RONALD LEWIS GRAHAM ET LES OASIS D'ORDRE AU MILIEU DU CHAOS

In all chaos there is a cosmos;
in all disorder, a secret order.

Carl Jung, *The Archetypes and the Collective Unconscious* (1935).

Though this be madness,
yet there is method in 't.

William Shakespeare, *The Tragedy of Hamlet, Prince of Denmark*.

L'univers est construit sur un plan
dont la symétrie profonde
est en quelque sorte présente
dans l'intime structure de notre esprit.

Paul Valéry, *Variété I* (1924).

A mathematician, like… a poet,
is a maker of patterns.

G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (1940).

Au cours d'une carrière qui s'échelonna sur six décennies, Ronald Graham (1935-2020) assuma la présidence de chacune des deux plus importantes associations mathématiques aux États-Unis, soit la American Mathematical Society (1993-1994) et la Mathematical Association of America (2003-2004). Pourtant, il ne correspondit jamais au stéréotype du mathématicien renfermé et gauche en société. Il ne se conforma pas plus, par ailleurs, à celui du gestionnaire fade. Il était au contraire charismatique, affable, coloré et remarquablement athlétique[1].

Né en Californie en 1935, Ronald Graham grandit au milieu des cartons de déménagement et mena une existence nomade, au gré des

1. Trampoliniste adroit, Ronald Graham savait marcher sur les mains et monter un monocycle. Il fut même pour un temps président de la International Jugglers' Association.

affectations d'un père gagnant durement sa vie tantôt comme journalier dans un champ pétrolifère, tantôt dans la marine marchande. À l'âge de 15 ans, avant même d'avoir officiellement terminé ses études secondaires, il obtint une bourse d'études qui lui permit de fréquenter pendant 3 ans l'Université de Chicago. Il n'y suivit cependant aucun cours de mathématiques. Il entama ensuite des études en génie à l'Université de Californie à Berkeley, mais renonça finalement à terminer ce diplôme, préférant s'engager dans la U.S. Air Force. Stationné à Fairbanks en Alaska, Graham décrocha – en parallèle de ses activités professionnelles – un diplôme de premier cycle en physique à l'Université d'Alaska. Il quitta ensuite la U.S. Air Force et retourna à Berkeley pour y faire des études doctorales en théorie des nombres.

En 1962, l'année au cours de laquelle il soutint sa thèse de doctorat, Graham amorça une longue et fructueuse carrière comme responsable des recherches en mathématiques dans le domaine du routage des télécommunications dans un célèbre centre de recherche et de développement implanté dans l'État américain du New Jersey, les Laboratoires Bell. En 1999, 3 ans après avoir été nommé scientifique principal, Graham quitta ceux-ci et rentra dans l'État qui l'avait vu naître afin d'y occuper un poste de professeur en informatique et ingénierie à l'Université de Californie à San Diego.

Avec plus de 350 articles scientifiques à son actif, Ronald Graham est l'un des mathématiciens américains les plus prolifiques de sa génération. Des nombreuses collaborations professionnelles qu'il entretint, deux se distinguent nettement par l'ampleur de leurs retombées. Mentionnons d'abord qu'il co-rédigea une centaine d'articles avec son épouse Fan Chung, une mathématicienne originaire de Taïwan qui, tout comme lui, fit d'abord carrière aux Laboratoires Bell avant d'œuvrer dans le milieu universitaire. L'autre collaboration digne de mention est celle, éminemment prolifique, qu'entretint Graham pendant plusieurs décennies avec l'intarissable (et notoirement excentrique) mathématicien hongrois Paul Erdős (1913-1996), qu'il rencontra par l'intermédiaire de Harold Scott MacDonald Coxeter en 1958 [16, p. 33].

Doté d'un flair sans pareil pour débusquer les problèmes porteurs d'une signification profonde et possédant une connaissance quasi encyclopédique lui permettant d'orienter ses confrères dans les directions nouvelles qui lui semblaient les plus prometteuses, Erdős acquit rapidement une réputation de fin renard *solutionneur* de problèmes. À tout spécialiste des combinatoires, des probabilités, de la théorie des graphes, de la théorie des ensembles ou de la théorie des nombres qui se butait à une difficulté en apparence insurmontable en jonglant avec un problème, on suggérait d'entrer en contact avec Erdős le trancheur de nœuds gordiens.

