L-Matrices as Operators from ℓ^p to ℓ^q

Ludovick Bouthat

Université Laval

June 1st, 2026

Les matrices infinies

- Tout opérateur linéaire borné $A : \ell^2 \to \ell^2$ admet une représentation *unique* comme matrice infinie

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

où $\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$.

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A, représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A, représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?

- Si oui, quelle est la valeur de sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\ell^2 \to \ell^2} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \ ?$$

Quelques questions

• Étant donné une matrice infinie A, représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?

• Si oui, quelle est la valeur de sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\ell^2\to\ell^2} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \ ?$$

• Si la valeur de $\|A\|_{\ell^2\to\ell^2}$ est inconnue, peut-on trouver des bornes supérieures ?

Exemple : La matrice de Hilbert

Définition

La matrice de Hilbert est la matrice

$$H := \left[\frac{1}{i+j+1}\right]_{i,j\geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Exemple : La matrice de Hilbert

Définition

La matrice de Hilbert est la matrice

$$H := \left[\frac{1}{i+j+1}\right]_{i,j\geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- H est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|H\|_{\ell^2\to\ell^2} = \pi$.

Exemple : La matrice de Cesàro

Définition

La matrice de Cesàro C est la matrice

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Exemple : La matrice de Cesàro

Définition

La matrice de Cesàro C est la matrice

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- C est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|C\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 2$.

Les L-matrices

Définition

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Une L-matrice est une matrice infinie de la forme

$$L_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Les L-matrices

Définition

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Une L-matrice est une matrice infinie de la forme

$$L_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Question : Sous quelles conditions la matrice L_α agit comme un opérateur borné sur ℓ^2, et quelle est sa norme ?

Origine des L-matrices

V. Companion. A loyal companion of the Hilbert matrix is the matrix

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad \text{or } L_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

whose entries run in a reversed-L-shaped pattern.

Choi, M. D. (1983). Tricks or treats with the Hilbert matrix. *The American Mathematical Monthly*, 90(5), 301-312.

Motivation

Espaces de Dirichlet pondérés

Definition

Soient ω une fonction positive superharmonique sur $\mathbb{D}$ et $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. On définit

$$\mathcal{D}_\omega(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, \omega(z)\, \mathrm{d}A(z),$$

où $\mathrm{d}A$ est la mesure d'aire normalisée sur $\mathbb{D}$. L'*espace de Dirichlet pondéré* $\mathcal{D}_\omega$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ telles que $\mathcal{D}_\omega(f) < \infty$.

Example

Les poids $\omega(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, où $0 \leq \alpha \leq 1$ interpolent entre l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ (quand $\alpha = 0$) et l'espace de Hardy H^2 (quand $\alpha = 1$).

Motivation

Multiplicateur d'Hadamard

Définition

Soient $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *et* $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *deux séries formelles. Leur* produit d'Hadamard *est définie par*

$$(f * g)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k.$$

Les multiplicateurs d'Hadamard *de* $\mathcal{D}_\omega$ *sont les séries formelles* h *pour lesquelles* $h * f \in \mathcal{D}_\omega$ *pour tout* $f \in \mathcal{D}_\omega$.

Motivation

Caractérisation des multiplicateurs d'Hadamard sur $\mathcal{D}_\omega$

Théorème (Mashreghi–Ransford, 2019)

$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ est un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$ pour toute fonction superharmonique ω si et seulement si la L-matrice

$$L_{(c_{n+1}-c_n)_n} := \begin{pmatrix} c_1 - c_0 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_2 - c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_3 - c_2 & c_3 - c_2 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

agit comme un opérateur borné sur ℓ^2.

Une condition nécessaire

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\|L_\alpha\|^2_{\ell^2\to\ell^2} &\geq \frac{\|L_\alpha e_n\|_2^2}{\|e_n\|_2^2} \\
&= (n+1)|\alpha_n|^2 + |\alpha_{n+1}|^2 + |\alpha_{n+2}|^2 + \cdots \\
&\geq n|\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Une condition nécessaire

Remarquons que

$$\begin{aligned}\|L_\alpha\|^2_{\ell^2\to\ell^2} &\geq \frac{\|L_\alpha e_n\|_2^2}{\|e_n\|_2^2}\\ &= (n+1)|\alpha_n|^2 + |\alpha_{n+1}|^2 + |\alpha_{n+2}|^2 + \cdots\\ &\geq n|\alpha_n|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, pour que $\|L_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} < \infty$, il est nécessaire que

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

L'insuffisance de la condition

Soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et considérons la L-matrice L_α où

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Alors $\|L_\alpha\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \infty$ et L_α n'est pas un opérateur borné sur ℓ^2.

