveau sont en fait les dérivées d'une famille de fonctions (dites fondamentales) obtenue par l'interpolation itérative. Cette même famille de fonctions fondamentales fut *adaptée* à l'intervalle par Mongeau au début des années 90. Utilisant ces faits, on a *adapté* ces ondelettes à l'intervalle. On peut alors traiter toutes les régions bornées sur la droite.

L'interpolation itérative se généralise très bien dans un contexte multidimensionnel. Il était donc naturel de vouloir en faire des ondelettes multidimensionnelles et pour pouvoir travailler sur des applications, il fallait, par exemple, travailler sur des régions rectangulaires du plan. C'est ce que l'on a fait dans la dernière partie de cette thèse. À titre d'illustration, on a appliqué ces nouvelles ondelettes au traitement de quelques images.

Abstract

In the early 80's, the convergence of research in engineering (signal processing), mathematics (harmonic analysis), and physics (quantum mechanics) gave birth to wavelet theory. At the same time, Gilles Deslauriers and Serge Dubuc (and others) came up with iterative interpolation. It is only later, in the early 90's, when wavelet theory became a mature subject, that the link between iterative interpolation and wavelets became obvious. Now, many researchers in Québec, Alberta, France, U.S.A., Israel, Scandinavia and Singapore are working on iterative interpolation for its applications in Computer Science (graphics) and in engineering (modelling). However, few researchers have worked on building wavelets from iterative interpolation schemes. This is what we wanted to do.

On the one hand, we have discovered and shown that some well-known wavelets, the Cohen-Daubechies-Feauveau biorthogonal wavelets, are in fact, the derivatives of a certain family of functions (called fundamental) obtained by the iterative interpolation scheme. This same family of functions was *adapted* to the interval by Mongeau in the early 90's. Using these facts, we *adapted* these wavelets to the interval. We can then handle bounded regions of the real line.

Iterative interpolation can be easily cast into a multidimensional context. It was therefore natural to try to build multidimensional wavelets from some iterative interpolation schemes and, in order to apply them, it was necessary to be able to work, for example, on rectangular regions in the plane. We have done this in the last part of this thesis. We have included an example of an image analysis by means of these new wavelets.

Table des matières

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Liste des tableaux viii

Liste des figures ix

Liste des notations x

Introduction 1

1 Théorie des ondelettes discrètes et de l'interpolation itérative 3
- 1.1 L'interpolation itérative . . . 3
  - 1.1.1 L'interpolation itérative de Lagrange . . . 3
  - 1.1.2 L'interpolation itérative en général . . . 4
- 1.2 Les multirésolutions b-adiques . . . 5
- 1.3 La fonction de corrélation . . . 7

2 Dérivées de la fonction fondamentale de Deslauriers–Dubuc et les ondelettes b-adiques de Cohen–Daubechies–Feauveau 10
- 2.1 L'interpolation dyadique des moyennes de Donoho . . . 10
- 2.2 Ondelettes de Cohen–Daubechies–Feauveau b-adiques . . . 11
  - 2.2.1 Cas dyadique . . . 12
- 2.3 Conclusion . . . 17

3 Une famille d'ondelettes biorthogonales sur l'intervalle obtenue par un schéma d'interpolation itérative dyadique 20
- 3.1 Interpolation itérative sur l'intervalle . . . 20
  - 3.1.1 Interpolation mixte généralisée . . . 20
  - 3.1.2 Régularité . . . 22
- 3.2 Analyse multirésolution sur l'intervalle . . . 24
  - 3.2.1 B-Splines . . . 24
  - 3.2.2 Fonctions d'échelle duales . . . 25

3.2.3 Ondelettes duales 28
3.2.4 Ondelettes primaires 29
3.2.5 Remarque 32

4 Ondelettes non séparables dans les régions rectangulaires du plan avec filtres interpolants 34
4.1 Introduction 34
4.2 Les filtres rectangulaires non séparables 35
4.2.1 Schéma de base 35
4.2.2 Traitement des bords 37
4.2.3 Ondelettes et relèvement 41
4.3 Traitement de l'image 55
4.4 Conclusion 59

Conclusion 60

Bibliographie 61

Liste des tableaux

2.1 Quelques filtres triadiques ($b = 3$) ($z = e^{-i\xi}$) 18
2.2 Quelques filtres d'ondelettes primaires triadiques ($b = 3$) 18
2.3 Quelques filtres d'ondelettes duales triadiques ($b = 3$) 18

Liste des figures

2.1 $F_9(x)$ . . . 14
2.2 $\frac{d}{dx}F_9(x) = -_{1,9}\widetilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ . . . 15
2.3 $\frac{d^2}{dx^2}F_9(x) = -2\,_{2,8}\widetilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ . . . 15
2.4 $\frac{d^3}{dx^3}F_9(x) = 4\,_{3,7}\widetilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ . . . 16
2.5 Polynômes caractéristiques des fonctions d'échelles pour $N = \widetilde{N} = 2$ (le polynôme dual est en pointillé et l'abscisse est en ξ) . . . 19

3.1 Ondelette duale $_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,0}$ pour j quelconque . . . 29
3.2 Ondelette duale $_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,1}$ pour j quelconque . . . 30
3.3 Ondelette duale $_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,2}$ pour j quelconque . . . 30
3.4 Ondelette duale $_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,3}$ pour j quelconque (correspond à l'ondelette de Cohen–Daubechies–Feauveau) . . . 31

4.1 Contours du polynôme caractéristique de la fonction d'échelle primaire (ϕ) . . . 47
4.2 Contours du polynôme caractéristique de la fonction d'échelle duale ($\widetilde{\phi}$) . . . 48
4.3 Illustration d'une décomposition par ondelettes . . . 57
4.4 Image à traiter . . . 58
4.5 Image compressée . . . 58

Liste des notations

On note $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Par convention, on dit qu'un polynôme en x du N^{e} degré est un polynôme de la forme $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ où a_N peut être nul.

On définit une *B-spline* du N^{e} degré comme le résultat de N convolutions de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$, $\chi_{[0,1]}$, avec elle-même. Rappelons que

$$\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x \in A \\ \\ 0 \text{ autrement} \end{array} \right\}$$

On définit la norme d'un opérateur (ou d'une matrice) A par

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \,:\, \|x\| = 1\}.$$

On voit que $\|Au\| \leq \|A\| \, \|u\|$.

Soit f une fonction mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue (notée μ) sur X ; on définit la p-norme $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ pour $0 < p < \infty$. Si $p = 2$, on a un espace de Hilbert avec produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} \, d\mu$.

On utilise la normalisation suivante de la transformée de Fourier :

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) \, dx.$$

Cette normalisation est unitaire : $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$. La transformée de Fourier inverse est donnée par la formule

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(\xi) \, d\xi.$$

Dans $L^2(\mathbf{R})$, on dit que $\widetilde{\phi}$ et ϕ sont des fonctions *biorthonormales* (ou *biorthogonales*) si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi}(x) \, \overline{\phi(x-k)} \, dx = \delta_{0,k} \; \forall k \in \mathbf{Z}.$$

Soit deux suites de fonctions $\{f_k\}_k$ et $\{g_k\}_k$; on dira que les suites sont *biorthonormales* si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) \, \overline{g_l(x)} \, dx = \delta_{k,l} \; \forall k, l \in \mathbf{Z}.$$

Dans ce contexte, on dit que la fonction f est la fonction *primaire* et que $\tilde{f}$ est la fonction *duale*. Soit ϕ et $\tilde{\psi}$ deux fonctions (de $L^2(\mathbf{R})$) satisfaisant

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, \tilde{\psi}(x+k) \, dx = 0 \; \forall k \in \mathbf{Z},$$

alors on dit que ϕ et $\tilde{\psi}$ sont *orthogonales* et on note $\phi \perp \tilde{\psi}$.

Soit V un sous-espace fermé de L^2 ; on dit que les $\phi_k \in V$ forment une *base de Riesz* de V si

$$A\|f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

pour tous les $f \in V$ avec $\infty > B \geq A > 0$.

Introduction

L'objectif de cette recherche était d'utiliser l'interpolation itérative (de Lagrange) pour construire des ondelettes bien adaptées à l'intervalle. En effet, en pratique, que ce soit pour résoudre des équations différentielles ou pour traiter des images, il y a toujours des bords. En général, les ondelettes échouent près de ces bords : perte des moments nuls et de l'orthogonalité. Les chercheurs, en se basant sur un théorème d'Yves Meyer [17], ont rapidement compris qu'avec un schéma d'orthonormalisation de Gram–Schmidt, on pouvait orthonormaliser (ou *biorthonormaliser*) la restriction de ces ondelettes à l'intervalle. En pratique, pour ce faire, il faut calculer numériquement des tableaux de coefficients (coefficients de Gram–Schmidt). Il y a deux désavantages évidents à cette approche : l'utilisation de coefficients ne pouvant être calculés que numériquement manque d'élégance mathématique et pour le programmeur, c'est un embarras.

D'un autre côté, il existait un schéma d'interpolation de Lagrange sur l'intervalle (appelée interpolation mixte) dont les coefficients sont des nombres rationnels. Puisqu'on avait montré que les dérivées de la fonction fondamentale de Deslauriers–Dubuc donnaient les ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau [9], il était tentant de croire que les dérivées du résultat de l'interpolation mixte donneraient des ondelettes adaptées à l'intervalle. En fait, il a fallu généraliser l'interpolation mixte et *redémontrer* certaines de ses propriétés, mais dans l'ensemble, l'opération fut un succès.

Malheureusement, on ne peut généraliser ces idées au plan autrement que par le produit cartésien. On a alors voulu savoir s'il était possible, de façon pratique, de construire des ondelettes avec les schémas d'interpolation multidimensionnels [7]. On a voulu maintenir une approche simple et limpide. Il existait, sur la droite réelle, un schéma dit *de relèvement* [23]. Il avait l'élégance recherchée et la puissance nécessaire ; on s'en est donc inspiré. Rapidement, on a compris que l'on pouvait transformer *par relèvement* tous les schémas d'interpolation itérative contenus dans [7] et [20] en ondelettes. Cependant, on voulait aussi pouvoir traiter les bords (comme on l'avait fait sur la droite) et avoir des schémas non séparables (ne résultant pas du produit cartésien). Il se trouve que les schémas rectangulaires présentés dans [20] constituaient alors le seul choix vraiment approprié. On a poussé ce travail suffisamment loin pour en arriver à des applications intéressantes comme on l'illustre brièvement avec du traitement de l'image. Les ondelettes non séparables étant plutôt rares, on considère que ce dernier chapitre est intéressant et prometteur.

Cette thèse comporte trois parties divisées en quatre chapitres. Au premier chapitre, on rappelle quelques résultats connus de la théorie des ondelettes et de l'interpolation itérative. Au second chapitre, on simplifie la dérivation des ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau en passant par l'interpolation itérative de Lagrange. Ce faisant, on définit les ondelettes de Cohen–Daubechies–Feauveau b-adiques. Au troisième chapitre, on adapte les ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau à l'intervalle. En effet, bien souvent, en pratique, les signaux ou les fonctions sont définis non pas sur tout l'axe réel, mais sur un intervalle compact. Il est donc nécessaire

d'introduire de nouveaux filtres (filtres de bords). Par un nouveau schéma d'interpolation itérative sur l'intervalle, on arrive rapidement et simplement à ces filtres de bords. Au quatrième chapitre, on construit, à titre d'exemple, certains schémas d'interpolation itérative dans le plan pour définir de nouvelles ondelettes non séparables. On conclut ce dernier chapitre avec une application au traitement de l'image.

1

Théorie des ondelettes discrètes et de l'interpolation itérative

1.1 L'interpolation itérative

Avant d'en arriver aux ondelettes, il est utile de présenter rapidement une application particulière des schémas itératifs : l'interpolation itérative. Soit V un espace vectoriel (par exemple $V = \mathbf{R}^n$).

Définition 1 *On dira que $\{x_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ est une subdivision régulière de V si les ensembles croissants de points $V_j = \{x_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \subset V$ sont tels que $\overline{\cup_j V_j} = V$, $V_j \subset V_{j+1}$ et qu'il existe une transformation linéaire T telle que $T(V_j) = V_{j+1}$.*

1.1.1 L'interpolation itérative de Lagrange

On rappelle brièvement les schémas d'interpolation b-adique présentés dans [6] ($b > 1$ est un entier). On appelle *nombres b-adiques* les nombres réels de la forme k/b^j où k et j sont entiers. On dira que $x_{j,k} = b^{-j}k$ forme la subdivision b-adique. Si j est le plus petit entier tel que $x = k/b^j$ pour un entier k, on dira que x est un *nombre b-adique de profondeur j*. Étant donné une fonction y définie sur les entiers, on veut prolonger cette fonction aux nombres b-adiques. Pour des entiers r et n, satisfaisant $0 < r < b$, $y(n + r/b)$ est définie par $p(n + r/b)$ où p est le polynôme de Lagrange du $(2N-1)^{\text{e}}$ maximal tel que $p(k) = y(k)\ \forall k \in [n - N + 1, n + N] \cap \mathbf{Z} = \mathbf{I}_{N,n}$:

$$p(x) = \sum_{k\in I_{N,n}} y(k)\, L_k(x)$$

où

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j\in I_{N,n}\setminus\{k\}}(x-j)}{\prod_{j\in I_{N,n}\setminus\{k\}}(k-j)}$$

On peut itérer cette construction à tous les nombres b-adiques.

Si on fixe b et N, commençant avec $y(k) = \delta_{k,0}$, on obtient à la limite, la *fonction fondamentale* $F_{b,2N-1}$. On appelera cette fonction fondamentale, la *fonction fondamentale de Deslauriers–Dubuc*. On l'appelle parfois la *fonction de Deslauriers–Dubuc* ou *fonction de Dubuc*.

On écrira parfois $F_{b,2N-1} = F_{2N-1}$ pour simplifier la notation, en particulier lorsque $b = 2$. On peut toujours prolonger $F_{b,2N-1}$ aux nombres réels parce qu'elle est uniformément continue sur les nombres b-adiques qui forment un ensemble dense de $\mathbf{R}$. De plus, étant donné un entier positif k, il existe un entier N_0 suffisamment grand tel que $N \geq N_0 \Rightarrow F_{b,2N-1} \in C^k$. En d'autres mots, on accroît la régularité de $F_{b,2N-1}$ en augmentant N. On voit que ce schéma d'interpolation permet la reconstruction exacte des polynômes du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré.

La fonction fondamentale satisfait

$$F_{b,2k+1}(t) = \sum_n F_{b,2k+1}(n/b)\, F_{b,2k+1}(b\,t - n).$$

Appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\widehat{F_{b,2k+1}}(\xi) = p_{b,2k+1}(\xi)\, \widehat{F_{b,2k+1}}(\xi/b)$$

où

$$p_{b,2k+1}(\xi) = \sum_n F_{b,2k+1}(n/b)\, e^{-in\xi}.$$

Ce dernier polynôme trigonométrique est un exemple de ce que l'on appelle *un polynôme caractéristique.*

Définition 2 *On dit que $p(\xi)$ est le* polynôme caractéristique *d'une fonction f si $f(b\xi) = p(b\xi)\, f(\xi)$. Dans le cas où un schéma génère des fonctions ayant toutes le même polynôme caractéristique, on dit qu'il s'agit du polynôme caractéristique du schéma.*

Remarque 1 En pratique, on peut souvent remplacer l'interpolation itérative de Lagrange classique par d'autres schémas différentiables qui permettent la reconstruction exacte des polynômes d'un certain degré. Par exemple, on peut utiliser de nombreux schémas M-band [13].

1.1.2 L'interpolation itérative en général

Définition 3 *Soit $\{x_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ une subdivision régulière du plan. On dira qu'un ensemble de fonctions à valeurs réelles définies dans le plan $\{F_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ est un ensemble de fonctions fondamentales associées à la subdivision $\{x_{j,k}\}_{j,k}$ si pour un j donné on a $F_{j,k}(x_{j,l}) = \delta_{k,l}\ \forall k, l \in \mathbf{Z}$.*

Notons qu'un tel ensemble suffit à définir un *schéma d'interpolation* sur la subdivision en question. En effet, pour j fixe, si à chaque point $x_{j,k}$ on associe une valeur $y_{j,k}$, $y_j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} y_{j,k} F_{j,k}$ est une fonction interpolante. La réciproque est aussi vraie : un schéma d'interpolation linéaire sur une subdivision admet des fonctions fondamentales.

Définition 4 *On dira qu'un schéma d'interpolation est un schéma d'interpolation itérative si les fonctions fondamentales du schéma satisfont la relation*

$$F_{j,k}(x) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} h_{j,k,l} F_{j+1,l}(x) \quad \forall j, k \in \mathbf{Z}$$

où les coefficients $h_{j,k,l}$ sont réels. De plus, le schéma d'interpolation itérative est stationnaire si $h_{j,k,l} = h_{k,l}$ $\forall k, l \in \mathbf{Z}$. Si les coefficients $h_{j,k,l}$ ne dépendent que de la différence $k - l$, le schéma est stationnaire et homogène.
Pour un schéma stationnaire et homogène, on peut ramener toutes les fonctions fondamentales à une seule fonction et on dit que cette fonction définit à elle seule le schéma d'interpolation.

Exemple 1 Soit l'interpolation itérative dyadique de Lagrange du troisième degré. Dans ce cas, on a $x_{j,k} = 2^{-j}k$ et les fonctions fondamentales $F_{j,k}$ sont toutes construites à partir d'une seule fonction (la fonction fondamentale) d'après la relation $F_{j,k}(x) = F(2^j x - k)$ et on a comme filtre

$$F(x) = -\frac{F(2x-3)}{16} + \frac{9F(2x-1)}{16} + F(2x) + \frac{9F(2x+1)}{16} - \frac{F(2x+3)}{16}. \tag{1.1}$$

Le filtre, noté $(-1/16, 0, 9/16, 1, 9/16, 0, -1/16)$ est appelé filtre de Lagrange du troisième degré. C'est un exemple de schéma stationnaire et homogène.

1.2 Les multirésolutions b-adiques

Une multirésolution b-adique [5] est une famille de sous-espaces fermés $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ décroissants,

$$\ldots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \ldots,$$

tels que $\overline{\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$ et $\cap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$ avec $f \in V_j \Leftrightarrow f(b^j \cdot) \in V_0$.

Soit maintenant deux multirésolutions b-adiques $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ et $\left\{\widetilde{V}_j\right\}_{j \in \mathbf{Z}}$ et deux *fonctions d'échelle* biorthonormales ϕ et $\widetilde{\phi}$ avec $2(b-1)$ *fonctions* $\{\psi_1, \ldots, \psi_{b-1}\}$ et $\left\{\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_{b-1}\right\}$ où ψ_k est biorthonormale à $\widetilde{\psi}_k$ et orthogonale à $\widetilde{\psi}_l$ pour $l \neq k$ (k et l étant des entiers allant de 1 à $b-1$). On appelle ϕ (resp. $\widetilde{\phi}$) une *fonction d'échelle* parce que $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ (respectivement $\left\{\widetilde{\phi}(\cdot - n)\right\}_{n \in \mathbf{Z}}$) doit former une base de Riesz pour V_0 (resp. $\widetilde{V}_0$). Les ondelettes sont biorthonormales $\left\langle \psi_k, \widetilde{\psi}_l \right\rangle = \delta_{k,l}$ et elles doivent être orthogonales aux fonctions d'échelle $\left\langle \psi_k, \widetilde{\phi} \right\rangle = \left\langle \phi, \widetilde{\psi}_k \right\rangle = 0$ $\forall k = 1, \ldots, b-1$. Toutes ces fonctions

doivent admettre des filtres, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= m(\xi/b)\,\hat{\phi}(\xi/b),\\ \hat{\widetilde{\phi}}(\xi) &= \tilde{m}(\xi/b)\,\hat{\widetilde{\phi}}(\xi/b),\\ \widehat{\psi_k}(\xi) &= g_k(\xi/b)\,\hat{\phi}(\xi/b),\\ \widehat{\widetilde{\psi}_k}(\xi) &= \tilde{g}_k(\xi/b)\,\hat{\widetilde{\phi}}(\xi/b)\end{aligned}$$

$\forall k = 1, \dots, b-1$. Les ensembles de fonctions $\{\psi_k(\cdot - n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ et $\left\{\widetilde{\psi}_k(\cdot - n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ sont des bases de Riesz pour les espaces W_0^k et $\widetilde{W}_0^k$ supplémentaires de V_0 dans V_{-1} :

$$V_{-1} = V_0 \oplus W_0^1 \oplus \cdots \oplus W_0^{b-1}$$

et de $\widetilde{V}_0$ dans $\widetilde{V}_{-1}$:

$$\widetilde{V}_{-1} = \widetilde{V}_0 \oplus \widetilde{W}_0^1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_0^{b-1}.$$

On appelle les fonctions $\{\psi_k(\cdot - n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ et $\left\{\widetilde{\psi}_k(\cdot - n)\right\}_{n\in\mathbf{Z}}$ des *ondelettes* (respectivement *primaires* et *duales*).