Il suffit de considérer la suite de vecteurs

$$x_n = (1^\alpha, 2^\alpha, \ldots, n^\alpha, 0, 0, \ldots)^{tr}$$

lorsque $n \to \infty$.

L'optimalité de la condition

Considérons la L-matrice L_α où

$$\alpha_n = \begin{cases} 1/n^\alpha & \text{si} \quad n = 2^k,\ k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où $\alpha > 1/2$.

L'optimalité de la condition

Considérons la L-matrice L_α où

$$\alpha_n = \begin{cases} 1/n^\alpha & \text{si} \quad n = 2^k,\ k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où $\alpha > 1/2$. Alors

$$\|L_\alpha\|^2_{\ell^2 \to \ell^2} \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2 \cdot 2^k + 1)\alpha_{2^k}^2 \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(2\alpha - 1)k}} < \infty.$$

Une condition suffisante

Un cas particulier

Théorème (B–Mashreghi, 2021)

Soit L_α une L-matrice telle que $(|\alpha_n|)_{n\geq 0}$ est une suite strictement décroissante. Si

$$\Delta := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\alpha_n|\big(|\alpha_{n-1}| + |\alpha_n|\big)}{|\alpha_{n-1}| - |\alpha_n|} < \infty,$$

alors L_α est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|L_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} \leq 2\max\{|\alpha_0|, \Delta\}$.

Une condition suffisante

Le cas général

Théorème (B–Mashreghi, 2021)

Soient L_α une L-matrice et $(\delta_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre positifs strictement décroissants. Si

$$\Delta := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{(|\alpha_n| + \delta_{n-1})(|\alpha_n| + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n} < \infty,$$

alors L_α est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|L_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} \leq \max\{|\alpha_0| + \delta_0, \Delta\}$.

Caractérisation complète de $O(n^{-\alpha})$

Considérons la L-matrice L_α, où $\alpha_n = O(1/n)$. Alors $\|L_\alpha\|_{\ell^2 \to \ell^2} < \infty$.

Caractérisation complète de $O(n^{-\alpha})$

Considérons la L-matrice L_α, où $\alpha_n = O(1/n)$. Alors $\|L_\alpha\|_{\ell^2 \to \ell^2} < \infty$.

Corollaire (B–Mashreghi, 2021)

Soit L_α une L-matrice. La condition $\alpha_n = O(1/n^\alpha)$ est

- *nécessaire si $\alpha = \frac{1}{2}$;*
- *ni nécessaire, ni suffisante si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$;*
- *suffisante si $\alpha = 1$;*

pour que L_α soit un opérateur borné sur ℓ^2.

[Submitted on 27 Mar 2025 (v1), last revised 28 Aug 2025 (this version, v3)]

Boundedness, compactness and Schatten class for Rhaly matrices

Carlo Bellavita, Eugenio Dellepiane, Georgios Stylogiannis

> In this article we present new proofs for the boundedness and the compactness on ℓ^2 of the Rhaly matrices, also known as terraced matrices. We completely characterize when such matrices belong to the Schatten class $\mathcal{S}^q(\ell^2)$, for $1 < q < \infty$. Finally, we apply our results to study the Hadamard multipliers in weighted Dirichlet spaces, answering a question left open by Mashreghi-Ransford.

Les matrices de Rhaly

Définition

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ *une suite de nombres complexes. Une matrice de Rhaly est une matrice infinie de la forme*

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Les matrices de Rhaly

Définition

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Une matrice de Rhaly est une matrice infinie de la forme

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Observation : $L_\alpha \approx R_\alpha + R_\alpha^*$.

Une caractérisation complète pour $\ell^2 \to \ell^2$

Théorème (B–Dellepiane–Mashreghi, 2026+)

Les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\|L_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} < \infty$;

(ii) $\|R_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} < \infty$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k|^2 = O(n^{-1})$.

De plus, on a

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\|R_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|L_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2} \le 2\|R_\alpha\|_{\ell^2\to\ell^2}.$$

Un résultat général pour R_α

Théorème (Bennett, 1991)

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ *et posons* $p^* = \frac{p}{p-1}$, $q^* = \frac{q}{q-1}$ *et* r *le nombre satisfaisant* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Alors* R_α *est borné de* ℓ^p *vers* ℓ^q *si et seulement si*

(i) $\alpha_n = O\left(n^{-1/p^*}\right) \qquad (1 < p \leq \infty,\ q = \infty)$;

(ii) $\alpha \in \ell^q \qquad (1 = p \leq q \leq \infty)$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k|^q = O\left(n^{-q/p^*}\right) \qquad (1 < p \leq q < \infty)$;

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{r/p^*} |\alpha_k|^q \left(\sum_{m=k}^{\infty} |\alpha_m|^q\right)^{-r/p} < \infty \qquad (1 < q < p \leq \infty)$.