Définition 5 *On dit qu'une ondelette ψ a N moments nuls si*

$$\int x^n \psi(x)\,dx = 0$$

pour $n = 0, \dots, N-1$. On peut vérifier que toutes les ondelettes ont au moins un moment nul [5].

Définition 6 *L'ensemble des ondelettes primaires et duales forme une multirésolution biorthogonale.*

Exemple 2 On peut vérifier que l'on peut utiliser les B-splines du N^{e} degré comme fonctions d'échelle où les V_j correspondants sont les espaces de splines avec pour nœuds les nombres b-adiques de profondeur j. De plus, on montre que l'espace $\widetilde{V}_0$ d'une multirésolution duale à la multirésolution des splines est

$$\widetilde{V}_0 = \overline{span\left\{F_b^{(N)}(\cdot - n) \,:\, n \in \mathbf{Z}\right\}}$$

où $F_b^{(N)}$ est la N^{e} dérivée de la fonction fondamentale b-adique. On peut se convaincre de ce résultat par l'intégration par parties et en observant que la N^{e} dérivée d'une B-spline de N^{e} degré est une combinaison de fonctions de Dirac sur les entiers. Dans le cas dyadique, cela mène aux ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau.

1.3 La fonction de corrélation

Notons $F_{\widetilde{\phi},\phi}$ la fonction de corrélation du couple $(\widetilde{\phi}, \phi)$.

$$F_{\widetilde{\phi},\phi}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi}(x)\, \overline{\phi(x-y)}\, dx.$$

On peut vérifier que pour des fonctions biorthonormales $\widetilde{\phi}$ et ϕ, $F_{\widetilde{\phi},\phi}(k) = \delta_{k,0}$ pour tout entier k. La fonction de corrélation de deux fonctions biorthonormales est donc la fonction fondamentale d'un schéma d'interpolation.

Lemme 1 *Si $\widetilde{\phi}$, $\phi \in L^2$, $\widehat{F}_{\widetilde{\phi},\phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \overline{\hat{\phi}(\xi)}\, \hat{\widetilde{\phi}}(\xi)$.*

Dans la suite, on suppose que $\widetilde{\phi}$ et ϕ sont des fonctions biorthonormales de $L^2(\mathbf{R})$ et que leurs transformées de Fourier satisfont les identités en ξ suivantes :

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/b)\, \hat{\phi}(\xi/b), \tag{1.2}$$

$$\hat{\widetilde{\phi}}(\xi) = \widetilde{m}_0(\xi/b)\, \hat{\widetilde{\phi}}(\xi/b). \tag{1.3}$$

Lemme 2 *Si $\widetilde{\phi}$ et ϕ satisfont les identités 1.2 et 1.3, $F_{\widetilde{\phi},\phi}$ satisfait une identité similaire,*

$$\widehat{F}_{\widetilde{\phi},\phi}(\xi) = p(\xi/b)\, \widehat{F}_{\widetilde{\phi},\phi}(\xi/b)$$

où

$$p(\xi) = \overline{m_0}(\xi)\, \widetilde{m}_0(\xi) \tag{1.4}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_{\widetilde{\phi},\phi}(\xi) &= \sqrt{2\pi}\, \overline{\hat{\phi}(\xi)}\, \hat{\widetilde{\phi}}(\xi) \\
&= \overline{m_0}(\xi/b)\, \widetilde{m}_0(\xi/b)\, \sqrt{2\pi}\, \overline{\hat{\phi}}(\xi/b)\, \hat{\widetilde{\phi}}(\xi/b) \\
&= \overline{m_0}(\xi/b)\, \widetilde{m}_0(\xi/b)\, \widehat{F}_{\widetilde{\phi},\phi}(\xi/b)
\end{aligned}$$

■

Exemple 3 Soit une fonction d'échelle de Daubechies $\phi = \widetilde{\phi} = {}_N\phi^{Dau}$. (Il existe une version b-adique des ondelettes de Daubechies mais on ne considère que l'originale où $b = 2$ [12].) Le

filtre de la fonction d'échelle ${}_N\phi^{Dau}$ est :

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi) \qquad \textit{(Strang-Fix)}$$

où $|\mathcal{L}(\xi)|^2 = L(\xi)$ satisfait la relation

$$L(\xi) = P_N\left(\sin^2 \xi/2\right)$$

où

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k,$$

puisque l'expression 1.4 donne

$$p_{2N-1}(\xi) = \cos^{2N} \xi/2 \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \sin^{2k} \xi/2. \tag{1.5}$$

On sait que la fonction de corrélation correspondante $F_{{}_N\phi,{}_N\phi}$ est une fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange ([5, section 6], [21], [22]) ; en fait $F_{{}_N\phi,{}_N\phi} = F_{2N-1}$.

Exemple 4 Soit des fonctions d'échelle biorthonormales de Cohen–Daubechies–Feauveau ϕ et $\widetilde{\phi}$ (i.e. $\phi = {}_N\phi$ et $\widetilde{\phi} = {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}$ [2, section 6]). On définit l'entier $n = \left(N + \widetilde{N}\right)/2$ ($N + \widetilde{N}$ est toujours pair par définition). Les filtres sont

$$ {}_N m_0(\xi) = e^{-i\kappa\xi/2} \cos^N \xi/2, \tag{1.6}$$

$$ {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{m}_0(\xi) = e^{-i\kappa\xi/2} \cos^{\widetilde{N}} \xi/2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} \sin^{2k} \xi/2 \tag{1.7}$$

où $\kappa = 1$ si N est impair et $\kappa = 0$ si N est pair. En multipliant ces équations, on obtient

$$ \overline{{}_N m_0}(\xi)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{m}_0(\xi) = (\cos \xi/2)^{N+\widetilde{N}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} \sin^{2k} \xi/2 = p_{2n-1}(\xi). $$

On voit que

$$ p_{2n-1}(\xi) = \overline{{}_N m_0}(\xi)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{m}_0(\xi). $$

Ainsi, on a

$$ F_{2n-1}(y) = \int {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(x)\, {}_N\phi(x-y)\, dx \tag{1.8}$$

(voir l'équation 1.5).

Exemple 5 Il est intéressant de mentionner que d'autres fonctions d'échelle que l'on ne traite pas ici partent de la même fonction de corrélation c'est-à-dire la fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange. Les ondelettes symétriques et complexes de Lina [16] en sont un exemple.

2

Dérivées de la fonction fondamentale de Deslauriers–Dubuc et les ondelettes b-adiques de Cohen–Daubechies–Feauveau

2.1 L'interpolation dyadique des moyennes de Donoho

Donoho [10] a construit une famille de multirésolutions duales à la fonction de Haar. L'idée de base de la construction de Donoho est l'*interpolation des moyennes*. Soient $\{m_{0,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$, on cherche à trouver une fonction f satisfaisant

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = m_{0,k}$$

pour $k \in \mathbf{Z}$. Soit N un entier pair ; pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, on trouve l'unique polynôme du N^{e} degré $p(x)$ satisfaisant

$$\int_l^{l+1} p(x)\,dx = m_{0,l}$$

pour $l = k - N/2, \dots, k + N/2$. On définit ensuite

$$m_{1,2k} = \int_k^{k+1/2} p(x)\,dx$$
$$m_{1,2k+1} = \int_{k+1/2}^{k+1} p(x)\,dx.$$

En procédant de la sorte, on peut calculer $\{m_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ pour j aussi grand que l'on veut. Si $m_{0,k} = \delta_{k,0}$, on définit

$$\varphi_n(x) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^j m_{j,k}\, \chi_{[2^{-j}k,\, 2^{-j}(k+1)]}(x)$$

où la limite est prise au sens de $L^2(\mathbf{R})$. On vérifie que φ_n est une fonction d'échelle satisfaisant

$$\int_k^{k+1} \varphi_n(x)\,dx = \delta_{k,0}$$

telle qu'elle permet la reconstruction exacte des polynômes du n^{e} degré.

Les ondelettes duales présentées dans [10] sont les dérivées premières des fonctions fondamentales de l'interpolation itérative de Lagrange (F_n) (appelées aussi fonctions fondamentales de Deslauriers–Dubuc). En effet, il montre que

$$\frac{d}{dx}F_{n+1}(x) = \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x)$$

Il observe aussi [10, section 3.2.2] que φ_2, φ_4 et φ_6 ont les mêmes filtres que les fonctions d'échelle de Cohen–Daubechies–Feauveau [2, section 6] notées ${}_{1,3}\widetilde{\phi}$, ${}_{1,5}\widetilde{\phi}$ et ${}_{1,7}\widetilde{\phi}$. En fait, on sait qu'il existe un résultat plus général. Par exemple, après un changement d'échelle, on a :

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi} \sim \frac{d^N}{dx^N}F_{\widetilde{N}+N-1}$$

où ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$ est une ondelette de Cohen–Daubechies–Feauveau. On montre ce résultat (voir théorème 3).

2.2 Ondelettes de Cohen–Daubechies–Feauveau b-adiques

Soit ${}_N\phi$ la B-spline du N^{e} degré, on a

$$\frac{d^N}{dx^N}\,{}_N\phi(x) = \sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}(-1)^l\,\delta\big(x-l+[N/b]\big) \tag{2.1}$$

On suppose que $\widetilde{N}$ est choisi suffisamment grand pour que $F_{N+\widetilde{N}-1} \in C^N$. Dérivons l'équation 1.8 N fois[1] :

$$\begin{aligned}\frac{d^N}{dy^N}F_{N+\widetilde{N}-1}(y) &= \int {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(x)\,\frac{d^N}{dy^N}\,{}_N\phi(x-y)\,dx \\ &= \sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}(-1)^{N+l}\,{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}\big(y+l-[N/b]\big).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Donc, on peut prendre

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_k(z) = a\,F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}(bz-k) \tag{2.3}$$

où $k = 1, \dots, b-1$ et $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ est un coefficient de normalisation. En effet, par l'intégration par parties, on peut voir que

$$\int {}_N\phi(x)\,F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}(bx-k)\,dx = 0$$

puisque $F_{N+\widetilde{N}-1}(bn-k) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ et $k = 1, \dots, b-1$. Finalement, il est pratique de choisir

$$a = 1\Big/\Big\|F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}(b\,\cdot)\Big\|_2.$$

1. L'équation 1.8 demeure valide dans le cas b-adique.

On peut calculer les filtres correspondants : voir les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 où l'on a choisi $a = 1$ et $b = 3$ (voir aussi la figure 2.5).

En général, on peut choisir[2]

$$ {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}\big(x-k-\kappa-[N/2]\big) $$

puisque l'intégration par parties permet de vérifier que

$$ \int {}_{N}\phi(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(x-n)\, dx = \delta_{0,n} $$

(en utilisant l'équation 2.1). Si on écrit $D^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$ et ${}_{N}\psi^{0}(x) = \frac{(-1)^N}{a} D^{-N}\delta(x)$, on peut obtenir les ondelettes primaires par la formule générale

$$ {}_{N,\widetilde{N}}\psi_k(x) = {}_{N}\psi^{0}(bx-k) - \sum_{n} {}_{N}\phi(x-n) \int {}_{N}\psi^{0}(by-k)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(y-n)\, dy $$

où $k = 1, \dots, b-1$ puisque ${}_{N}\psi^{0}(bx-l)$ et ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_k$ sont biorthonormaux.

> **Remarque 2** On peut maintenant voir que ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}$ et par conséquent ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_k$ ont un support compact. Voir la preuve de la proposition 4.

2.2.1 Cas dyadique

La transformée de Fourier de l'équation 2.2 est

$$ \widehat{F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}}(\xi) = \left(\sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} (-1)^{N+l}\, e^{i\xi(l-[N/2])} \right) {}_{N,\widetilde{N}}\hat{\widetilde{\phi}}(\xi). \tag{2.4} $$

Notons $q_N(\xi)$ la fonction définie par

$$ \widehat{F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}}(\xi) = q_N(\xi)\, {}_{N,\widetilde{N}}\hat{\widetilde{\phi}}(\xi). \tag{2.5} $$

L'équation 2.4 donne une formule pour $q_N(\xi)$,

$$ \begin{aligned} q_N(\xi) &= \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} (-1)^{N+l}\, e^{-i\xi(-l+[N/2])} \\ &= z^{[N/2]} \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} (-1)^{N+l}\, z^{-l} \end{aligned} $$

2. Si on exige que les fonctions ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}$ soient *localisées* alors on vérifie que cette formulation est unique.

avec $z = e^{-i\xi}$. On peut calculer que

$$\begin{aligned} q_N(\xi) &= (-1)^N z^{[N/2]} \left(1 - z^{-1}\right)^N \\ &= (-1)^N z^{-\kappa/2} \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right)^N \\ &= (2i)^N e^{i\kappa\xi/2} \sin^N \xi/2 \end{aligned}$$

avec $\kappa = 1$ si N est impair et $\kappa = 0$ si N est pair.

Cohen, Daubechies et Feauveau ont choisi les filtres d'ondelettes suivants :

$$\begin{aligned} {}_{N,\widetilde{N}}m_1(\xi) &= \overline{{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{m}_0(\xi + \pi)}\, e^{-i\xi}. \\ {}_{N}\widetilde{m}_1(\xi) &= \overline{{}_{N}m_0(\xi + \pi)}\, e^{-i\xi}. \end{aligned}$$

On est spécialement intéressé par le filtre de l'ondelette duale,

$$\begin{aligned} {}_{N}\widetilde{m}_1(\xi) &= i^\kappa e^{i\kappa\xi/2} e^{-i\xi} \cos^N \left(\frac{\xi + \pi}{2}\right) \\ &= (-1)^N e^{-i\xi} i^\kappa e^{i\kappa\xi/2} \sin^N \xi/2 \\ &= (-1)^{N+[N/2]}\, 2^{-N} e^{-i\xi} q_N(\xi). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \widehat{{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}}(\xi) &= (-1)^{N+[N/2]}\, 2^{-N} e^{-i\xi/2} q_N(\xi/2)\, {}_{N,\widetilde{N}}\hat{\widetilde{\phi}}(\xi/2) \\ &= (-1)^{N+[N/2]}\, 2^{-N} e^{-i\xi/2} \widehat{F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}}(\xi/2). \end{aligned}$$

La transformée inverse donne une formule explicite.

Théorème 3 *Soit $\widetilde{N}$ suffisamment grand tel que $F_{N+\widetilde{N}-1} \in C^N$, si ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$ est une ondelette biorthogonale de Cohen–Daubechies–Feauveau et si $F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}$ est la N^{e} dérivée de la fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange du $\left(N + \widetilde{N} - 1\right)^{\text{e}}$ degré alors*

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}(x) = (-1)^{N+[N/2]}\, 2^{1-N} F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}(2x - 1).$$

Ce résultat aide à comprendre comment la régularité et la forme des ondelettes ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$ varient selon N et $\widetilde{N}$ (voir les figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4). Par exemple, on voit pourquoi lorsque l'on accroît $\widetilde{N}$ pour N fixe, la forme de ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$ demeure la même pour $\widetilde{N}$ grand (voir [5] p. 271).

Il reste à montrer comment on peut écrire ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}$ (la fonction d'échelle duale de Cohen–Daubechies–Feauveau) comme la N^{e} dérivée de la fonction fondamentale de Deslauriers–Dubuc. Cependant, puisque l'on prend N dérivées, il est entendu qu'une telle formule ne sera pas unique.

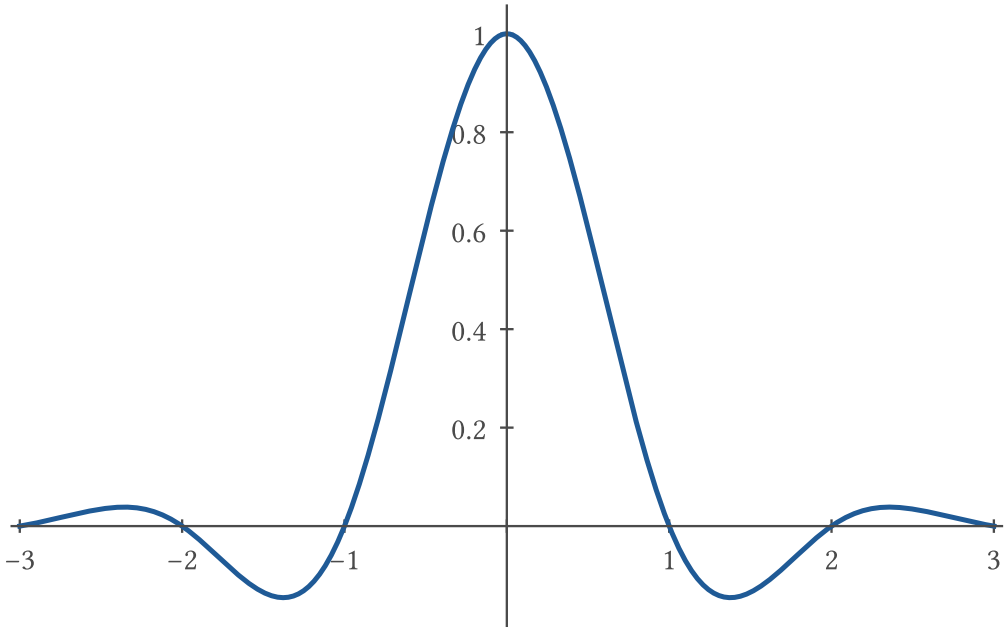


FIGURE 2.1 – $F_9(x)$

Proposition 4 *Soit $\widetilde{N}$ suffisamment grand tel que $F_{N+\widetilde{N}-1} \in C^N$; on a*

$$_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}\big(x-k-\kappa-[N/2]\big).$$

Preuve. Soit

$$f_{N,\widetilde{N}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}\big(x-k-\kappa-[N/2]\big).$$

Premièrement, il faut montrer que $f_{N,\widetilde{N}}(x) \in L^2(\mathbf{R})$. Puisqu'il s'agit d'une fonction continue, il suffit de montrer qu'elle admet un support compact. Pour ce faire, on observe que

$$g_N(k) = \binom{N-1+k}{N-1}$$

est un polynôme du $(N-1)^{\text{e}}$ degré sur $\mathbf{N}$ en k. En effet, si $N \geq 2$, on a

$$g_N(k) = \frac{(N-1+k)\times\cdots\times(k+1)}{(N-1)!}$$

L'interpolation itérative de Lagrange du $\big(N+\widetilde{N}-1\big)^{\text{e}}$ degré préserve les polynômes du degré correspondant et les fonctions fondamentales ont toujours un support compact. En conséquence $f_{N,\widetilde{N}}(x)$ doit avoir un support compact.

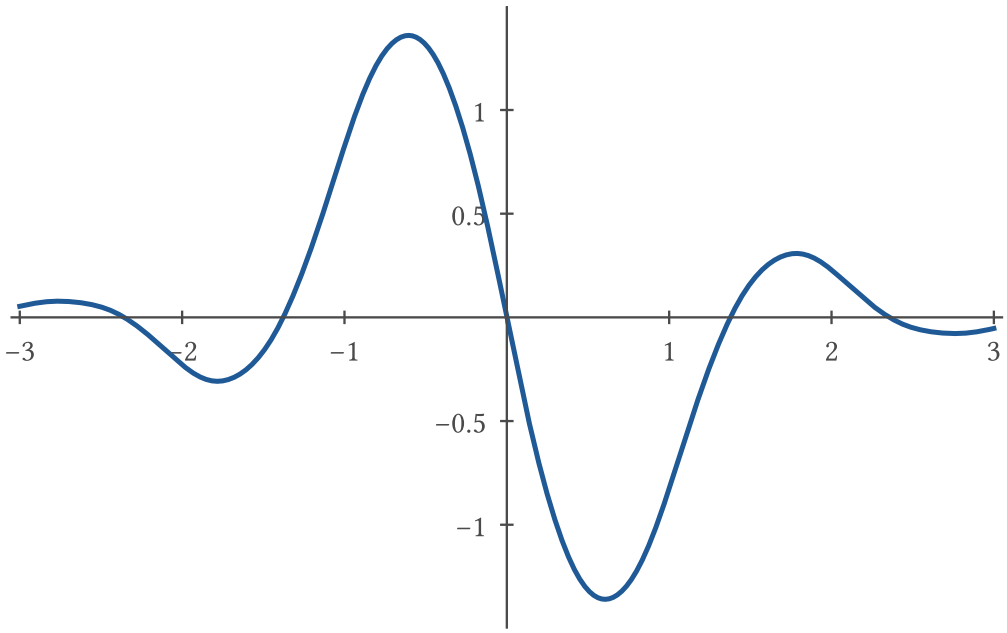


FIGURE 2.2 – $\frac{d}{dx}F_9(x) = -_{1,9}\widetilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

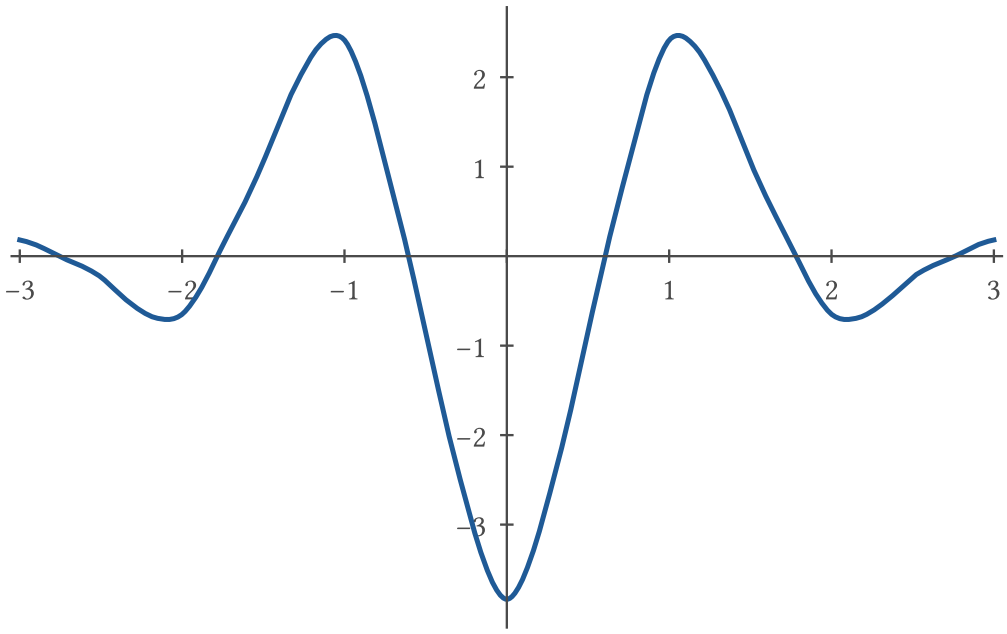


FIGURE 2.3 – $\frac{d^2}{dx^2}F_9(x) = -2\,{}_{2,8}\widetilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

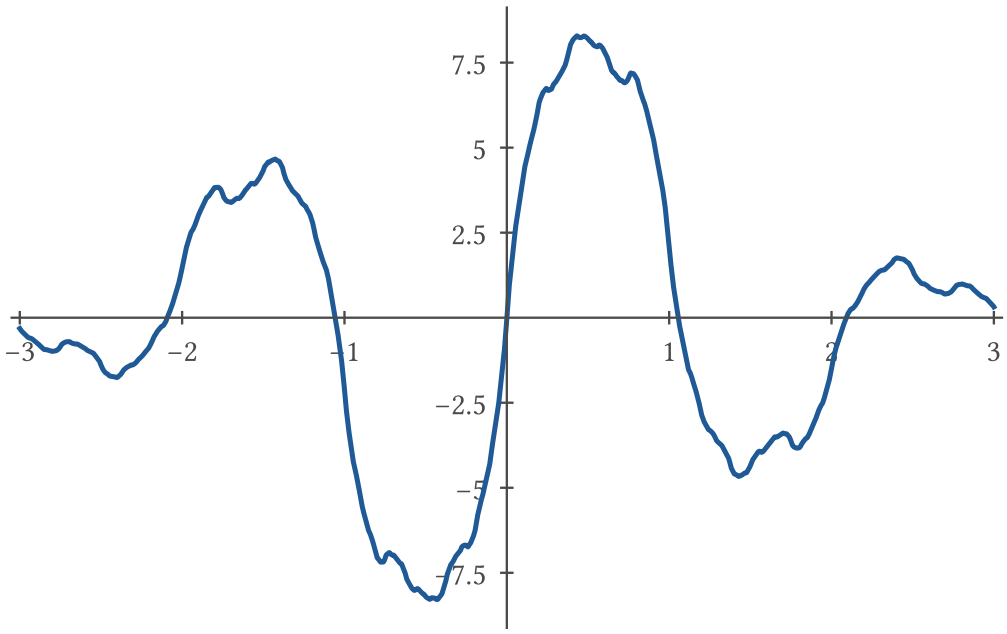


FIGURE 2.4 – $\frac{d^3}{dx^3}F_9(x) = 4\,{}_{3,7}\widetilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

On peut maintenant prendre la transformée de Fourier de $f_{N,\widetilde{N}}$

$$\widehat{f_{N,\widetilde{N}}}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} z^{k+\kappa+[N/2]}\, \widehat{F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}}(\xi)$$

où $z = e^{-i\xi}$. Si on substitue le deuxième membre de la formule 2.5 pour $\widehat{F^{(N)}_{N+\widetilde{N}-1}}(\xi)$, on a

$$\widehat{f_{N,\widetilde{N}}}(\xi) = \alpha(\xi)\,{}_{N,\widetilde{N}}\hat{\widetilde{\phi}}(\xi)$$

où

$$\alpha(\xi) = q_N(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} z^{k+\kappa+[N/2]}.$$

On a

$$\begin{aligned} q_N(\xi) &= (-1)^N z^{[N/2]} \left(1 - z^{-1}\right)^N \\ &= z^{-[N/2]-\kappa} (1-z)^N \end{aligned}$$

et $\sum_{k\geq 0} \binom{N-1+k}{N-1} z^k$ est la série de Taylor de $(1-z)^{-N}$. Donc, pour $z \neq 1$

$$(1-z)^N \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} z^k = 1.$$

En conséquence, $\alpha(\xi) = 1$ pour $\xi \neq 0$ ce qui est suffisant pour écrire que dans L^2,

$$\widehat{f_{N,\widetilde{N}}}(\xi) = {}_{N,\widetilde{N}}\hat{\widetilde{\phi}}(\xi)$$

Il ne reste plus qu'à prendre la transformée de Fourier inverse pour obtenir le résultat. ∎

2.3 Conclusion

Bien que ce qui précède repose sur des idées bien comprises (voir par exemple [15]), cette dérivation des ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau rend plus limpides certaines de leurs propriétés. En particulier, puisque la régularité de l'interpolation itérative de Lagrange est connue [6], la régularité des ondelettes correspondantes est automatiquement établie. On obtient aussi un algorithme différent pour calculer ces fonctions. On sait [6] que l'on peut calculer les dérivées des fonctions fondamentales exactement sur les nombres b-adiques d'une certaine profondeur en un nombre fini d'opérations par la formule

$$F^{(r)}\left(k/b^j\right)/b^{rj} = \sum_n F\left(n/b^j\right) F^{(r)}(k-n).$$

Notons que l'on peut calculer $F^{(r)}$ sur les entiers en utilisant les propriétés de l'interpolation itérative de Lagrange [6].

Il serait intéressant d'étudier d'autres schémas d'interpolation itérative C^k et de voir quels types d'ondelettes pourraient en résulter (par exemple : les filtres M-band mais aussi d'autres cas où la transformée de Fourier échoue à cause du manque de symétrie). Ces travaux sont liés au schéma de relèvement de Sweldens [24]. Dans le chapitre qui suit, on montre que ces idées mènent à la construction d'ondelettes sur l'intervalle sans l'utilisation d'un processus de Gram–Schmidt en faisant usage de certains schémas d'interpolation itérative sur l'intervalle (voir [19] et [10]). Ceci est possible puisque malgré les apparences, la transformée de Fourier n'est pas un élément essentiel de ce travail. En utilisant la remarque 1, il suffit de choisir un schéma d'interpolation itérative qui *vit* sur la subdivision choisie. Par exemple, ceci pourrait mener à des ondelettes sur des subdivisions irrégulières.

> **Remarque 3** Notons que dans le cas dyadique, on peut faire une partie de la suite en utilisant la formule de commutation de Lemarié [15, Proposition 2]. Il est aussi possible de généraliser directement les résultats de Lemarié.

Tableau 2.1 – Quelques filtres triadiques ($b = 3$) ($z = e^{-i\xi}$)

$\widetilde{N}$	N	*filtres primaires* $({}_{\widetilde{N}}\widetilde{m}_0)$	*filtres duals* $({}_{\widetilde{N},N}m_0)$
1	3	$\frac{1}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3}$	$-\frac{4}{81z^3} - \frac{1}{81z^2} + \frac{5}{81z} + \frac{26}{81} + \frac{29}{81}z$ $+ \frac{26}{81}z^2 + \frac{5}{81}z^3 - \frac{1}{81}z^4 - \frac{4}{81}z^5$
1	5	$\frac{1}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3}$	$\frac{7}{729z^8} + \frac{1}{729z^7} - \frac{8}{729z^6} - \frac{49}{729z^5} - \frac{13}{729z^4}$ $+ \frac{62}{729z^3} + \frac{77}{243z^2} + \frac{89}{243z} + \frac{77}{243} + \frac{62}{729}z$ $- \frac{13}{729}z^2 - \frac{49}{729}z^3 - \frac{8}{729}z^4 + \frac{1}{729}z^5 + \frac{7}{729}z^6$
2	2	$\frac{1}{9z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}z + \frac{1}{9}z^2$	$-\frac{4}{27z^3} + \frac{1}{9z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{17}{27} + \frac{2}{9}z$ $+ \frac{1}{9}z^2 - \frac{4}{27}z^3$
2	4	$\frac{1}{9z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}z + \frac{1}{9}z^2$	$\frac{7}{243z^6} - \frac{2}{81z^5} - \frac{1}{27z^4} - \frac{34}{243z^3}$ $+ \frac{10}{81z^2} + \frac{22}{81z} + \frac{5}{9} + \frac{22}{81}z + \frac{10}{81}z^2$ $- \frac{34}{243}z^3 - \frac{1}{27}z^4 - \frac{2}{81}z^5 + \frac{7}{243}z^6$

Tableau 2.2 – Quelques filtres d'ondelettes primaires triadiques ($b = 3$)

$\widetilde{N}$	N	*filtres* ${}_{\widetilde{N},N}m_1$
2	2	$\frac{4}{81z^2} + \frac{8}{81z} + \frac{4}{27} - \frac{14}{81}z - \frac{40}{81}z^2 + \frac{5}{27}z^3 + \frac{10}{81}z^4 + \frac{5}{81}z^5$
		$\frac{5}{81z^2} + \frac{10}{81z} + \frac{5}{27} - \frac{40}{81}z - \frac{14}{81}z^2 + \frac{4}{27}z^3 + \frac{8}{81}z^4 + \frac{4}{81}z^5$
2	4	$-\frac{8}{729z^5} - \frac{16}{729z^4} - \frac{8}{243z^3} + \frac{38}{729z^2} + \frac{100}{729z} + \frac{2}{9} - \frac{112}{243}z$
		$-\frac{35}{243}z^2 + \frac{14}{81}z^3 + \frac{77}{729}z^4 + \frac{28}{729}z^5 - \frac{7}{243}z^6 - \frac{14}{729}z^7 - \frac{7}{729}z^8$
		$-\frac{7}{729z^5} - \frac{14}{729z^4} - \frac{7}{243z^3} + \frac{28}{729z^2} + \frac{77}{729z} + \frac{14}{81} - \frac{35}{243}z$
		$-\frac{112}{243}z^2 + \frac{2}{9}z^3 + \frac{100}{729}z^4 + \frac{38}{729}z^5 - \frac{8}{243}z^6 - \frac{16}{729}z^7 - \frac{8}{729}z^8$

Tableau 2.3 – Quelques filtres d'ondelettes duales triadiques ($b = 3$)

$\widetilde{N}$	*filtres* ${}_{\widetilde{N}}\widetilde{m}_1$
1	$1 - z$
	$z - z^2$
2	$1 - 2z + z^2$
	$z - 2z^2 + z^3$

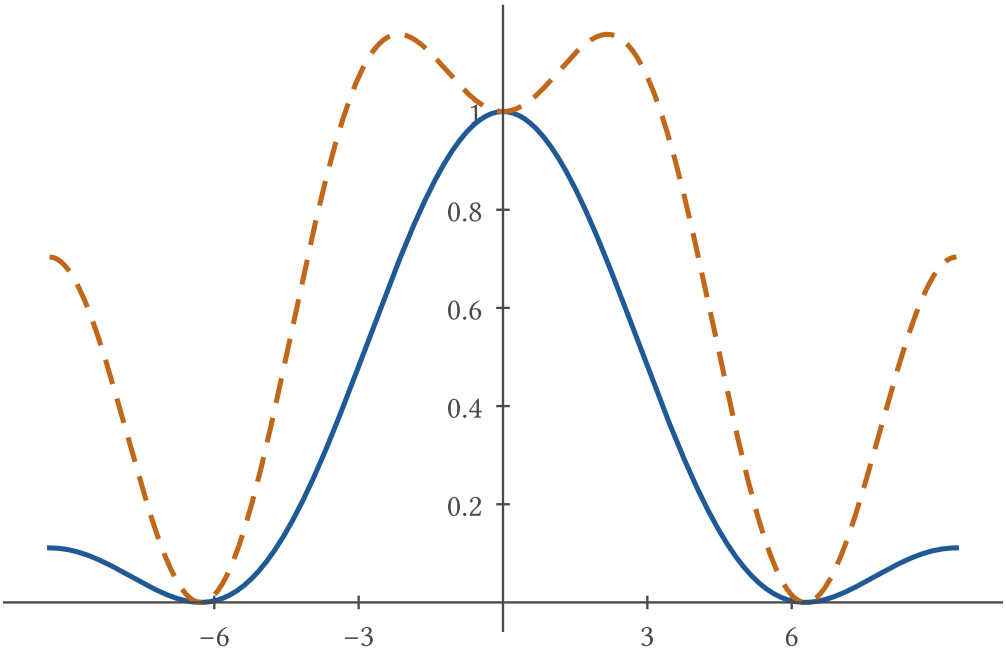


Figure 2.5 – Polynômes caractéristiques des fonctions d'échelles pour $N = \widetilde{N} = 2$ (le polynôme dual est en pointillé et l'abscisse est en ξ)

3

Une famille d'ondelettes biorthogonales sur l'intervalle obtenue par un schéma d'interpolation itérative dyadique

3.1 Interpolation itérative sur l'intervalle

3.1.1 Interpolation mixte généralisée

Il existe déjà une généralisation de l'interpolation itérative de Lagrange sur l'intervalle appelée *interpolation mixte* [19]. On peut utiliser la dérivée de ces fonctions interpolantes pour obtenir les ondelettes de l'interpolation des moyennes sur l'intervalle (voir [10] où Donoho construit une multirésolution duale à la multirésolution de Haar). Pour généraliser cette idée aux splines d'un degré arbitraire, il faut introduire une nouvelle famille de schémas d'interpolation qui généralisent l'interpolation mixte.

L'interpolation mixte se définit simplement. Soit $\{y_{0,k}\}_{k\in[0,n]}$ un ensemble fini de valeurs à interpoler. Soit N un entier positif. On définit $y_{1,2k} = y_{0,k}$ pour tous les $k \in [0,n]$. Soit $k \in [N, n-N-1]$, on trouve $p_k(x)$ le polynôme du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré tel que $p_k(l) = y_{0,l}$ pour $l = k-N+1,\dots,k+N$. On définit alors $y_{1,2k+1} = p_k(k+1/2)$. On définit ensuite le polynôme $p_0(x)$ comme étant le polynôme du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré tel que $p_0(l) = y_{0,l}$ pour $l = 0,\dots,2N-1$ et on pose $y_{1,2l+1} = p_0(l+1/2)$. On traite le bord de droite de la même façon. Ceci forme un schéma d'interpolation itérative dont les fonctions résultantes ont la même régularité que le schéma d'interpolation itérative de Lagrange du même degré [19]. Dans la suite, on note $y_{j,k} = y(k/2^j)$.

Soit $N \geq 2$ un entier : le cas $N = 1$ est traité en détail dans [19]. On choisit un autre entier $\widetilde{N} > N$, pair si N est pair et impair si N est impair. On sait que $N + \widetilde{N}$ est pair. On définit donc $K = \frac{N+\widetilde{N}}{2}$ (on utilise cette nouvelle notation pour éviter toute confusion dans la suite). On suppose aussi que $\widetilde{N}$ est suffisamment grand pour que les fonctions résultant de l'interpolation itérative de Lagrange par des polynômes du $\left(\widetilde{N}+N-1\right)^{\text{e}}$ degré aient au moins une régularité C^N (exemples : pour $N = 1$, $\widetilde{N} \geq 3$ et pour $N = 2$, $\widetilde{N} \geq 4$). Soit j un entier arbitraire suffisamment grand ($2^j > \widetilde{N}$), étant donné une fonction y définie sur les nombres dyadiques de profondeur j sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve un prolongement de cette fonction sur tous les nombres dyadiques. Il faut choisir $N-1$ valeurs pour chacun des bords qui symbolisent les valeurs des $N-1$ dérivées à chacun des bords correspondants ; notons ces valeurs $\left\{d_k^G\right\}_{k=1}^{N-1}$ et $\left\{d_k^D\right\}_{k=1}^{N-1}$ où les lettres G et D représentent le bord de gauche ($x = 0$) et celui de droite

($x = 1$). Lorsque $n - K + 1 \geq 0$ et $n + K \leq 2^j$, $y\left(2^{-j}n + 2^{-j-1}\right)$ est définie par $p\left(2^{-j}n + 2^{-j-1}\right)$ où p est le polynôme de Lagrange du $\left(\widetilde{N} + N - 1\right)^{\text{e}}$ degré tel que $p(2^{-j}k) = y(2^{-j}k)\ \forall k \in [n - K + 1, n + K] \cap \mathbf{Z}$. Autrement, si $n - K + 1 < 0$, on utilise toujours la valeur $p\left(2^{-j}n + 2^{-j-1}\right)$, mais l'on définit le polynôme p comme le polynôme du $\left(\widetilde{N} + N - 1\right)^{\text{e}}$ degré tel que $p(2^{-j}k) = y(2^{-j}k)\ \forall k \in \left[0, \widetilde{N}\right] \cap \mathbf{Z}$ et tel que pour $k = 1, \ldots, N - 1$, on a $\frac{d^k}{dx^k} p(0) = d_k^G$. On traite le cas $n + K > 2^j$ d'une façon symétrique. On peut itérer cette construction.

Remarque 4 Par construction, les polynômes du $\left(\widetilde{N} + N - 1\right)^{\text{e}}$ degré sont préservés, c'est-à-dire que si la fonction y choisie à l'origine était un polynôme p du $\left(\widetilde{N} + N - 1\right)^{\text{e}}$ degré (avec les valeurs $\left\{ d_k^G \right\}_{k=1}^{N-1}$ et $\left\{ d_k^D \right\}_{k=1}^{N-1}$ obtenues des dérivées à chaque extrémité), le prolongement de y par l'algorithme correspondra exactement au polynôme de départ. Cette propriété permettra de construire des ondelettes duales ayant N moments nuls (les ondelettes primaires auront $\widetilde{N}$ moments nuls).