Un équivalent pour L_α

Théorème (B–Dellepiane–Mashreghi, 2026+)

Soient $1 < p \leq q < \infty$. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty$;

(ii) $\|R_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty$ *et* $\|R_\alpha\|_{\ell^{q^*} \to \ell^{p^*}} < \infty$;

(iii) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k|^q = O\big(n^{-q/p^*}\big)$ *et* $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha_k|^{p^*} = O\big(n^{-p^*/q}\big)$.

De plus, on a alors

$$\frac{\|R_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} + \|R_\alpha\|_{\ell^{q^*} \to \ell^{p^*}}}{p^* q^{\frac{1}{q}} + q(p^*)^{\frac{1}{p^*}}} \leq \|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} \leq \|R_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} + \|R_\alpha\|_{\ell^{q^*} \to \ell^{p^*}}.$$

Corollaires intéressants

Corollaire (B–Dellepiane–Mashreghi, 2026+)

Soit $1 \leq q < \infty$. *Alors* $\|L_\alpha\|_{\ell^1 \to \ell^q} < \infty$ *si et seulement si* $\alpha \in \ell^q$ *et* $\alpha_n = O\big(n^{-1/q}\big)$.

Corollaires intéressants

Corollaire (B–Dellepiane–Mashreghi, 2026+)

Soit $1 \leq q < \infty$. Alors $\|L_\alpha\|_{\ell^1 \to \ell^q} < \infty$ si et seulement si $\alpha \in \ell^q$ et $\alpha_n = O\big(n^{-1/q}\big)$.

Corollaire (B–Dellepiane–Mashreghi, 2026+)

Soient $1 < p \leq q < \infty$. Si $|\alpha_n|$ est décroissant, alors les énoncés suivants sont équivalents:

(i) $\|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty$;

(ii) $\|R_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty$;

(iii) $\alpha_n = O\left(n^{-\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}\right)$.

Une remarque intéressante

- Si $1 < p \leq q < \infty$ et $|\alpha_n|$ est décroissant, alors

$$\|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty \iff \alpha_n = O\left(n^{-\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}\right)$$

Une remarque intéressante

- Si $1 < p \leq q < \infty$ et $|\alpha_n|$ est décroissant, alors

$$\begin{aligned} \|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty \quad &\iff \quad \alpha_n = O\left(n^{-\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}\right) \\ &\implies \quad \alpha_n = O\left(n^{-\frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2^*}}\right) \\ &\iff \quad \|L_\alpha\|_{\ell^{p_2} \to \ell^{q_2}} < \infty \end{aligned}$$

si $\frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_2^*} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p^*}$.

Une remarque intéressante

- Si $1 < p \leq q < \infty$ et $|\alpha_n|$ est décroissant, alors

$$\begin{aligned} \|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty \quad & \iff \quad \alpha_n = O\left(n^{-\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}\right) \\ & \implies \quad \alpha_n = O\left(n^{-\frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2^*}}\right) \\ & \iff \quad \|L_\alpha\|_{\ell^{p_2} \to \ell^{q_2}} < \infty \end{aligned}$$

si $\frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_2^*} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p^*}$.

Question : L'implication est-elle vraie même si $|\alpha_n|$ n'est pas décroissant ?

Une implication générale

Théorème (B–Dellepiane–Mashreghi, 2026+)

Soient $1 < p \leq q < \infty$. *Alors*

$$\|L_\alpha\|_{\ell^p \to \ell^q} < \infty \iff \|L_\alpha\|_{\ell^{p_2} \to \ell^{q_2}} < \infty$$

pour tout $1 < p_2 \leq q_2 < \infty$ *si et seulement si*

$$\frac{1}{q_2} + \frac{1}{p_2^*} + \max\left\{\left|\frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2^*}\right| - \left|\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right|, 0\right\} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p^*}.$$

La L-matrice de Hilbert

Définition

Soit $s \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. La L-matrice de Hilbert est la matrice

$$L_s := \left[\frac{1}{\max\{i,j\} + s}\right]_{i,j \geq 0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{1+s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La L-matrice de Hilbert

Définition

Soit $s \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. La L-matrice de Hilbert est la matrice

$$L_s := \left[\frac{1}{\max\{i,j\}+s}\right]_{i,j\geq 0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{1+s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Remarque

$L_1 = CC^* \approx C + C^*$.