Exemple 6 Soient $N = 2$ et $\widetilde{N} = 4$. On donne un exemple du schéma d'interpolation décrit plus haut. Pour $1 < k < 2^j - 2$, on a

$$\begin{aligned} y_{j+1,2k+1} = {} & \frac{3y_{j,k-2}}{256} - \frac{25y_{j,k-1}}{256} + \frac{75y_{j,k}}{128} \\ & + \frac{75y_{j,k+1}}{128} - \frac{25y_{j,k+2}}{256} + \frac{3y_{j,k+3}}{256}. \end{aligned}$$

Les filtres du bord de gauche sont (les filtres du bord de droite sont obtenus par symétrie) :

$$\begin{aligned} y_{j+1,1} = {} & \frac{35}{256} 2^{-j} d_1^G + \frac{1715}{3072} y_{j,0} + \frac{35}{64} y_{j,1} \\ & - \frac{35}{256} y_{j,2} + \frac{7}{192} y_{j,3} - \frac{5}{1024} y_{j,4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j+1,3} = {} & - \frac{15}{256} 2^{-j} d_1^G - \frac{165}{1024} y_{j,0} + \frac{45}{64} y_{j,1} \\ & + \frac{135}{256} y_{j,2} - \frac{5}{64} y_{j,3} + \frac{9}{1024} y_{j,4}. \end{aligned}$$

Exemple 7 Soient $N = 3$ et $\widetilde{N} = 5$. On donne un autre exemple du schéma d'interpolation décrit

plus haut. Pour $2 < k < 2^j - 3$, on a

$$\begin{aligned} y_{j+1,2k+1} = & -\frac{5}{2048} y_{j,k-3} + \frac{49}{2048} y_{j,k-2} - \frac{245}{2048} y_{j,k-1} \\ & + \frac{1225}{2048} y_{j,k} + \frac{1225}{2048} y_{j,k+1} - \frac{245}{2048} y_{j,k+2} \\ & + \frac{49}{2048} y_{j,k+3} - \frac{5}{2048} y_{j,k+4}. \end{aligned}$$

Les filtres du bord de gauche sont (encore une fois, les filtres du bord de droite sont obtenus par symétrie) :

$$\begin{aligned} y_{j+1,1} = & \frac{7}{25600} y_{j,5} - \frac{45}{16384} y_{j,4} + \frac{7}{512} y_{j,3} \\ & - \frac{105}{2048} y_{j,2} + \frac{315}{1024} y_{j,1} + \frac{300013}{409600} y_{j,0} \\ & + \frac{5397}{20480} d_1^G 2^{-j} + \frac{63}{2048} d_2^G 4^{-j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{j+1,3} = & -\frac{27}{25600} y_{j,5} + \frac{189}{16384} y_{j,4} - \frac{35}{512} y_{j,3} \\ & + \frac{945}{2048} y_{j,2} + \frac{945}{1024} y_{j,1} - \frac{133693}{409600} y_{j,0} \\ & - \frac{3717}{20480} d_1^G 2^{-j} - \frac{63}{2048} d_2^G 4^{-j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j+1,5} = & \frac{3}{1024} y_{j,5} - \frac{625}{16384} y_{j,4} + \frac{625}{1536} y_{j,3} \\ & + \frac{1875}{2048} y_{j,2} - \frac{625}{1024} y_{j,1} + \frac{15883}{49152} y_{j,0} \\ & + \frac{805}{4096} d_1^G 2^{-j} + \frac{75}{2048} d_2^G 4^{-j}. \end{aligned}$$

3.1.2 Régularité

On utilise la linéarité du schéma d'interpolation (voir [19] pour une preuve similaire d'un résultat moins général). Soit y une fonction définie sur les nombres dyadiques de profondeur j ($2^j > \widetilde{N}$) de l'intervalle ; par abus de notation, on note aussi y son prolongement à tous les nombres dyadiques par le schéma. Soit P l'unique polynôme du $\left(N + \widetilde{N} - 1\right)^{\text{e}}$ degré satisfaisant

$$\frac{d^k}{dx^k} P(0) = d_k^G$$

pour $k = 1, \dots, N-1$ tel que $P(2^{-j}k) = y(2^{-j}k)\ \forall k \in \left[0, \widetilde{N}\right] \cap \mathbf{Z}$. On définit g sur les nombres dyadiques de profondeur j par

$$g\left(2^{-j}k\right) = y\left(2^{-j}k\right) - P\left(2^{-j}k\right)$$

pour tous les k. On peut prolonger g sur tous les nombres dyadiques en supposant que $d_k^G = 0$ et $d_k^D = 0\ \forall k$. On a $y = P + g$ sur les nombres dyadiques. Notons que par construction, pour $k = 0, \dots, \widetilde{N}$, on a $g(2^{-j}k) = 0$. Par induction, on peut montrer en se contentant d'appliquer à la lettre le schéma que ceci est vrai pour $j' > j$, c'est-à-dire que pour $k = 0, \dots, \widetilde{N}$, on a $g\left(2^{-j'}k\right) = 0$. En d'autres mots, au bord de gauche ($x = 0$), le prolongement de g à tous les nombres dyadiques se fait uniquement par les polynômes de Lagrange. Par symétrie, ceci est aussi vrai au bord de droite ($x = 1$). On a donc établi le résultat suivant.

Proposition 5 *Le schéma d'interpolation mixte généralisée par polynômes du $\left(N + \widetilde{N} - 1\right)^{\text{e}}$ degré admet la même régularité globale que le schéma d'interpolation itérative de Lagrange correspondant, c'est-à-dire qu'une fonction prolongée à tous les nombres dyadiques par l'interpolation mixte généralisée a, pour tout entier m, un prolongement de régularité C^m sur les réels si $\widetilde{N}$ est suffisamment grand.*

On sait que pour $k = 0, \dots, \widetilde{N} > N \geq 2$, on a $g\left(2^{-j'}k\right) = 0$. Puisque g est C^N (uniformément sur les nombres dyadiques), on a $\frac{d^k}{dx^k} g(0) = 0$ pour $k = 1, \dots, N-1$. On peut faire la même chose au bord de droite ($x = 1$). On a donc la proposition suivante.

Proposition 6 *Soit y une fonction prolongée par le schéma d'interpolation mixte généralisée; les valeurs $\left\{ d_k^G \right\}_{k=1}^{N-1}$ et $\left\{ d_k^D \right\}_{k=1}^{N-1}$ sont les dérivées de y correspondantes aux bords, c'est-à-dire*

$$\frac{d^k}{dx^k} y(0) = d_k^G$$
$$\frac{d^k}{dx^k} y(1) = d_k^D$$

pour $k = 1, \dots, N-1$.

Remarque 5 En général, on ne peut écrire une fonction interpolante y comme la restriction à l'intervalle d'une fonction interpolante de l'interpolation itérative de Lagrange. Dans ce sens donc, il s'agit d'un nouveau schéma d'interpolation.

Définition 7 *Tout comme avec l'interpolation itérative de Lagrange, il est possible de définir les fonctions fondamentales de l'interpolation mixte généralisée. Soit j fixé. Pour $k = 0, \dots, 2^j$, on note $F_{j,k}$ le prolongement sur l'intervalle de la fonction $F_{j,k}(l/2^j) = \delta_{k,l}$ tel que $d_l^G = d_l^D = 0$ pour $l = 1, \dots, N-1$. Pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on note $F_{j,-k}$ le prolongement sur l'intervalle de la fonction $F_{j,-k}(l/2^j) = 0\ \forall l \in \mathbf{Z}$ tel que $d_k^G = 1$ (autrement dit : $d_l^G = d_l^D = 0$ pour $l = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1$ et $d_l^D = 0$ pour $l = 1, \dots, N-1$). Pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on définit les $F_{j,2^j+k}$ d'une façon similaire. Symboliquement donc, on traite les dérivées aux bords comme des nœuds supplémentaires. On peut montrer que ces fonctions fondamentales sont localisées, c'est-à-dire que support $F_{j,k} \subset \left[2^{-j}\left(k - \widetilde{N}\right), 2^{-j}\left(k + \widetilde{N}\right)\right]$.*

3.2 Analyse multirésolution sur l'intervalle

3.2.1 B-Splines

On se rappelera que l'on peut définir une B-spline du N^e degré comme étant le résultat de N convolutions de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$, $\chi_{[0,1]}$, avec elle-même. On définit donc

$$ {}_N\phi(x) = \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_{N \text{ convolutions}}(x). $$

Les fonctions $\left\{ {}_N\phi(2^j x - k) \right\}_{j,k}$ génèrent une multirésolution dans $L^2(\mathbf{R})$.

Soit une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on dit que $f_{|[0,1]} : [0,1] \to \mathbf{R}$ est la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$ si $f(x) = f_{|[0,1]}(x)$ pour tous les $x \in [0,1]$.

On introduit la quantité κ définie par $\kappa = 1$ si N est impair et $\kappa = 0$ si N est pair. On retient les $2^j + N - 1$ B-splines sur $\mathbf{R}$ dont le support rencontre l'intervalle $[0,1]$ ($\left\{ {}_N\phi(2^j x - k) \right\}_{k=-[N/2]+1-\kappa}^{2^j-1+[N/2]}$) et on prend leur restriction à l'intervalle $[0,1]$:

$$ {}_N\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, {}_N\phi_{|[0,1]}\left(2^j x - k\right). $$

On a alors une multirésolution dans $L^2[0,1]$. Il vient

$$ {}_N\phi_{j,k} = \frac{1}{2^N \sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} {}_N\phi_{j+1,2k+n-1} $$

où par définition ${}_N\phi_{j,(m<-[N/2]+1-\kappa)} \equiv 0$ et ${}_N\phi_{j,(m>2^j-1+[N/2])} \equiv 0$.

3.2.2 Fonctions d'échelle duales

Les fonctions d'échelle de Cohen–Daubechies–Feauveau forment une multirésolution biorthogonale avec les splines [2] dans $L^2(\mathbf{R})$ et peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{\mathrm{CDF}}(x) &= (-1)^N \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} \frac{d^N}{dx^N} F\big(x+k+\kappa+[N/2]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} \frac{d^N}{dx^N} F\big(x-k-\kappa-[N/2]\big)\end{aligned}$$

où F est la fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange avec des polynômes du $\big(\widetilde{N}+N-1\big)^{\mathrm{e}}$ degré. $\kappa = 1$ si N est impair et $\kappa = 0$ si N est pair.

On généralise cette formule à l'intervalle en utilisant les fonctions fondamentales définies précédemment (interpolation mixte généralisée). Pour $l = -[N/2]+1-\kappa, \dots, 2^j-1+[N/2]$, on a

$$\begin{aligned}{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x) &= 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j-l-\kappa-[N/2]} \binom{N-1+k}{N-1} F^{(N)}_{j,l+k+\kappa+[N/2]}(x) \\ &\quad + 2^{j/2} \sum_{m=1}^{N-1} d^D_{l,m} F^{(N)}_{j,2^j+m}(x) \\ &= 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j-l-\kappa-[N/2]} \binom{N-1+k}{N-1} 2^{-Nj} \frac{d^N F_{j,l+k+\kappa+[N/2]}(x)}{dx^N} \\ &\quad + 2^{j/2} \sum_{m=1}^{N-1} d^D_{l,m} 2^{-Nj} \frac{d^N F_{j,2^j+m}(x)}{dx^N}\end{aligned}$$

avec la convention que $\sum_{k=0}^{a<0}$ est automatiquement nulle. On remarque que l'on a 2^j+N-1 fonctions duales, car $2[N/2]+\kappa-1 = N-1$. On définit les $d^D_{l,k}$ par la formule

$$d^D_{l,m} = 2^{jm} \frac{d^m}{dk^m} \binom{N-1+k}{N-1}\bigg|_{k=2^j-l-\kappa-[N/2]}.$$

C'est une conséquence directe du fait que les fonctions $\{F_{j,k}\}_k$ permettent la reconstruction exacte des polynômes du $\big(\widetilde{N}+N-1\big)^{\mathrm{e}}$ degré, que les fonctions $\big\{{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,k}\big\}_k$ permettent la reconstruction exacte des polynômes du $\big(\widetilde{N}-1\big)^{\mathrm{e}}$ degré.

Théorème 7 *Soit j suffisamment grand : $2^j > 4\widetilde{N}+2N+2$. Les ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ sont alors biorthonormales aux ${}_N\phi_{j,k}$, c'est-à-dire*

$$\int_0^1 {}_N\phi_{j,k}(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x)\, dx = \delta_{k,l}.$$

Preuve. On suppose que $2^j > 4\widetilde{N} + 2N + 2$. Les $d^D_{l,m}$ furent choisies pour que les ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ soient symétriques, c'est-à-dire

$$ {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x) = {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,2^j-l}(1-x). $$

Les fonctions d'échelle du centre $\left\{ {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l} \right\}_{l=2\widetilde{N}+N+1}^{2^j-2\widetilde{N}-N-1}$ ne sont pas affectées par les bords et l'on retrouve donc les ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau. Pour montrer la biorthonormalité, il suffit donc de considérer le bord de gauche ($x = 0 : l = -[N/2], \dots, 2\widetilde{N} + N + 1$).

Pour $l = -[N/2] + 1 - \kappa, \dots, 2\widetilde{N} + N + 1$, remarquons que

$$ \frac{d^k}{dx^k}\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(0) = 0 \text{ pour } k = 0, \dots, N-1. $$

Ceci permet d'ignorer les termes de bords lorsque l'on intègre par parties. En effet, le choix des $d^D_{l,m}$ implique que les fonctions ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ soient localisées, c'est-à-dire que pour j suffisamment grand ($2^j > 2\widetilde{N} + N - 1$), les ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ pour $l = 0, \dots, 2\widetilde{N} + N + 1$ sont identiquement nulles dans un voisinage de $x = 1$. (La dérivée N^{e} du résultat d'un schéma permet la reconstruction des polynômes du $\left(\widetilde{N} + N - 1\right)^{\text{e}}$ degré $\left(\widetilde{N} + N - 1 \geq N\right)$ et les fonctions fondamentales sont *localisées*, voir définition 7). Notons ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{\text{CDF}}_{j,l}$ les fonctions d'échelle de Cohen–Daubechies–Feauveau et ${}_N\phi^{\text{CDF}}_{j,k}$ les B-splines sur $\mathbf{R}$. Pour simplifier la notation, on écrit [1]

$$ {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{\text{CDF}}_{j,k} = 2^{j/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F^{\text{Lagrange}}_{j,k+\kappa+[N/2]}(x); $$

par intégration par parties on a

$$ \begin{aligned} \delta_{k,l} &= \int_{-\infty}^{\infty} {}_N\phi^{\text{CDF}}_{j,k}(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{\text{CDF}}_{j,l}(x)\, dx \\ &= (-1)^N 2^{j/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} \\ &\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^N}{dx^N}\, {}_N\phi^{\text{CDF}}_{j,k}(x) \right) F^{\text{Lagrange}}_{j,k+\kappa+[N/2]}(x)\, dx, \end{aligned} $$

mais $\frac{d^N}{dx^N}\, {}_N\phi^{\text{CDF}}_{j,k}(x)$ n'est qu'une combinaison de masses de Dirac :

$$ \frac{d^N}{dx^N}\, {}_N\phi^{\text{CDF}}_{j,k}(x) = 2^{(N+1/2)j} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (-1)^n\, \delta\left(2^j x - k - n - [N/2]\right) \tag{3.1} $$

On peut donc remplacer les fonctions fondamentales $F^{\text{Lagrange}}_{j,k}$ par $F_{j,k}$ puisque les masses de Dirac apparaissant dans cette dernière équation ne *perçoivent* que les valeurs aux nombres dyadiques de

1. Il s'agit d'une somme localement finie parce que F^{Lagrange} est une fonction à support compact.

profondeur j. On a donc la formule

$$\begin{aligned}\delta_{k,l} = (-1)^N 2^{j/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^N}{dx^N} {}_N\phi_{j,k}^{\mathrm{CDF}}(x) \right) F_{j,k+\kappa+[N/2]}(x)\, dx \\ = \int_0^1 {}_N\phi_{j,k}(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x)\, dx\end{aligned}$$

qui est valide pour $k = -[N/2] + 1 - \kappa, \dots, 2^j - 1 + [N/2]$ (tous les k). Ceci termine la preuve. ∎

3.2.2.1 Les filtres des fonctions d'échelle duales

Pour $\widetilde{N} \le l \le 2^j - \widetilde{N}$, on utilise le filtre de Cohen–Daubechies–Feauveau, par exemple pour $\widetilde{N} = 4$ et $N = 2$, l'*équation d'échelle* est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,l}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-4} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-3} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-2} \\ + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-1} + \frac{45}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l} \\ + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+1} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+2} \\ - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+3} + \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+4}.\end{aligned}$$

Sur les bords, on a $\widetilde{N} + [N/2] - 1 + \kappa$ filtres à calculer (par symétrie, il suffit de considérer le bord de gauche ($x = 0$)). Pour calculer les filtres on utilise essentiellement le fait que le schéma d'interpolation est itératif. Les filtres sont *localisés* ou *de longueur finie*, c'est-à-dire qu'il existe un entier M indépendant de j bornant uniformément la largeur des filtres. La localisation provient essentiellement du fait que le schéma d'interpolation permet la reconstruction des polynômes du $\left(\widetilde{N}+N-1\right)^{\mathrm{e}}$ degré $\left(\widetilde{N}+N-1 \ge N\right)$.

FILTRES DE BORD ($\widetilde{N} = 4, N = 2$) On suppose que $2^j > 4\widetilde{N} + 2N + 2$. On ne donne les filtres que pour le bord de gauche ($x = 0$) (c'est suffisant par symétrie).

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,3}}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{512}\widetilde{\phi}_{j+1,0} + \frac{5}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,1} + \frac{1}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,2} \\ - \frac{9}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,3} - \frac{67}{512}\widetilde{\phi}_{j+1,4} \\ + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,5} + \frac{45}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,6} + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,7} \\ - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,8} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,9} + \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,10},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,2}}{\sqrt{2}} = &\frac{41}{768}\widetilde{\phi}_{j+1,0} - \frac{41}{384}\widetilde{\phi}_{j+1,1} - \frac{13}{192}\widetilde{\phi}_{j+1,2} \\ &+ \frac{31}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,3} + \frac{187}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,4} \\ &+ \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,5} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,6} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,7} \\ &+ \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,1}}{\sqrt{2}} = &-\frac{241}{1536}\widetilde{\phi}_{j+1,0} + \frac{241}{768}\widetilde{\phi}_{j+1,1} + \frac{245}{384}\widetilde{\phi}_{j+1,2} \\ &+ \frac{105}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,3} - \frac{93}{512}\widetilde{\phi}_{j+1,4} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,5} \\ &+ \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,6},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,0}}{\sqrt{2}} = &\frac{93}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,0} + \frac{35}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,1} \\ &- \frac{5}{32}\widetilde{\phi}_{j+1,2} - \frac{15}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,3} \\ &+ \frac{15}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,4}.\end{aligned}$$

3.2.3 Ondelettes duales

On a 2^j ondelettes duales données par[2]

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k} = (-1)^{N+[N/2]}\, 2^{1-N+j/2}\frac{d^N}{dx^N}F_{j+1,2k+1}$$

pour $k = 0, \dots, 2^j - 1$. On peut montrer par intégration par parties que $\left\langle {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}, {}_{N}\phi_{j,l}\right\rangle = 0$ et l'on remarque que

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k} = \frac{(-1)^{N+[N/2]}\, 2^{1-N}}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\binom{N}{n}\,{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j+1,2k+n-[N/2]+1-\kappa}.$$

Proposition 8 *Les ondelettes* ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}$ *auront* N *moments nuls*

$$\int_0^1 {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}(x)\, x^n\, dx = 0$$

pour $n = 0, \dots, N-1$.

2. La dépendance sur $\widetilde{N}$ est ici implicite : les fonctions F dépendent bien sûr de N et de $\widetilde{N}$.

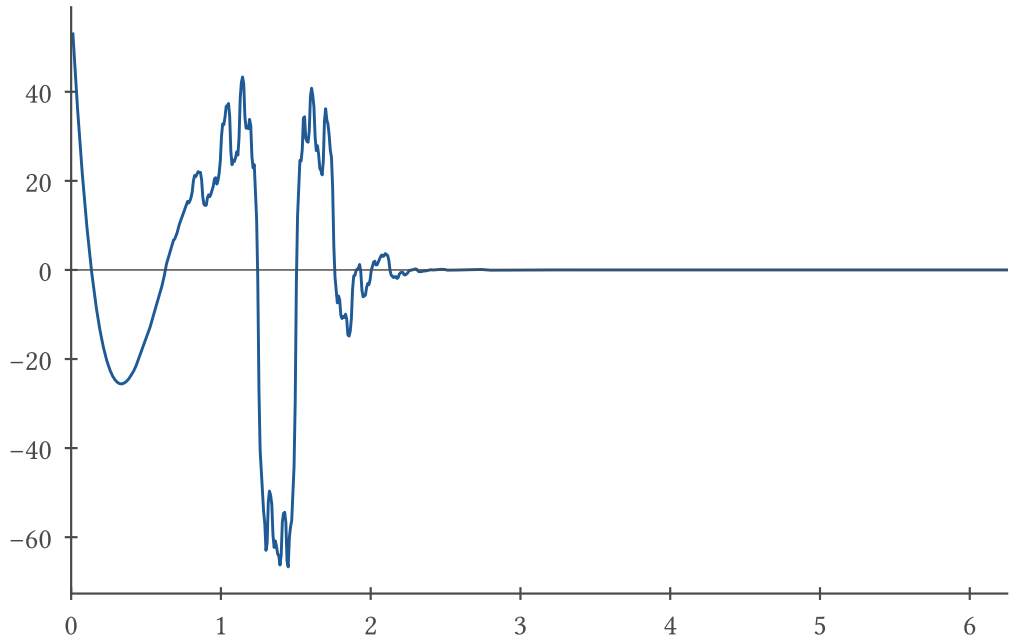


Figure 3.1 – Ondelette duale ${}_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,0}$ pour j quelconque

Preuve. Fixons j. Par l'orthogonalité des ondelettes, on a $\left\langle {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}, {}_{N}\phi_{j,l} \right\rangle = 0$ ce qui suffit donc pour obtenir les moments nuls parce que les B-splines $\left\{ {}_{N}\phi_{j,l} \right\}_l$ permettent la reconstruction des polynômes du $(N-1)^{\text{e}}$ degré. ∎

3.2.4 Ondelettes primaires

La construction des ondelettes primaires $\{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{2^j-1}$ ne pose pas de problème. Soit le filtre des ondelettes primaires de Cohen–Daubechies–Feauveau $\left\{ h_k^{\text{CDF}} \right\}$, c'est-à-dire que

$$\psi_{j,k}^{\text{CDF}} = \sum_{l=0}^{2^j} h_{l-2k}^{\text{CDF}}\, \phi_{j+1,l}^{\text{CDF}}.$$

Il suffit de prendre

$$\psi_{j,k} = \psi_{j,k}^{*} - \sum_{l} \left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \psi_{j,k}^{*} \right\rangle \phi_{j,l} \tag{3.2}$$

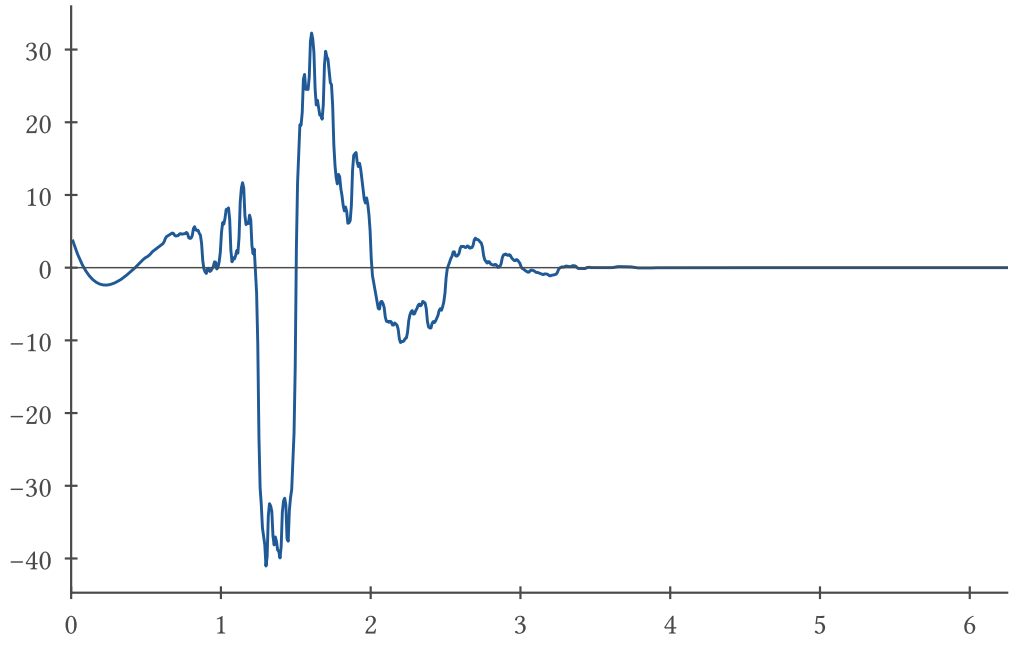


FIGURE 3.2 – Ondelette duale ${}_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,1}$ pour j quelconque

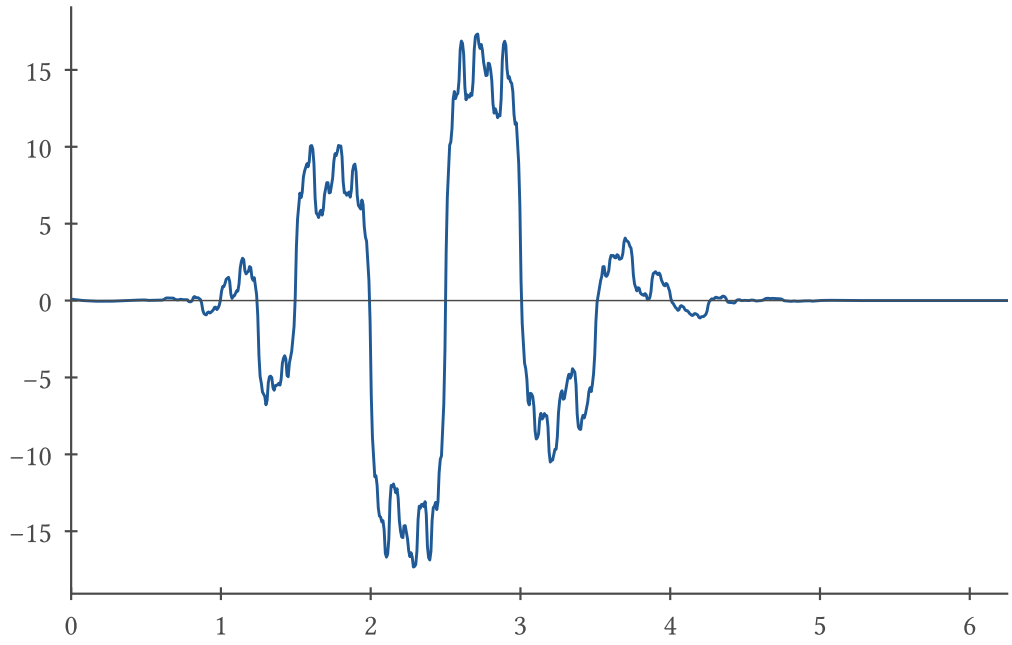


FIGURE 3.3 – Ondelette duale ${}_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,2}$ pour j quelconque

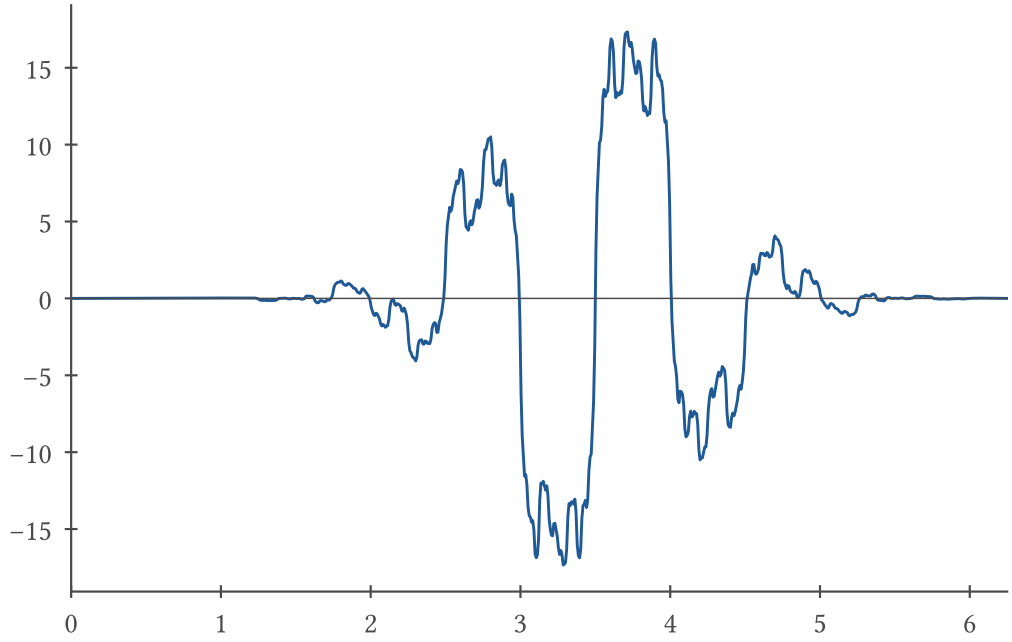


Figure 3.4 – Ondelette duale ${}_{3,5}\widetilde{\psi}_{j,3}$ pour j quelconque (correspond à l'ondelette de Cohen–Daubechies–Feauveau)

où $\psi^*_{j,k} = \sum_{l=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} h^{\mathrm{CDF}}_{l-2k}\, \phi_{j+1,l}$. On peut calculer $\left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \psi^*_{j,k} \right\rangle$ d'une façon efficace puisque

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \psi^*_{j,k} \right\rangle &= \sum_{m=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} h^{\mathrm{CDF}}_{m-2k} \left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \phi_{j+1,m} \right\rangle \\ &= \sum_{m=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} h^{\mathrm{CDF}}_{m-2k}\, \widetilde{h}_{l,m}\end{aligned}$$

où $\widetilde{\phi}_{j,k} = \sum_{l=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} \widetilde{h}_{k,l}\, \widetilde{\phi}_{j+1,l}$. Par définition (équation 3.2), on a automatiquement

$$\left\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,l} \right\rangle = 0 \ \forall k, l$$

d'où

$$\left\langle \psi_{j,l}, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle = \left\langle \psi^*_{j,l}, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle \ \forall k, l.$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \psi^*_{j,l}, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle &= \frac{(-1)^{N+[N/2]}\, 2^{1-N}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{N}{n} h^{\mathrm{CDF}}_{2k+n-2l-[N/2]+1-\kappa} \\ &= \delta_{k,l}\end{aligned}$$

pour $k, l = 0, \ldots, 2^j - 1$. Les ondelettes $\{\psi_{j,l}\}_l$ et $\left\{ \widetilde{\psi}_{j,k} \right\}_k$ sont donc biorthonormales.

Proposition 9 *Les ondelettes $\psi_{j,k}$ ont $\widetilde{N}$ moments nuls.*

Preuve. Fixons j. On sait que les fonctions $\left\{\widetilde{\phi}_{j,k}\right\}_k$ génèrent par des combinaisons linéaires tous les polynômes du $\left(\widetilde{N}-1\right)^{\text{e}}$ degré et, en même temps, on a $\left\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,l} \right\rangle = 0$. ∎

3.2.4.1 Exemple de filtre ($\widetilde{N}=4, N=2$)

Pour $2 \leq k \leq 2^j - 3$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{j,k}}{\sqrt{2}} = &\frac{3}{128}\phi_{j+1,2k-3} + \frac{3}{64}\phi_{j+1,2k-2} - \frac{1}{8}\phi_{j+1,2k-1} \\ &- \frac{19}{64}\phi_{j+1,2k} + \frac{45}{64}\phi_{j+1,2k+1} \\ &- \frac{19}{64}\phi_{j+1,2k+2} - \frac{1}{8}\phi_{j+1,2k+3} \\ &+ \frac{3}{64}\phi_{j+1,2k+4} + \frac{3}{128}\phi_{j+1,2k+5},\end{aligned}$$

et pour $k=0$ et $k=1$, on a respectivement,

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{j,0}}{\sqrt{2}} = &-\frac{35}{64}\phi_{j+1,0} + \frac{875}{1536}\phi_{j+1,1} \\ &- \frac{241}{768}\phi_{j+1,2} - \frac{53}{512}\phi_{j+1,3} \\ &+ \frac{41}{384}\phi_{j+1,4} + \frac{67}{1536}\phi_{j+1,5} \\ &- \frac{5}{256}\phi_{j+1,6} - \frac{5}{512}\phi_{j+1,7}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{j,1}}{\sqrt{2}} = &\frac{15}{64}\phi_{j+1,0} - \frac{45}{512}\phi_{j+1,1} \\ &- \frac{105}{256}\phi_{j+1,2} + \frac{345}{512}\phi_{j+1,3} \\ &- \frac{31}{128}\phi_{j+1,4} - \frac{53}{512}\phi_{j+1,5} \\ &+ \frac{9}{256}\phi_{j+1,6} + \frac{9}{512}\phi_{j+1,7}.\end{aligned}$$

Le bord de droite est traité de façon symétrique.

3.2.5 Remarque

Il existe déjà une adaptation des ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau à l'intervalle [4] obtenue par une approche similaire à celle introduite par Yves Meyer [17] (restriction à

$L^2(0,1)$ de la base sur $L^2(\mathbf{R})$). Cette adaptation est différente de la nôtre (voir remarque 5). Une des principales différences est que nos filtres peuvent être calculés symboliquement.

4

Ondelettes non séparables dans les régions rectangulaires du plan avec filtres interpolants

4.1 Introduction

Les ondelettes ont eu certains succès dans l'analyse de fonctions ou de signaux définis sur la droite. Il existe de nombreuses généralisations au plan, mais dans la plupart des cas, il s'agit simplement du produit cartésien de deux schémas sur la droite réelle ou bien encore, on se limite au cas dyadique. De la même façon que l'on arrive à construire des ondelettes sur l'intervalle, on obtient, par le produit cartésien, des ondelettes sur des régions rectangulaires.

Quelques chercheurs ([23], [14]) ont montré comment on peut construire des multirésolutions d'ondelettes à partir de schémas itératifs et interpolants comme l'*interpolation itérative de Lagrange* sur la droite [6] par un *relèvement*. On montre que cette même approche fonctionne sur les schémas d'interpolation itérative dans le plan ([7], [18] et [20]).

En 1990, une technique simple fut découverte pour généraliser les schémas de l'interpolation itérative de Lagrange sur la droite à l'intervalle [18]. On a utilisé cette technique dans un contexte plus général (voir le chapitre précédent). On montre ici comment ces mêmes arguments élémentaires peuvent généraliser certains schémas d'interpolation itérative dans le plan à des régions du plan. On pourrait appliquer cette approche dans $\mathbf{R}^n$ pour n arbitraire.

On obtient donc des ondelettes dans des régions rectangulaires du plan. Les applications pour de telles ondelettes sont multiples : géophysique, équations aux dérivées partielles et traitement des images. L'utilisation d'un filtre interpolant permet l'application de *l'algorithme à trous* (algorithme rapide) [5]. De plus, les filtres que l'on calcule sont plus courts que ceux que l'on obtiendrait avec le produit cartésien, d'où un algorithme plus rapide. On obtient aussi des ondelettes dérivables.

4.2 Les filtres rectangulaires non séparables

Définition 8 *On dira d'une fonction f dans le plan qu'elle est séparable s'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$. Si $\{F_{j,k}\}$ est une famille de fonctions fondamentales sur la droite, $F_{j,k,l}(x,y) = F_{j,k}(x)\, F_{j,l}(y)$ définit un ensemble de fonctions fondamentales dans le plan. De plus, si les fonctions fondamentales sur la droite appartiennent à $C^n(\mathbf{R})$ la nouvelle famille $\{F_{j,k,l}\}$ appartient aussi à $C^n(\mathbf{R}^2)$.*

4.2.1 Schéma de base

On commence par étudier des schémas rectangulaires d'interpolation itérative dans des régions du plan. Soit $T(x,y) = (x/2, y/2)$ une transformation linéaire du plan, $w(x,y)$ définit une fonction fondamentale par l'équation fonctionnelle

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in G} w(T\mathbf{y})\, F\left(T^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{y}\right) \tag{4.1}$$

où $G = \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2\}$ et où les poids sont donnés par [20]

$$w(u,v) = \begin{cases} a \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \text{ ou } \left(0, \pm\frac{1}{2}\right) \\ b \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{3}{2}, 0\right) \text{ ou } \left(0, \pm\frac{3}{2}\right) \\ c \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{3}{2}, \pm 1\right) \text{ ou } \left(\pm 1, \pm\frac{3}{2}\right) \\ d \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right) \text{ ou } \left(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\right) \\ e \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) \\ f \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right) \\ g \text{ si } (u,v) = \left(\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right) \\ 1 \text{ si } (u,v) = (0,0) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}.$$

F dépend du choix de la fonction-poids w. On peut montrer qu'en prenant

$$\begin{aligned} a &= \frac{9}{16} - 2d,\ b = -\frac{1}{16} + 2d, \\ c &= -d,\ e = \frac{5}{16} + g, \\ f &= -\frac{1}{32} - g, \end{aligned}$$

les monômes de la forme $x^m y^n$ pour $m + n \leq 3$, $m, n \in \mathbf{N}$ sont préservés :

$$\sum_{(k,l)\in G} k^m l^n F(x-k, y-l) = x^m y^n.$$

L'un des cas particuliers ($a = 9/16$, $b = -1/16$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 81/256$, $f = -9/256$, $g = 1/256$) correspond au produit cartésien du schéma itératif de Lagrange. Les autres cas sont des schémas non séparables. On sait que certains de ces schémas sont différentiables (voir [20]), que la régularité maximale est atteinte dans le cas séparable et qu'aucun de ces schémas n'appartient à $C^2(\mathbf{R}^2)$ [11].

Lemme 10 *La fonction fondamentale F de 4.1 satisfait la condition de Coifman [5],*

$$\iint x^m y^n F(x,y)\,dx\,dy = 0$$

pour $0 < m+n \leq 3$, $m, n \in \mathbf{N}$. Et il est peut-être utile de souligner que

$$\iint F(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Preuve. Notons $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ et μ la mesure de Lebesgue. La transformée de Fourier de l'équation 4.1 est

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\boldsymbol{\xi}) &= \Big(\sum_{\mathbf{y}\in G} w(\mathbf{y})\, e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}}\Big)\widehat{F}(T\boldsymbol{\xi}) \\ &= p_w(\boldsymbol{\xi})\,\widehat{F}(T\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi_1^m\,\partial\xi_2^n}\big(p_w(\boldsymbol{\xi})-1\big)\Big|_{\boldsymbol{\xi}=(0,0)} = 0$$

pour $m+n \leq 3$, ce qui implique

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi_1^m\,\partial\xi_2^n}\big(\widehat{F}(\boldsymbol{\xi})\big)\Big|_{\boldsymbol{\xi}=(0,0)} = 0$$

pour $0 < m+n \leq 3$, d'où la condition de Coifman. Quant à la masse, on sait que F est continue et à support compact. D'autre part, on peut écrire

$$1 = \sum_{\mathbf{y}\in G} F(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

et intégrer sur un sous-ensemble compact du disque fermé $K = \big\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2 \,:\, |\mathbf{x}| \leq \kappa\big\}$. Il vient

$$\int F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \times \#\{\mathbf{y}\in G \,:\, \mathrm{support}(F(\cdot-\mathbf{y}))\cap K \neq \emptyset\} \geq \mu(K) \geq \int F(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \times \#(G\cap K),$$

où $\#A$ est la cardinalité de l'ensemble A. On voit que lorsque $\mu(K)\to\infty$,

$$\#\{\mathbf{y} \,:\, \mathrm{support}\{F(\cdot-\mathbf{y})\}\cap K \neq \emptyset\} \to \#(G\cap K)$$

puisque le support de F est compact et donc

$$\int F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \frac{\mu(K)}{\#(G \cap K)} \to 1.$$

■

> **Remarque 6** On voit que notre construction s'applique à des schémas similaires qui préservent les polynômes du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré et dont les fonctions-poids ont pour support le carré $[-N+1/2, N-1/2] \times [-N+1/2, N-1/2]$. En ce sens, on ne traite que les filtres minimaux. Le cas du troisième degré est sans doute l'un des plus intéressants parce qu'il permet la différentiabilité avec le plus petit support possible. **Dans les exemples qui suivent, on s'en tient souvent au cas $N = 1$ pour sa simplicité.** Il a été facile de calculer quelques-uns des autres cas, mais la présentation des résultats exige des tableaux énormes. Han et Jia [11] ont donné une certaine caractérisation de la régularité de ces schémas à support minimal.

4.2.2 Traitement des bords

On suppose maintenant que l'on veuille adapter ces schémas rectangulaires au demi-plan ($x \geq 0$). On choisit ce cas en premier pour illustrer notre méthode. Sur ce demi-plan, il faut préserver les monômes $x^m y^n$ pour $m + n \leq 3$. Par linéarité, si ces monômes sont préservés, les polynômes du troisième degré le sont aussi.

Il existe diverses approches plus ou moins heureuses face à ce problème. On veut en choisir une qui permette d'éviter le plus possible le calcul *a posteriori* des coefficients. On aimerait généraliser les travaux déjà effectués sur la droite pour que la généralisation à $\mathbf{R}^n$, pour n arbitraire, soit naturelle (dans la mesure du possible).