La norme de la L-matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. *Alors* $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 4$.

La norme de la L-matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 4$.

- $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} \geq \|L_s e_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}$.

La norme de la L-matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 4$.

• $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} \geq \|L_s e_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}$.

Question : Quelle est la valeur de $s_0 := \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 4\}$?

La norme de la L-matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B–Mashreghi, 2022)

Soit $s_0 = \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 4\}$. *Alors*

$$0.347 \approx \frac{\sqrt{48 + 18\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 3}{12} \leqslant s_0 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.353.$$

Une observation importante

Théorème (Štampach, 2021)

Soit α une suite de nombres réels tels que $\alpha_{n+1} \neq \alpha_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors l'inverse formel de la L-matrice L_α est la matrice de Jacobi

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & -b_0 & & & & \\ -b_0 & b_0 + b_1 & -b_1 & & & \\ & -b_1 & b_1 + b_2 & -b_2 & & \\ & & -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

où $b_n := (\alpha_n - \alpha_{n+1})^{-1}$.

La valeur exacte de s_0

Soit ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\ b,\ c \\ d,\ e \end{matrix} \,\middle|\, z\right)$ la fonction hypergéometrique généralisée ${}_3F_2$.

Théorème (Štampach, 2021)

Soit $s_0 = \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = 4\}$. Alors s_0 est l'unique racine positive de la fonction

$$s \ \mapsto \ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -1/2,\ 1/2,\ 3/2 \\ 1,\ s+1/2 \end{matrix} \,\middle|\, 1\right).$$

Numériquement, on a $s_0 \approx 0.349086$.

La norme de la L-matrice de Hilbert

(Partie 2)

Théorème (Štampach, 2021)

Si $0 < s < s_0$*, alors* $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \frac{4}{1-4x^2(s)}$*, où* $x(s)$ *est l'unique racine dans l'intervalle* $(0, 1/2)$ *de la fonction*

$$t \;\mapsto\; {}_3F_2\left(\begin{matrix} t-1/2,\ t+1/2,\ t+3/2 \\ 2t+1,\ t+s+1/2 \end{matrix}\,\middle|\, 1\right).$$

La norme de la L-matrice de Hilbert

(Partie 2)

Théorème (Štampach, 2021)

Si $0 < s < s_0$, *alors* $\|L_s\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \frac{4}{1-4x^2(s)}$, *où* $x(s)$ *est l'unique racine dans l'intervalle* $(0, 1/2)$ *de la fonction*

$$t \;\mapsto\; {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} t-1/2,\ t+1/2,\ t+3/2 \\ 2t+1,\ t+s+1/2 \end{matrix}\,\right|\, 1\right).$$

Remarque

Les méthodes de Štampach fonctionnent également pour les s négatifs si $s \notin -\mathbb{N}_0$. Dans ce cas, il a conjecturé qu'il existe au plus deux valeurs propres distinctes de L_s.

Une extension aux espaces ℓ^p

Théorème (B–Mashreghi, 2022)

Si $s \geq 1$ *et* $1 < p < \infty$, *alors* $\|L_s\|_{\ell^p \to \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}$.

Une extension aux espaces ℓ^p

Théorème (B–Mashreghi, 2022)

Si $s \geq 1$ et $1 < p < \infty$, alors $\|L_s\|_{\ell^p \to \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}$.

Question : Quelle est la valeur de $s_0(p) := \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^p \to \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}\}$?

References

- Bennett, G. (1991) Some elementary inequalities. III. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*. 42(166).
- Mashreghi, J., Ransford, T. (2019). Hadamard multipliers on weighted Dirichlet spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 91(6), 1-13.
- Bouthat, L., Mashreghi, J. (2021) The norm of an infinite L-matrix. *Operators and Matrices*. 15(4) : 47-58
- Bouthat, L., Mashreghi, J. (2021) L-Matrices with Lacunary Coefficients. *Operators and Matrices*. 15(65) : 1045-1053
- Bouthat, L., Mashreghi, J. (2022) The critical point and the p-norm of the Hilbert L-matrix. *Linear Algebra and Its Applications*. 634 : 1-14
- Štampach, F. (2022) The Hilbert L-matrix. *Journal of Functional Analysis*. 282(8), 109401.