4.2.2.1 Exemple sur la demi-droite

Soit une suite de valeurs $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$ correspondant à $x = k$ que l'on veut interpoler sur $[0, \infty)$. S'il s'agit de généraliser le schéma d'interpolation itérative de Lagrange dans le cas du troisième degré, on commence par trouver l'unique polynôme P du troisième degré tel que $P(k) = y_k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. À partir de ce polynôme, on peut prolonger la suite $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$ en posant $y_{-k} = P(-k)$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Sur cette nouvelle suite, on peut appliquer le schéma d'interpolation itérative de Lagrange pour obtenir une fonction interpolante y. Finalement, en prenant la restriction sur $[0, \infty)$, on obtient une fonction ayant la même régularité que l'interpolation itérative de Lagrange qui interpole la suite $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$

> **Remarque 7** On préserve alors les polynômes du troisième degré. On suppose en effet qu'à la suite $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$ correspond un polynôme p tel que $p(k) = y_k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ En particulier $P = p$ et donc, puisque le schéma d'interpolation itérative de Lagrange préserve les polynômes du troisième degré, la fonction interpolante est le polynôme p.

Remarque 8 Ce schéma est itératif et stationnaire. En fait, on pourrait montrer que c'est le schéma introduit dans [19]. Soient les valeurs $y_{j,k}$ calculées aux points $x_{j,k} = k/2^j$. Il suffit d'établir que $y_{j,k} = P(k/2^j)$ pour $k = 3, 2, 1, 0, -1, \ldots$ ce que l'on peut vérifier directement.

Exemple 8 On peut ici brièvement illustrer le résultat de Sweldens [23] pour le filtre de l'interpolation linéaire : $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$. Sur la droite, la multirésolution est donnée par $(\phi_{j,k} = F_{j,k})$

$$\begin{aligned}
\phi_{j,k} &= \frac{\phi_{j+1,2k-1}}{2} + \phi_{j+1,2k} + \frac{\phi_{j+1,2k+1}}{2}, \\
\widetilde{\psi}_{j,k} &= \frac{-\widetilde{\phi}_{j+1,2k}}{2} + \widetilde{\phi}_{j+1,2k+1} - \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2k+2}}{2}, \\
\widetilde{\phi}_{j,k} &= \frac{-\widetilde{\phi}_{j+1,2k-2}}{4} + \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2k-1}}{2} + \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2k}}{2} + \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2k+1}}{2} - \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2k+2}}{4}, \\
\psi_{j,k} &= \frac{-\phi_{j+1,2k-1}}{4} - \frac{\phi_{j+1,2k}}{2} + \frac{\phi_{j+1,2k+1}}{2} - \frac{\phi_{j+1,2k+2}}{2} - \frac{\phi_{j+1,2k+3}}{4}.
\end{aligned}$$

Si l'on introduit un bord (région $x \geq 0$), il faut de nouveaux filtres en $k = 0$ (pour que les polynômes soient préservés).

$$\begin{aligned}
\phi_{j,0} &= \phi_{j+1,0} + \frac{\phi_{j+1,1}}{2}, \\
\widetilde{\psi}_{j,0} &= \frac{-\widetilde{\phi}_{j+1,0}}{2} + \widetilde{\phi}_{j+1,1} - \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2}}{2}, \\
\widetilde{\phi}_{j,0} &= \frac{3\widetilde{\phi}_{j+1,0}}{4} + \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,1}}{2} - \frac{\widetilde{\phi}_{j+1,2}}{4}, \\
\psi_{j,0} &= \frac{-\phi_{j+1,0}}{2} + \frac{\phi_{j+1,1}}{2} - \frac{\phi_{j+1,2}}{2} - \frac{\phi_{j+1,3}}{4}.
\end{aligned}$$

Incidemment, on retrouve ici un cas particulier de l'adaptation des ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau [2] à l'intervalle présentée dans cette thèse (évidemment). [a]

a. Note de l'édition de 2026 : ces filtres correspondent à un relèvement de coefficient $\frac{1}{2}$, pour lequel l'ondelette primaire n'a pas de moment nul. Les ondelettes de Cohen–Daubechies–Feauveau (2, 2) correspondent au coefficient $\frac{1}{4}$: $\widetilde{\phi}_{j,k} = -\frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,2k-2} + \frac{1}{4}\widetilde{\phi}_{j+1,2k-1} + \frac{3}{4}\widetilde{\phi}_{j+1,2k} + \frac{1}{4}\widetilde{\phi}_{j+1,2k+1} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,2k+2}$ et $\psi_{j,k} = -\frac{1}{8}\phi_{j+1,2k-1} - \frac{1}{4}\phi_{j+1,2k} + \frac{3}{4}\phi_{j+1,2k+1} - \frac{1}{4}\phi_{j+1,2k+2} - \frac{1}{8}\phi_{j+1,2k+3}$; les filtres de bord sont alors à recalculer.

4.2.2.2 Application dans le demi-plan (cas simple)

Cette idée se généralise aisément. Dans le demi-plan, il suffit de procéder *ligne par ligne*. Comme on l'a fait sur la droite, on suppose que l'on a une suite de valeurs $\{y_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z},\ k\geq 0}$ à interpoler ; on peut trouver les uniques polynômes du troisième degré (voir remarque 6) P_l tels que $P_l(k) = y_{k,l}$

pour $k = 0, 1, 2, 3$. Une fois que l'on a ces polynômes, on peut prolonger la suite des $y_{k,l}$ en posant $y_{-k,l} = P_l(-k)$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ Sur ce nouvel ensemble de valeurs, on peut appliquer le schéma d'interpolation itérative (du troisième degré) choisi et prendre ensuite la restriction de la fonction interpolante résultante y sur le demi-plan $(x \geq 0)$. On a la même régularité que le schéma choisi et les polynômes sont évidemment préservés car si $p(x, y)$ est un polynôme du troisième degré avec les variables x et y alors $p(x, k)$ est un polynôme du troisième degré avec x comme variable si k est fixe.

Lemme 11 *Le schéma décrit plus haut est itératif.*

Preuve. Il est itératif essentiellement puisque les polynômes P_l dépendent linéairement des valeurs $\{y_{k,l}\}_{k=0,1,2,3}$. Quant au reste de la preuve, il s'agit d'une vérification directe du schéma. ∎

Malheureusement, cette méthode est *inefficace* puisque sur l'ensemble des valeurs $\{y_{k,l}\}_{k,l\in\mathbf{Z},\ k\geq 0}$, on n'a pas (en général) un schéma stationnaire et ce qui est pire, les fonctions fondamentales $F_{j,k}$ n'ont pas nécessairement un support se rétrécissant exponentiellement (de l'ordre 2^{-j}) lorsque $j \to \infty$, ce qui peut poser certains problèmes au niveau de la *stabilité* des algorithmes.

Pour contourner cette difficulté, on peut utiliser une approche stationnaire. Au lieu de ne calculer qu'une seule fois les polynômes P_l, on calcule, à chaque itération j, un nouvel ensemble de polynômes $P_{j,l}$. Par la suite, on se contente d'appliquer le filtre interpolant à ce demi-plan *complété* mais en ne conservant que les valeurs sur $x \geq 0$. Notons $y_{j,k,l}$ la valeur interpolée au point $\{2^{-j}k, 2^{-j}l\}$. Alors $P_{j,l}$ est le polynôme interpolant de l'ensemble

$$\left\{(0, y_{j,0,l}), (1, y_{j,1,l}), (2, y_{j,2,l}), (3, y_{j,3,l})\right\}$$

ce qui permet d'écrire

$$P_{j,l}(-1) = 4y_{j,0,l} - 6y_{j,1,l} + 4y_{j,2,l} - y_{j,3,l}.$$

Il se trouve en fait, comme on peut le vérifier, que c'est la seule valeur nécessaire ($P_{j,l}(-1)$) étant donné le support des fonctions-poids pour le cas du troisième degré. En effet, seul le calcul des valeurs interpolées pour

$$(k, l) \in Q = \{(0, 2q + 1), (1, 2q), (1, 2q + 1) \ : \ q \in \mathbf{Z}\}$$

doit être fait différemment (on doit tenir compte du bord). Si à l'origine, les données $y_{k,l}$ sont des monômes $y_{0,k,l} = k^m l^n$ pour $m + n \leq 3$ (et $k \geq 0$) alors les polynômes seront de la forme $P_{0,l}(x) = x^m l^n$ et donc, sur l'ensemble du plan, on associe au point (k, l) la valeur $k^m l^n$ et, puisque le schéma d'interpolation sur le plan préserve de tels monômes, on a forcément $y_{1,k,l} = (k/2)^m (l/2)^n$. Par la suite, on généralise le résultat à tous les $y_{j,k,l}$ par récurrence puisque le schéma est stationnaire. Ce schéma préserve donc les polynômes du troisième degré.

Loin du bord, on applique l'algorithme d'interpolation donné par

$$y_{j,2k,2l} = y_{j-1,k,l},$$

$$\begin{aligned} y_{j,2k+1,2l+1} = {} & e\,(y_{j-1,k,l} + y_{j-1,k+1,l} + y_{j-1,k,l+1} + y_{j-1,k+1,l+1}) \\ & + f\,(y_{j-1,k-1,l} + y_{j-1,k+2,l} + y_{j-1,k-1,l+1} + y_{j-1,k+2,l+1}) \\ & + f\,(y_{j-1,k,l-1} + y_{j-1,k,l+2} + y_{j-1,k+1,l-1} + y_{j-1,k+1,l+2}) \\ & + g\,(y_{j-1,k-1,l-1} + y_{j-1,k+2,l+2} + y_{j-1,k+2,l-1} + y_{j-1,k-1,l+2}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} y_{j,2k+1,2l} = {} & a\,(y_{j-1,k,l} + y_{j-1,k+1,l}) + b\,(y_{j-1,k-1,l} + y_{j-1,k+2,l}) \\ & + c\,(y_{j-1,k-1,l-1} + y_{j-1,k+2,l-1} + y_{j-1,k-1,l+1} + y_{j-1,k+2,l+1}) \\ & + d\,(y_{j-1,k,l-1} + y_{j-1,k+1,l-1} + y_{j-1,k,l+1} + y_{j-1,k+1,l+1}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j,2k,2l+1} = {} & a\,(y_{j-1,k,l} + y_{j-1,k,l+1}) + b\,(y_{j-1,k,l-1} + y_{j-1,k,l+2}) \\ & + c\,(y_{j-1,k-1,l-1} + y_{j-1,k-1,l+2} + y_{j-1,k+1,l-1} + y_{j-1,k+1,l+2}) \\ & + d\,(y_{j-1,k-1,l} + y_{j-1,k-1,l+1} + y_{j-1,k+1,l} + y_{j-1,k+1,l+1}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

On a maintenant les cas particuliers suivants pour tenir compte du bord $x = 0$:

$$\begin{aligned} y_{j,1,2l+1} = {} & (e+4f)\,(y_{j-1,0,l} + y_{j-1,0,l+1}) + (e-6f)\,(y_{j-1,1,l} + y_{j-1,1,l+1}) \\ & + 5f\,(y_{j-1,2,l} + y_{j-1,2,l+1}) - f\,(y_{j-1,3,l} + y_{j-1,3,l+1}) \\ & + (f+4g)\,(y_{j-1,0,l-1} + y_{j-1,0,l+2}) \\ & + (f-6g)\,(y_{j-1,1,l-1} + y_{j-1,1,l+2}) \\ & + 5g\,(y_{j-1,2,l-1} + y_{j-1,2,l+2}) - g\,(y_{j-1,3,l-1} + y_{j-1,3,l+2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{j,0,2l+1} = {} & (a+4d)\,(y_{j-1,0,l} + y_{j-1,0,l+1}) - 5d\,(y_{j-1,1,l} + y_{j-1,1,l+1}) \\ & + 4d\,(y_{j-1,2,l} + y_{j-1,2,l+1}) - d\,(y_{j-1,3,l} + y_{j-1,3,l+1}) \\ & + (b+4c)\,(y_{j-1,0,l-1} + y_{j-1,0,l+2}) \\ & - 5c\,(y_{j-1,1,l-1} + y_{j-1,1,l+2}) \\ & + 4c\,(y_{j-1,2,l-1} + y_{j-1,2,l+2}) - c\,(y_{j-1,3,l-1} + y_{j-1,3,l+2}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j,1,2l} = {} & (a+4b)\,y_{j-1,0,l} + (a-6b)\,y_{j-1,1,l} \\ & + 5b\,y_{j-1,2,l} - b\,y_{j-1,3,l} \\ & + (d+4c)\,(y_{j-1,0,l-1} + y_{j-1,0,l+1}) \\ & + (-6c+d)\,(y_{j-1,1,l-1} + y_{j-1,1,l+1}) \\ & + 5c\,(y_{j-1,2,l-1} + y_{j-1,2,l+1}) - c\,(y_{j-1,3,l-1} + y_{j-1,3,l+1}). \end{aligned}$$

Remarque 9 Il va sans dire que les filtres sont les mêmes, à une transformation près, lorsque l'on considère l'une des régions $\{x \leq k\}$, $\{x \geq k\}$, $\{y \leq k\}$ ou $\{y \geq k\}$.

4.2.3 Ondelettes et relèvement

Avant de traiter des régions plus générales, on verra dès maintenant comment on construit les multirésolutions d'ondelettes. On se limite à l'un des cas les plus *élégants*, c'est-à-dire que l'on exige que les deux multirésolutions aient le même nombre de moments nuls (ce que l'on a dans le cas orthogonal). Dans [14], cet exemple correspond au cas où $P = Q$.

Définition 9 *On a vu que pour chaque valeur interpolée $y_{j,k,l}$, il existe une relation avec les valeurs de l'itération précédente $\{y_{j-1,k,l}\}_{k,l}$ passant par un ensemble de coefficients. Par exemple, $y_{j,2k,2l} = y_{j-1,k,l}$. On appelle cette relation un filtre intermédiaire. Dans les cas stationnaires, à chaque paire (k, l) on peut associer un unique filtre intermédiaire. Par abus de notation $(y_j = \{y_{j,k,l}\}_{k,l})$, on note un filtre $y_{j,k,l} = f_{j,k,l}(y_{j-1})$ ou, dans le cas stationnaire, $y_{j,k,l} = f_{k,l}(y_{j-1})$.*

Définition 10 *Le polynôme caractéristique du filtre (en autant qu'il consiste en une somme finie) est le polynôme trigonométrique*

$$p_{k,l}(\xi, \zeta) = e^{-ik\xi - il\zeta} f_{k,l}\left(\left\{ e^{im\xi + in\zeta} \right\}_{m,n} \right).$$

Définition 11 *On définit le filtre d'une fonction fondamentale dans son ensemble par la relation*

$$F_{j,k,l} = m_{j,k,l}(F_{j+1})$$

ou, dans le cas stationnaire,

$$F_{j,k,l} = m_{k,l}(F_{j+1}).$$

On note le polynôme caractéristique correspondant

$$P_{k,l}(\xi, \zeta) = e^{-2ik\xi - 2il\zeta} m_{k,l}\left(\left\{ e^{im\xi + in\zeta} \right\}_{m,n} \right).$$

Lemme 12 *Dans le cas stationnaire, le polynôme de la fonction fondamentale est*

$$P_{k,l}(\xi,\zeta) = 1 + e^{-i\xi-i\zeta} p_{2k+1,2l+1}(2\xi,2\zeta) + e^{-i\xi} p_{2k+1,2l}(2\xi,2\zeta) + e^{-i\zeta} p_{2k,2l+1}(2\xi,2\zeta).$$

Preuve. On vérifie cette relation en interpolant $y_{j,k,l} = \delta_{k,0}\delta_{l,0}$ à l'aide des filtres intermédiaires. Les valeurs y_{j+1} doivent correspondre au filtre $m_{k,l}$. ■

Exemple 9 Le cas $N = 1$ admet un filtre minimal naturel séparable ($F_{j,k,l} = m_{k,l}(F_{j+1})$) :

$$m_{k,l}(F_{j+1}) = 1 + \frac{1}{2}\left(F_{j+1,2k-1,2l} + F_{j+1,2k+1,2l} + F_{j+1,2k,2l-1} + F_{j+1,2k,2l+1}\right) + \frac{1}{4}\left(F_{j+1,2k-1,2l-1} + F_{j+1,2k+1,2l+1} + F_{j+1,2k+1,2l-1} + F_{j+1,2k-1,2l+1}\right).$$

Sous forme matricielle, on a

$$m \to \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

En particulier, on a

$$f_{2k+1,2l+1}(y_{j-1}) = \frac{y_{j-1,k,l} + y_{j-1,k+1,l} + y_{j-1,k,l+1} + y_{j-1,k+1,l+1}}{4},$$
$$f_{2k+1,2l}(y_{j-1}) = \frac{y_{j-1,k,l} + y_{j-1,k+1,l}}{2},$$
$$f_{2k,2l+1}(y_{j-1}) = \frac{y_{j-1,k,l} + y_{j-1,k,l+1}}{2}.$$

En général, les polynômes caractéristiques sont un bon outil théorique.

Lemme 13 *Soient deux polynômes caractéristiques p_f et p_g. On peut écrire $P_{corr} = p_f \overline{p_g}$ comme le polynôme caractéristique de la fonction de corrélation*

$$corr(\mathbf{y}) = \iint f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{x}$$

alors, dans le contexte rectangulaire, les fonctions associées f et g sont respectivement

1. *biorthonormales, c'est-à-dire que $corr(k,l) = \delta_{k,0}\delta_{l,0}$ pour k, l entiers, si*

$$P_{corr}(\xi,\zeta) + P_{corr}(\xi+\pi,\zeta) + P_{corr}(\xi,\zeta+\pi) + P_{corr}(\xi+\pi,\zeta+\pi) = 4, \tag{4.5}$$

2. *orthogonales, c'est-à-dire que $corr(k,l) = 0$ pour k, l entier, si*

$$P_{corr}(\xi,\zeta) + P_{corr}(\xi+\pi,\zeta) + P_{corr}(\xi,\zeta+\pi) + P_{corr}(\xi+\pi,\zeta+\pi) = 0. \tag{4.6}$$

Preuve. Il s'agit d'une version particulière d'un résultat général (voir [5] ou [13]). ■

Dans la suite, du moins dans le contexte des schémas rectangulaires, on écrit

$$S\big(p(\xi,\zeta)\big) = p(\xi,\zeta) + p(\xi+\pi,\zeta) + p(\xi,\zeta+\pi) + p(\xi+\pi,\zeta+\pi) \tag{4.7}$$

pour simplifier la notation.

Définition 12 *Soit un terme trigonométrique $t_{p,q}(\xi,\zeta) = e^{ip\xi+iq\zeta}$; on vérifie directement que*

$$S\big(t_{p,q}(\xi,\zeta)\big) = 4t_{p,q}(\xi,\zeta)\,\delta_{p \bmod 2,0}\,\delta_{q \bmod 2,0}$$

et donc, on dira que $t_{p,q}$ est pair si $p \bmod 2 = q \bmod 2 = 0$ et impair autrement.

4.2.3.1 Dans le plan

S'il n'y a pas de bord, il n'y a que 3 filtres intermédiaires hormis celui associé avec la relation triviale $y_{j,2k,2l} = y_{j-1,k,l}$ c'est-à-dire $f_{2k+1,2l+1}$, $f_{2k+1,2l}$ et $f_{2k,2l+1}$ (voir respectivement les équations 4.2, 4.3 et 4.4). On peut dire que chacun de ces filtres correspond à une ondelette comme on le verra. D'abord, pour fonction d'échelle primaire, on prend la fonction fondamentale $\phi_{j,k,l} = F_{j,k,l}$ associée au point $x_{j,k,l} = (2^{-j}k, 2^{-j}l)$. Ce choix est certainement sensé puisque les fonctions fondamentales satisfont

une condition de Coifman (voir remarque 10). On prendra pour ondelettes primaires

$$\psi^{(1)}_{j,k,l} = F_{j+1,2k+1,2l+1} - \frac{1}{4} f_{2k+1,2l+1}(F_j),$$
$$\psi^{(2)}_{j,k,l} = F_{j+1,2k+1,2l} - \frac{1}{4} f_{2k+1,2l}(F_j),$$
$$\psi^{(3)}_{j,k,l} = F_{j+1,2k,2l+1} - \frac{1}{4} f_{2k,2l+1}(F_j).$$

On pose

$$\widetilde{\Psi}_{j,p,q} = \widetilde{\phi}_{j+1,p,q} - f_{p,q}\big(\widetilde{\phi}_{j+1,2\cdot,2\cdot}\big).$$

Avant même de définir $\widetilde{\phi}_{j,k,l}$, fixons les ondelettes duales par

$$\widetilde{\psi}^{(1)}_{j,k,l} = \widetilde{\Psi}_{j,2k+1,2l+1},$$
$$\widetilde{\psi}^{(2)}_{j,k,l} = \widetilde{\Psi}_{j,2k+1,2l},$$
$$\widetilde{\psi}^{(3)}_{j,k,l} = \widetilde{\Psi}_{j,2k,2l+1}$$

et maintenant, on écrit

$$\widetilde{\phi}_{j,k,l} = \widetilde{\phi}_{j+1,2k,2l} + \frac{1}{4} m_{k,l}\big(\widetilde{\Psi}_{j,\cdot,\cdot}\big). \tag{4.8}$$

> **Remarque 10** Le facteur $\frac{1}{4}$ dans l'équation qui précède est naturel : il provient de la subdivision rectangulaire (voir remarque 15).

Il est sans doute utile d'illustrer ces formules par un exemple simple.

> **Exemple 10** On choisit le cas linéaire (voir exemple 9) et l'on écrit les filtres sous forme matricielle (cette représentation est plus limpide, mais imprécise). Les filtres des ondelettes primaires sont

donnés par les matrices

$$\psi^{(1)}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{64} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{64} \\ \frac{-1}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{15}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{64} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{64} \end{bmatrix},$$

$$\psi^{(2)}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{16} \\ \frac{-1}{32} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \end{bmatrix},$$

$$\psi^{(3)}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \end{bmatrix}.$$

Les filtres des ondelettes duales sont donnés par les matrices

$$\widetilde{\psi}^{(1)}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\psi}^{(2)}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\psi}^{(3)}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Finalement, le filtre de la fonction d'échelle duale est donné par la matrice

$$\widetilde{\phi}_{j,k,l} \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{64} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & -\frac{1}{64} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{3}{32} & \frac{1}{8} & \frac{11}{16} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{32} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{1}{64} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & -\frac{1}{64} \end{bmatrix}.$$

On observe que $\phi_{j,k,l}$ est séparable, mais $\widetilde{\phi}_{j,k,l}$ ne l'est pas (voir figures 4.1 et 4.2). La multirésolution biorthogonale est donc non séparable.

Proposition 14 $\left\{\phi, \widetilde{\phi}, \psi, \widetilde{\psi}\right\}$ *forme une multirésolution biorthogonale.*

Preuve. Commençons par montrer que les ondelettes duales sont orthogonales à ces fonctions fondamentales. On voit que le polynôme caractéristique des ondelettes duales est (voir définition 10)

$$e^{-ip\xi - iq\zeta} - p_{p,q}(2\xi, 2\zeta)$$

pour $(p, q) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\}$. Par le lemme 12, on a

$$P_{k,l}(\xi,\zeta)\,\overline{e^{-ip\xi-iq\zeta}} = e^{ip\xi+iq\zeta} + e^{i(p-1)\xi+i(q-1)\zeta}\,p_{2k+1,2l+1}(2\xi,2\zeta) + e^{i(p-1)\xi+iq\zeta}\,p_{2k+1,2l}(2\xi,2\zeta) + e^{ip\xi+i(q-1)\zeta}\,p_{2k,2l+1}(2\xi,2\zeta)$$

et donc, puisque $p_{m,n}(2\xi, 2\zeta)$ est pair $\forall m, n$, on a

$$S\left(P_{k,l}(\xi,\zeta)\,\overline{e^{-ip\xi-iq\zeta}}\right) = 4p_{p,q}(2\xi,2\zeta)$$

pour

$$(p, q) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\}.$$

(L'opérateur S est défini à l'équation 4.7.) D'autre part, on obtient que

$$\begin{aligned} S\left(P_{k,l}(\xi,\zeta)\,\overline{p_{p,q}(2\xi,2\zeta)}\right) &= S\left(1 \times p_{p,q}(2\xi,2\zeta)\right) \\ &= 4p_{p,q}(2\xi,2\zeta) \end{aligned}$$

si $(p, q) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\}$. En utilisant le lemme 13, on conclut que $\widetilde{\psi}_j \perp \phi_j$ dans L^2.

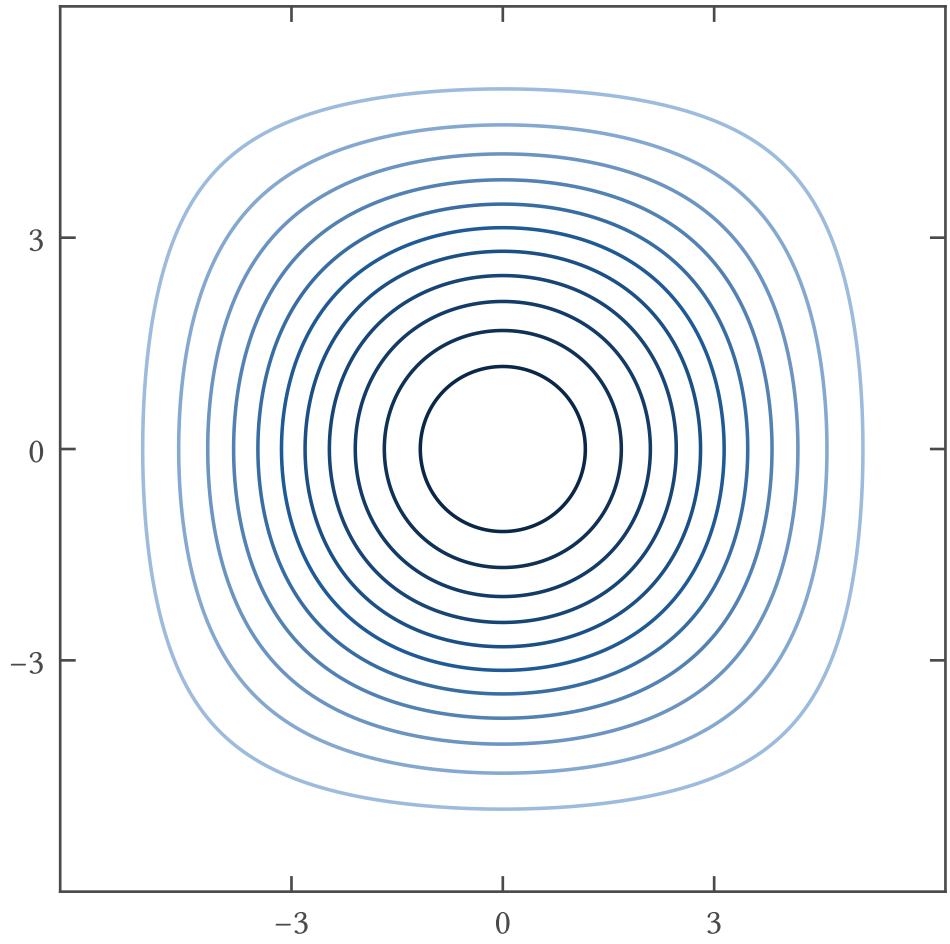


Figure 4.1 – Contours du polynôme caractéristique de la fonction d'échelle primaire (ϕ)

Une fois ce résultat établi, le reste devient plus facile. $\widetilde{\Psi}_j \perp \phi_j$ implique que $\widetilde{\Psi}_{j,2k,2l} = 0$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\phi}_{j,k,l}, \phi_{j,m,n} \right\rangle &= \left\langle \widetilde{\phi}_{j+1,2k,2l} + \frac{1}{4} m_{k,l}\left(\widetilde{\Psi}_{j,\cdot,\cdot}\right), \phi_{j,m,n} \right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{\phi}_{j+1,2k,2l}, \phi_{j,m,n} \right\rangle.\end{aligned}$$

Mais comme

$$S\left(1 * \overline{P_{k,l}(\xi,\zeta)}\right) = S\left(P_{k,l}(\xi,\zeta)\right) = 4$$

et puisque $P_{k,l}$ est réel et qu'il s'agit d'un filtre interpolant (d'où la dernière égalité), on a que $\widetilde{\phi}_j$ et ϕ_j sont biorthonormales dans L^2.

Pour montrer que les ondelettes sont biorthonormales, on utilise le fait que $F_j \perp \widetilde{\psi}_j$ dans L^2. Prenons par exemple

$$\left\langle \psi^{(1)}_{j,k,l}, \widetilde{\psi}^{(\cdot)}_{j,p,q} \right\rangle = \left\langle F_{j+1,2k+1,2l+1}, \widetilde{\psi}^{(\cdot)}_{j,p,q} \right\rangle$$

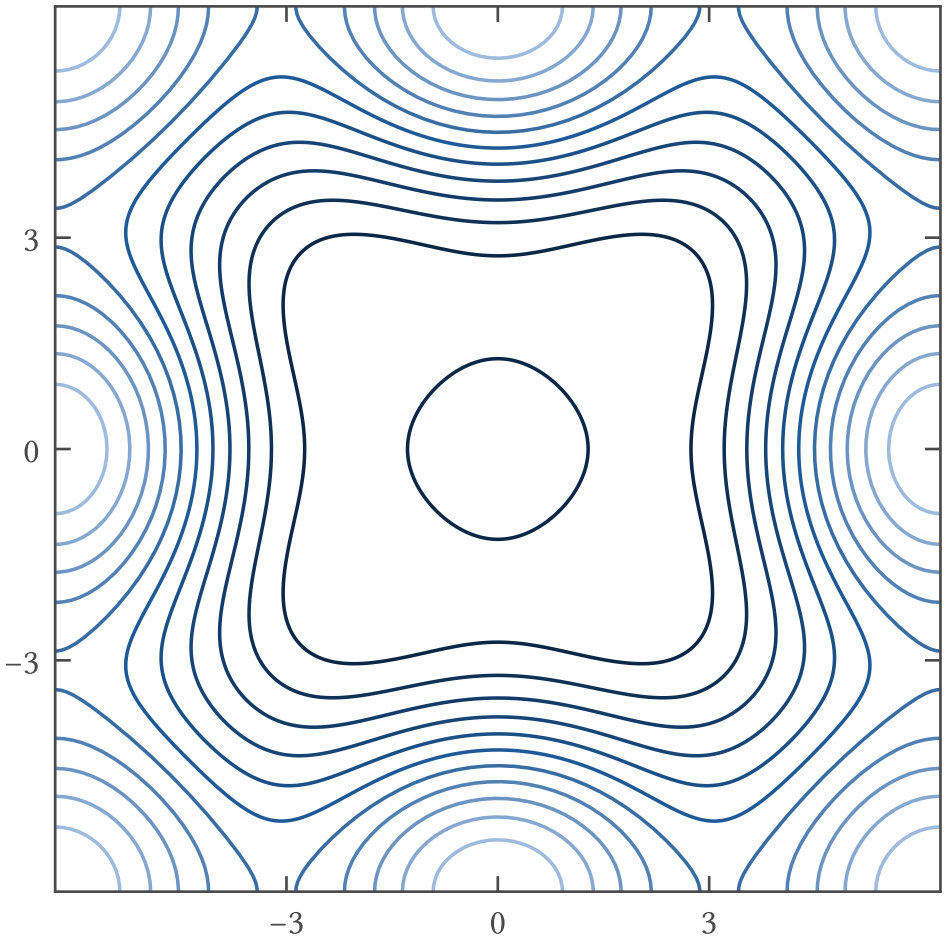


FIGURE 4.2 – Contours du polynôme caractéristique de la fonction d'échelle duale ($\widetilde{\phi}$)

et finalement le résultat est obtenu puisque $f_{p,q}(\phi_{j+1,2\cdot,2\cdot}) \perp F_{j+1,2k+1,2l+1}$ par la dualité des fonctions d'échelle. Les autres cas se traitent avec les mêmes arguments.

Il faut maintenant montrer que $\psi_j \perp \widetilde{\phi}_j$ dans L^2 et encore une fois, pour simplifier la notation, on prend un cas particulier. En utilisant les propriétés déjà établies, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^{(1)}_{j,k,l}, \widetilde{\phi}_{j,m,n} \right\rangle &= \left\langle F_{j+1,2k+1,2l+1} - \frac{1}{4} f_{2k+1,2l+1}(F_j), \widetilde{\phi}_{j+1,2m,2n} + \frac{1}{4} m_{m,n}\left(\widetilde{\Psi}_{j,\cdot,\cdot}\right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left\langle F_{j+1,2k+1,2l+1}, m_{m,n}\left(\widetilde{\Psi}_{j,\cdot,\cdot}\right) \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{4}\left\langle f_{2k+1,2l+1}(F_j), \widetilde{\phi}_{j+1,2m,2n} \right\rangle \\
&= \frac{m_{m,n}\left(\delta_{2k+1,\cdot}\, \delta_{2l+1,\cdot}\right) - f_{2k+1,2l+1}\left(\delta_{m,\cdot}\, \delta_{n,\cdot}\right)}{4} = 0.
\end{aligned}$$

En effet, la dernière équation n'est qu'une question de notation :

$$m_{m,n}\big(\delta_{2k+1,\cdot}\,\delta_{2l+1,\cdot}\big) = F_{m,n}(2k+1,2l+1) = f_{2k+1,2l+1}\big(\delta_{m,\cdot}\,\delta_{n,\cdot}\big).$$

Les autres cas se prouvent de la même façon. ∎

Proposition 15 *On peut vérifier que*

$$\int x^m y^n \psi^{(\kappa)}_{j,k,l}(\mathbf{x})\,dx\,dy = 0.$$
$$\int x^m y^n \widetilde{\psi}^{(\kappa)}_{j,k,l}(\mathbf{x})\,dx\,dy = 0$$

pour $\kappa = 1,2,3$, $0 < m+n \leq 3$ *et* $\forall j,k,l$. *De plus,* $\widetilde{\phi}$ *satisfait dans tous les cas la condition de Coifman,*

$$\iint x^m y^n \widetilde{\phi}_{j,k,l}(x,y)\,dx\,dy = 0$$

pour $0 < m+n \leq 3$, $m,n \in \mathbf{N}$

Preuve. D'abord, puisque $F_{j,k,l}$ est une fonction interpolante permettant la reconstruction des polynômes du troisième degré, et par l'orthogonalité des ondelettes duales et des $F_{j,k,l}$, on a les moments nuls de $\widetilde{\psi}^{(\kappa)}_{j,k,l}$. Les moments nuls de $\widetilde{\psi}^{(\kappa)}_{j,k,l}$ permettent à leur tour d'écrire que pour $0 < m+n \leq 3$, $m,n \in \mathbf{N}$, (voir équation 4.8)

$$\begin{aligned}\iint x^m y^n \widetilde{\phi}_{j,k,l}(x,y)\,dx\,dy &= \iint x^m y^n \widetilde{\phi}_{j+1,2k,2l}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \iint x^m y^n \widetilde{\phi}_{j,k,l}(2x,2y)\,dx\,dy \\ &= 2^{-m-n-2}\iint x^m y^n \widetilde{\phi}_{j,k,l}(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

par changement de variables. On a donc

$$\iint x^m y^n \widetilde{\phi}_{j,k,l}(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

On obtient les moments nuls des ondelettes primaires par un raisonnement similaire du fait que

$$\int \psi^{(\kappa)}_{j,k,l}(\mathbf{x})\,dx\,dy = 0$$

par la seule présence du facteur $\frac{1}{4}$. ∎

Remarque 11 Un résultat général permet d'affirmer qu'en autant que l'on a des filtres finis biorthogonaux avec des ondelettes ayant au moins un moment nul, la multirésolution correspondante est dans L^2 (voir par exemple [1]).

4.2.3.2 Dans le demi-plan

Il suffit d'utiliser les formules pour $\{\phi, \widetilde{\phi}, \psi, \widetilde{\psi}\}$ données à la section précédente. Seul le schéma d'interpolation doit être adapté. Quelques problèmes vont apparaître :

1. Les fonctions d'échelle ne satisferont plus de *condition de Coifman* aux bords. Pour comprendre rapidement pourquoi c'est naturel, prenons pour exemple la spline linéaire fondamentale sur la droite Φ ($\Phi(k) = \delta_{k,0}$). Cette fonction satisfait $\int x\Phi(x)\,dx = 0$ par sa symétrie. Si l'on veut la restreindre à la demi-droite, on a $\int_0^\infty x\Phi(x)\,dx = \frac{1}{6}$ au bord et donc la condition de Coifman est perdue.
2. À cause de cette asymétrie, en général, les ondelettes primaires vont perdre aux bords tous leurs moments nuls (sauf un).

On pourrait certainement corriger ces problèmes en modifiant ces filtres, mais on introduit invariablement d'autres asymétries. Dans les applications, en prenant les ondelettes duales comme filtre d'analyse et le filtre primaire pour la synthèse :

$$f = \sum_{k,l} \langle f, \widetilde{\phi}_{j_0,k,l} \rangle \phi_{j_0,k,l} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k,l,r} \langle f, \widetilde{\psi}^{(r)}_{j,k,l} \rangle \psi^{(r)}_{j,k,l}.$$

on peut souvent contourner le problème de façon efficace. Comme le filtre de la fonction d'échelle primaire est le plus court, c'est le meilleur choix à faire même lorsque l'on ne tient pas compte des bords (primaire → synthèse, dual → analyse).

Remarque 12 Puisque la fonction d'échelle primaire préserve les polynômes, même au bord, les ondelettes duales conservent le nombre de leurs moments nuls.

Exemple 11 Encore une fois, à titre d'illustration, on présentera ici l'exemple du filtre linéaire. Comme les filtres à droite du bord ont déjà été présentés, il ne reste plus qu'à faire la liste de filtres au bord $x = 0$. La fonction d'échelle primaire correspond au filtre normal tronqué (dans le cas du troisième degré ce n'est plus vrai) :

$$\phi_{j,0,l} = F_{j,0,l} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Les filtres des ondelettes duales ne sont pas affectés par le bord. Les filtres des ondelettes primaires

sont simplement tronqués

$$\psi^{(1)}_{j,0,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{64} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{16} & \frac{15}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{64} \end{bmatrix},$$

$$\psi^{(2)}_{j,0,l} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{16} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \end{bmatrix}, \psi^{(3)}_{j,0,l} \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{32} \end{bmatrix}.$$

Le filtre de la fonction d'échelle duale est

$$\widetilde{\phi}_{j,0,l} \to \begin{bmatrix} -\frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{25}{32} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{64} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas particulier, puisque les filtres d'ondelettes duales sont les mêmes au bord, la condition de Coifman sur $\widetilde{\phi}$ est toujours valide au bord, mais cela n'est pas vrai en général.

Proposition 16 $\left\{\phi, \widetilde{\phi}, \psi, \widetilde{\psi}\right\}$ *forme une multirésolution biorthogonale.*

Preuve. Il suffit d'observer que le lemme 12 ne supposait pas l'homogénéité et donc, on n'a pas à montrer l'orthogonalité $\left(\widetilde{\psi}_j \perp \phi_j\right)$. Le reste de la preuve demeure valide même au sein d'une région du plan. ∎

4.2.3.3 Régions du plan avec coins à angle droit

Il faut d'abord poser quelques contraintes sur la région que l'on peut choisir. Mais comme on l'a vu, il suffit en fait de pouvoir calculer les $f_{k,l}$ pour que les ondelettes se fassent *automatiquement*.

L'adaptation aux contours se fait donc sans douleur.

On ne considère ici que des régions ayant des *coins* à angle droit. Avec ce que l'on a fait précédemment, on peut traiter les bords du type $x =$ constante ou $y =$ constante il ne reste donc qu'à calculer les filtres dans le *coin*. Il faut poser l'hypothèse que la distance entre ces *coins* est suffisante pour que l'on puisse vraiment les séparer. Cette distance, en nombre de nœuds le long du contour, dépend du degré du schéma choisi. Pour un schéma du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré cette distance est de $2N-1$ nœuds comme on pourrait le vérifier directement.

Deux cas se présentent : un coin convexe ou un coin concave. Un coin convexe a un angle intérieur de 90° alors qu'un coin concave a un angle intérieur de 270°. Dans les deux cas, on peut prolonger les valeurs à interpoler $y_{j,k,l}$ à tout le plan par des polynômes du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré (du troisième degré), mais seulement dans le cas convexe, on a vraiment un choix naturel puisque l'on peut alors faire un lien avec le cas séparable (produit cartésien).

> **Remarque 13** Encore une fois, sauf dans le cas séparable, on ne peut montrer la régularité des fonctions interpolantes sur le contour de la région.

COIN CONVEXE Soit un ensemble de valeurs à interpoler $\{y_{j,k,l}\}_{k\geq 0, l\geq 0}$. En utilisant des polynômes du troisième degré (ou du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré), on peut prolonger ces valeurs pour ($k<0$ et $l\geq 0$) ou ($k\geq 0$ et $l<0$). Il ne reste plus qu'à considérer la région ($k<0$ et $l<0$). On veut que le prolongement soit tel que dans le cas séparable, on retrouve le produit cartésien du schéma introduit dans [19]. Il faut donc que tous les monômes de la forme $x^m y^n$ où $m, n \leq 3$ soient préservés. On obtient ceci en trouvant P, l'unique polynôme de la forme $\sum_{m,n\leq 3} a_{m,n} x^m y^n$ interpolant les valeurs $\{y_{j,k,l}\}_{0\leq k,l\leq 3}$ aux points $\{x_{j,k,l}\}_{0\leq k,l\leq 3}$. À l'aide de ce polynôme, on prolonge $\{y_{j,k,l}\}$ en posant $y_{j,k,l} = P(x_{j,k,l})$ pour ($k<0$ et $l<0$).

Remarque 14 Ce schéma préserve les polynômes du troisième degré, et dans le cas séparable, les monômes de la forme $x^m y^n$ où $m, n \leq 3$.

Dans le cas du troisième degré, il n'y a que deux filtres intermédiaires à calculer (par symétrie). On a les relations :

$$\begin{aligned} y_{j,1,1} = {} & (e + 8f + 16g)\, y_{j-1,0,0} + (e - 2f - 24g)\big(y_{j-1,1,0} + y_{j-1,0,1}\big) \\ & + (5f + 20g)\big(y_{j-1,2,0} + y_{j-1,0,2}\big) - (f + 4g)\big(y_{j-1,3,0} + y_{j-1,0,3}\big) \\ & + (e - 12f + 36g)\, y_{j-1,1,1} + (5f - 30g)\big(y_{j-1,2,1} + y_{j-1,1,2}\big) \\ & + 25g\, y_{j-1,2,2} + (6g - f)\big(y_{j-1,3,1} + y_{j-1,1,3}\big) \\ & - 5g\big(y_{j-1,3,2} + y_{j-1,2,3}\big) + g\, y_{j-1,3,3} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j,1,0} = {} & (a + 4b + 16c + 4d)\, y_{j-1,0,0} + (a - 6b - 24c + 4d)\, y_{j-1,1,0} \\ & - (20c + 5d)\, y_{j-1,0,1} + (5b + 20c)\, y_{j-1,2,0} - (b + 4c)\, y_{j-1,3,0} \\ & + (30c - 5d)\, y_{j-1,1,1} + (16c + 4d)\, y_{j-1,0,2} - (4c + d)\, y_{j-1,0,3} \\ & + (4d - 24c)\, y_{j-1,1,2} + (6c - d)\, y_{j-1,1,3} \\ & - 25c\, y_{j-1,2,1} + 20c\, y_{j-1,2,2} - 5c\, y_{j-1,2,3} \\ & + 5c\, y_{j-1,3,1} - 4c\, y_{j-1,3,2} + c\, y_{j-1,3,3}. \end{aligned}$$

Dans le cas linéaire, il n'y a pas de nouveaux filtres à calculer.

Proposition 17 *Dans le cas séparable préservant les polynômes du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré, on retrouve le produit cartésien d'un schéma de l'interpolation mixte sur la droite [19]. On montre ainsi que dans le cas séparable, le schéma conserve la régularité du schéma de Lagrange du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré partout dans la région. Cela explique d'ailleurs les choix que l'on a faits.*

Preuve. Il existe un schéma de support minimal unique préservant les monômes de la forme $x^m y^n$ tels que $m, n \leq 2N-1$ sur une région rectangulaire. Pour le montrer, il suffit de vérifier que l'on peut utiliser cette seule propriété pour calculer les polynômes intermédiaires. Comme le produit cartésien de l'interpolation mixte préserve les monômes $x^m y^n$ tels que $m, n \leq 2N-1$ tout comme d'ailleurs cette adaptation (dans le cas séparable), il s'agit du même schéma. ∎

Exemple 12 On donne les filtres d'ondelettes et de fonctions d'échelle pour le cas linéaire au coin. La fonction d'échelle primaire correspondra au filtre normal tronqué (dans le cas du troisième

degré ce n'est plus le cas) :

$$\phi_{j,0,0} = F_{j,0,0} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Les filtres des ondelettes duales ne sont toujours pas affectés par les bords. Les filtres des ondelettes primaires sont

$$\psi^{(1)}_{j,0,0} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{32} & \frac{-1}{64} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{16} & \frac{15}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \end{bmatrix},$$

$$\psi^{(2)}_{j,0,0} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{16} \end{bmatrix},$$

$$\psi^{(3)}_{j,0,0} \to \begin{bmatrix} \frac{-1}{16} & -\frac{1}{32} \\ \frac{-1}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ \frac{-1}{8} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

Le filtre de la fonction d'échelle duale est

$$\widetilde{\phi}_{j,0,0} \to \begin{bmatrix} -\frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{55}{64} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{64} \end{bmatrix}.$$

RÉGULARITÉ Il est important d'insister sur le fait que ces problèmes de régularité n'apparaissent que sur le contour avec la multirésolution primaire.

Proposition 18 *Soit Ω^0 l'intérieur de la région choisie Ω ; on peut imposer $\phi_{j,k,l} \in C^R(\Omega^0)$ et donc $\psi^{(\kappa)}_{j,k,l} \in C^R(\Omega^0)$ pour $R \in \mathbf{N}$ aussi grand que l'on veut.*

Preuve. Seule la régularité du schéma d'interpolation est en cause. On sait qu'il existe des schémas sur la droite qui préservent les polynômes du $(2N-1)^{\text{e}}$ degré, dont la fonction-poids admet pour support $[-N+1/2, N-1/2]$ tels que pour N suffisamment grand, ils appartiennent à $C^R(\mathbf{R})$ (schémas

itératifs de Lagrange [6]). Le support des fonctions correspondantes est $[1-2N, 2N-1]$. Le produit cartésien d'un tel schéma est admissible (voir remarque 6). On retient un schéma séparable appartenant à $C^R(\mathbf{R})$. Soit $\{y_{m,n}\}$ les valeurs à interpoler et $\{y_{j,m,n}\}$ le résultat après j itérations. Pour N fixé, $F_{j,m,n}$ appartiendra à $C^R(\mathbf{R})$ si son support est contenu dans Ω^0. En fait, on a, comme on peut le vérifier,

$$F_{j,m,n}(\mathbf{x}) = F\left(2^j x - m\right) F\left(2^j y - n\right)$$

où F est la fondamentale du schéma itératif de Lagrange. Puisque la fonction interpolante est de la forme

$$y_j(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} y_{j,m,n} F_{j,m,n}(\mathbf{x})$$

et que pour $\epsilon > 0$, il existe j suffisamment grand pour que

$$\text{support}(F_{j,m,n}) \subset \mathbf{x}_{j,m,n} + [-\epsilon, \epsilon]^2 \quad \forall m, n.$$

En autant que $\text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial\Omega) > \epsilon$, on a que $y \in C^R(\mathbf{x}_0)$. On conclut que $y \in C^R(\Omega^0)$ en laissant $\epsilon \to 0$. ■

4.3 Traitement de l'image

La prise en compte correcte des bords (en utilisant les ondelettes duales comme filtre d'analyse) et la non-séparabilité du schéma pourraient donner un traitement efficace de l'image. On a utilisé le cas linéaire (ondelettes ayant 2 moments nuls) décrit plus haut pour manipuler des images.

En informatique, on peut représenter une image en teintes de gris comme une matrice de nombres entiers. Si l'on y applique ces filtres (voir figure 4.3), on peut représenter les coefficients obtenus sous formes d'images. Mathématiquement, on part de la matrice de l'image $\iota_{k,l}$ et on la représente comme un élément de V_0 par la somme

$$\iota(\mathbf{x}) = \sum_{k,l} \iota_{k,l}\, \phi_{0,k,l}(\mathbf{x}).$$

Notons $\iota_0(\mathbf{x}) = \iota(\mathbf{x})$ et

$$\iota_{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{k,l} p_{-1,k,l}\, \phi_{-1,k,l}(\mathbf{x})$$

où

$$p_{-1,k,l} = \left\langle \iota, \widetilde{\phi}_{-1,k,l} \right\rangle.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\iota(\mathbf{x}) &= \iota_{-1}(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{3} \sum_{k,l} q^{(r)}_{-1,k,l}\, \psi^{(r)}_{-1,k,l}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{k,l} p_{-2,k,l}\, \phi_{-2,k,l}(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{3} \sum_{k,l} q^{(r)}_{-2,k,l}\, \psi^{(r)}_{-2,k,l}(\mathbf{x}) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{3} \sum_{k,l} q^{(r)}_{-1,k,l}\, \psi^{(r)}_{-1,k,l}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

où

$$p_{-2,k,l} = \left\langle \iota_{-1}, \widetilde{\phi}_{-2,k,l} \right\rangle,$$
$$q^{(r)}_{j,k,l} = \left\langle \iota, \widetilde{\psi}^{(r)}_{j,k,l} \right\rangle.$$

Insistons sur le fait qu'aucune intégration numérique n'est nécessaire, et que les produits scalaires se réduisent à des sommes finies.

Lors de la synthèse, en ne retenant que les coefficients d'ondelettes les plus *significatifs*, on obtient un schéma de compression [5]. En pratique, on a essayé d'éliminer tous les coefficients d'ondelettes à l'intérieur d'un écart-type. De plus, on a itéré l'analyse sur deux échelles pour un taux de compression de 30 % (voir figures 4.4 et 4.5). Soit $\epsilon^{(r)}_j$ l'écart-type de l'ensemble $\left\{ q^{(r)}_{j,k,l} \right\}_{k,l}$ et soit

$$\varepsilon^{(r)}_j(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } |x| > \epsilon^{(r)}_j \\ 0 \text{ autrement} \end{array} \right\},$$

alors on calcule

$$\iota^c(\mathbf{x}) = \sum_{k,l} p_{-2,k,l}\, \phi_{-2,k,l}(\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{3} \sum_{k,l} \varepsilon^{(r)}_{-2}\left(q^{(r)}_{-2,k,l}\right) \psi^{(r)}_{-2,k,l}(\mathbf{x})$$
$$+ \sum_{r=1}^{3} \sum_{k,l} \varepsilon^{(r)}_{-1}\left(q^{(r)}_{-1,k,l}\right) \psi^{(r)}_{-1,k,l}(\mathbf{x})$$

Les coefficients $\iota^c_{k,l}$ forment l'image compressée sur deux échelles.

La figure 4.3 illustre la décomposition d'une image (photo du mathématicien Lebesgue) selon les coefficients d'ondelettes et les coefficients des fonctions d'échelle. On peut *additionner* les quatre images du bas pour reconstruire exactement l'image originale.

La figure 4.4 est une photographie du mathématicien Fourier et la figure 4.5 est le résultat du schéma de compression.

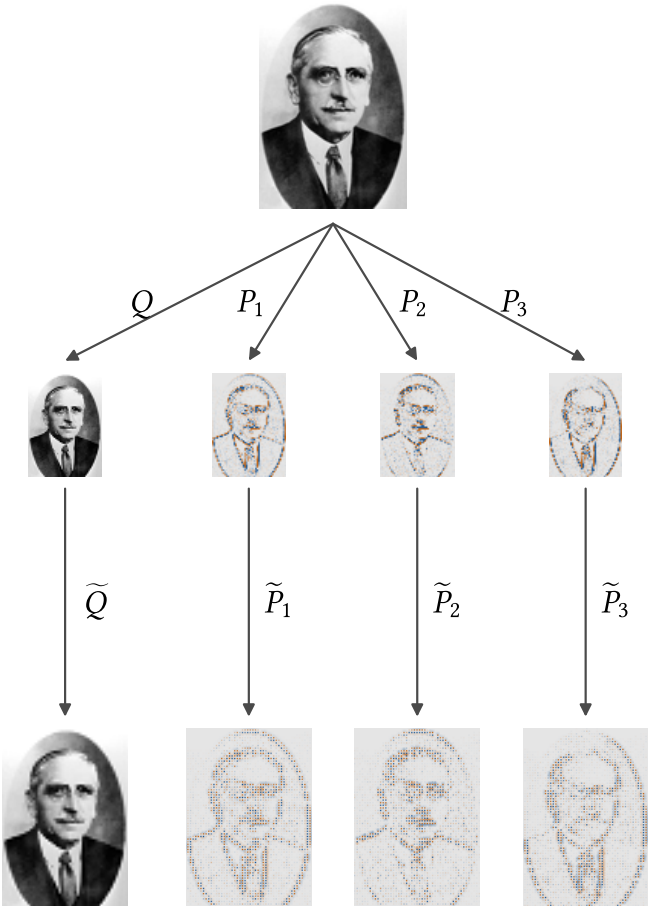


FIGURE 4.3 – Illustration d'une décomposition par ondelettes



Figure 4.4 – Image à traiter



Figure 4.5 – Image compressée

4.4 Conclusion

On a généralisé la construction d'ondelettes dans le plan à la subdivision hexagonale régulière (voir [3] et [7]), mais la rotation effectuée par la transformation linéaire T utilisée pour définir la multirésolution requiert l'utilisation alternée de deux types de filtres aux bords. Pour cette raison, cette approche est à son meilleur dans le cas rectangulaire.

Ce schéma de compression d'image a été présenté pour illustrer la multirésolution. On voit avec intérêt que la diffusion visuelle de la compression obtenue par les ondelettes non séparables élimine presque tout le treillissage habituel (*blocking* en anglais).

L'utilisation de filtres interpolants est certainement une approche intéressante pour le traitement des bords comme l'on a pu le voir : aucune analyse numérique ne fut nécessaire. En combinant les propriétés des ondelettes primaires et duales, on arrive de plus à obtenir les propriétés nécessaires pour la plupart des applications.

Conclusion

Alors que la recherche en théorie des ondelettes s'oriente vers les *multiondelettes*[1] et les subdivisions irrégulières, les filtres interpolants joueront un rôle de plus en plus important. D'une part, ils permettent certaines simplifications mathématiques, par la simplicité évidente des équations utilisées. Ensuite, les filtres interpolants mènent souvent à des algorithmes plus rapides (*algorithmes à trous*). Ce second avantage est moins important avec les ordinateurs modernes, mais la recherche de la simplicité mathématique est toujours importante.

Les résultats présentés ici servent de base à des travaux qui rendront les ondelettes encore plus utiles aux ingénieurs et aux scientifiques. En effet, comme on rend les ondelettes accessibles à la totalité de la communauté scientifique (à l'image de la théorie de Fourier), on doit chercher constamment à améliorer la présentation de la théorie. La dérivation originale des ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau (voir [2]) est assez pénible et nécessite une bonne formation mathématique. La dérivation présentée ici, en plus d'être plus générale que la version originale [2] (parce qu'en base b), est plus concrète et donc plus facile à assimiler par les scientifiques en général. Ensuite, l'adaptation des ondelettes pour le traitement des bords, alors que simple en principe, devient assez lourde pour que la plupart des logiciels commerciaux l'omettent. En effet, le calcul des filtres de bord numériquement, est une incitation à laisser de côté cette amélioration. L'approche de cette thèse propose une solution plus facile à vendre aux informaticiens (notons en passant que ce fait n'est pas sans importance puisque les ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau sont très populaires). Finalement, la construction d'ondelettes non séparables dans le plan n'est pas courante dans la littérature. Ces ondelettes sont pourtant importantes, notamment dans le traitement d'images. La complexité du problème et le manque d'outils mathématiques poussent les chercheurs à se contenter du produit cartésien. Comme on l'a montré, en utilisant des filtres interpolants, on arrive à des dérivations qui ne sont guère plus compliquées que celles obtenues par le produit cartésien. On observe de plus que le traitement des bords avec des filtres interpolants, même dans le plan, est plus facile.

Notons que l'utilisation de filtres b-adiques est un sujet de recherche fort excitant en soi. L'ensemble des chercheurs en théorie des ondelettes privilégient les ondelettes en base 2. Ce choix est certainement raisonnable, mais l'argument selon lequel ce choix s'impose parce que les ordinateurs fonctionnent en mode binaire paraît assez faible. Par exemple, l'utilisation de la base 2^n pour n entier permet aussi de prendre avantage du codage binaire. On considère qu'il est fort possible que les ondelettes biorthogonales de Cohen–Daubechies–Feauveau, telles que présentées ici, soient performantes pour b différent de 2 dans certaines applications. On pense notamment à l'étude de certaines courbes fractales (en base b) ou de certains systèmes chaotiques.

Alors que cette thèse repose sur des outils mathématiques bien connus, elle pose un regard nouveau sur la théorie des ondelettes. On pense que l'interpolation itérative jouera un rôle croissant dans la théorie des ondelettes et on a fourni ici quelques arguments dans ce sens.

1. *Les multiondelettes utilisent plus d'une fonction d'échelle alors que les ondelettes en utilisent une seule.*

Bibliographie

[1] A. Cohen et I. Daubechies, *Non-separable bidimensional wavelet bases*, Revista Matemática Iberoamericana **9** no 1 (1993), 51–137.

[2] A. Cohen, I. Daubechies et J.-C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure and Appl. Math. **45** (1992), 485–560.

[3] A. Cohen et J.-M. Schlenker, *Compactly supported bidimensional wavelet bases with hexagonal symmetry*, Constr. Approx. **9** (1993), 209–236.

[4] W. Dahmen, A. Kunoth et K. Urban, *Biorthogonal spline-wavelets on the interval — stability and moment conditions*, WIAS-Preprint no 265 (1996).

[5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Conference Series in Applied Mathematics **61** SIAM (1992).

[6] G. Deslauriers et S. Dubuc, *Symmetric iterative interpolation processes*, Constructive Approximation **5** (1989), 49–68.

[7] G. Deslauriers, J. Dubois et S. Dubuc, *Multidimensional Iterative Interpolation*, Can. J. Math. **43** no 2 (1991), 297–312.

[8] G. Deslauriers, S. Dubuc et D. Lemire, *Une famille d'ondelettes biorthogonales sur l'intervalle obtenue par un schéma d'interpolation itérative*, Ann. des Sci. Math. Québec, à paraître.

[9] G. Deslauriers, S. Dubuc et D. Lemire, *Dérivées de l'interpolation itérative de Lagrange et les ondelettes b-adiques de Cohen–Daubechies–Feauveau*, rapport technique EPM/RT-97/28, Département de mathématiques appliquées et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal (1997).

[10] D.L. Donoho, *Smooth wavelet decompositions with blocky coefficient kernels*, Recent Advances in Wavelet Analysis, Larry L. Schumaker and Glenn Webb (ed.), Academic Press (1993).

[11] B. Han et R.-Q. Jia, *Optimal Interpolatory Subdivision Schemes in Multidimensional Spaces*, prépublication (1997).

[12] P. N. Heller, *Lagrange M-th band filters and the construction of smooth M-band wavelets*, Proc. IEEE-SP Intl. Symp. on Time-Frequency and Time-Scale Analysis (1994), 108–111.

[13] P. N. Heller, *Rank M wavelets with N vanishing moments*, SIAM J. Math. Analysis **16** (1995).

[14] H. Ji et Z. Shen, *Compactly supported (bi)orthogonal wavelets generated by interpolatory refinable functions*, prépublication (1997).

[15] P. G. Lemarié-Rieusset, *Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle*, Revista Matemática iberoamericana **8** no 2 (1992).

[16] J.-M. Lina, *Complex daubechies wavelets : filters design and applications.* CRM-2449, ISAAC Conference, Univ. of Delaware (1997).

[17] Y. Meyer, *Ondelettes sur l'intervalle*, Revista Matemática Iberoamericana **7** no 2 (1991), 115–133.

[18] J.-P. Mongeau, *Propriétés de l'interpolation itérative*, thèse de doctorat, Université de Montréal et École Polytechnique de Montréal (1990).

[19] J.-P. Mongeau, S. Dubuc et G. Deslauriers, *Interpolation itérative et compression de données*, rapport technique, Département de mathématiques appliquées, École Polytechnique de Montréal (1990).

[20] J.-P. Mongeau, G. Deslauriers et S. Dubuc, *Continuous and differentiable multidimensional iterative interpolation*, Linear Algebra and its Applications **180** (1993), 95–120.

[21] N. Saito et G. Beylkin, *Multiresolution representations using the autocorrelation functions of compactly supported wavelets*, IEEE Transactions of Signal Processing **41** no 2 (1993), 3584–3589.

[22] M.J. Shensa, *The discrete wavelet transform : wedding the à trous and Mallat algorithms*, IEEE Trans. Signal Processing **40** (1992), 2464–2482.

[23] W. Sweldens, *The lifting scheme : a custom-design construction of biorthogonal wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal **3** no 2 (1996), 186–220.

[24] W. Sweldens, *The lifting scheme : a construction of second generation wavelets*, SIAM J. Math. Analysis, à paraître.