Au cours des années 1960, Erdős mena une carrière de mathématicien itinérant. Entièrement consacré à ses recherches et vivant dans un grand dénuement, il avait comme seules possessions une petite valise contenant ses documents de voyages et quelques vêtements. En 1971, à la suite du décès de sa mère dont il était très proche et qui depuis quelques années déjà l'accompagnait dans tous ses déplacements, Erdős, qui n'avait alors ni foyer, ni famille, ni emploi, accentua encore le rythme auquel il voyageait et travaillait, allant jusqu'à consommer des amphétamines pour arriver à se concentrer sur ses calculs jusqu'à 18 heures par jour.

En raison de ses nombreux déplacements de par le monde ainsi que de son dévouement absolu aux mathématiques, la liste des personnes avec qui Erdős collabora à la publication d'un article atteignit rapidement des proportions sans précédent. La communauté mathématique comptant en ses rangs autant de nombreux personnages insolites débordant de créativité et à l'humour baroque, il vint à l'idée de l'un d'eux de souligner le caractère particulièrement prolifique de Paul Erdős en créant une fonction aussi saugrenue que comique mesurant la distance de collaboration d'un mathématicien avec Erdős. Cette fonction attribue à toute personne[2] un *nombre d'Erdős* de la façon suivante :

- Par définition, Paul Erdős a 0 pour *nombre d'Erdős* ;
- Toute personne ayant publié un article de recherche cosigné par Erdős a 1 pour nombre d'Erdős ;
- Toute personne n'ayant jamais publié un article de recherche cosigné par Erdős, mais ayant publié un article de recherche cosigné par un chercheur ayant 1 pour nombre d'Erdős a 2 pour nombre d'Erdős, et ainsi de suite par récurrence ;

2. Tel le Monsieur jourdain de Molière, vous, lecteurs, avez un nombre d'Erdős depuis des années sans que vous n'en susse rien !

- Toute personne n'ayant jamais publié un article de recherche ou n'ayant jamais publié un article de recherche avec un coauteur qui est relié à Erdős de la manière décrite ci-dessus a ∞ pour nombre Erdős.

L'origine de cette boutade laudatrice n'est pas clairement établie. Il semble que ce soit le mathématicien John Isbell qui, le premier, a soulevé l'idée d'une fonction mesurant la distance de collaboration d'un mathématicien avec Erdős. La toute première mention écrite ne vint toutefois qu'une douzaine d'années plus tard sous la forme d'une note publiée par Casper Goffman (1913-2006) dans *American Mathematical Monthly* en 1969 [11]. Enfin, une décennie plus tard, Ronald Graham fit paraître – sous le pseudonyme de Tom Odda – une brève analyse des propriétés des graphes de collaboration entre mathématiciens [14]. Le nombre d'Erdős a vite gagné en popularité, si bien que de nos jours, rares sont les mathématiciens (même ceux qui n'entendent pas à rire) n'ayant jamais eu la curiosité de calculer leur nombre d'Erdős à l'aide de l'outil mis à leur disposition par la *American Mathematical Association*[3].

Craignant que le génie hongrois socialement mésadapté soit incapable de faire face, seul, aux nombreux petits défis du quotidien, Ronald Graham prit celui-ci sous son aile. Il lui aménagea une chambre dans sa maison, et ce, malgré la fâcheuse tendance de son hôte à prolonger ses visites bien au-delà de ce que la politesse la plus élémentaire le voudrait. Le Hongrois se révélait être un invité si exigeant et épuisant que Graham aimait à dire, pour faire rigoler ses collègues, qu'il avait « eu la visite d'Erdős pendant un mois au cours de la fin de semaine dernière » [16, p. 33]. Les nombreuses petites attentions que Graham eut pour Erdős jusqu'à son décès subit au cours d'un voyage à Varsovie, en septembre 1996, lui valurent d'être surnommé, avec tendresse et espièglerie, *la mère d'Erdős* par ses collègues aux Bell Laboratories.

Portons maintenant notre attention sur la relation d'amitié qui unit Ronald Graham et Martin Gardner. Celle-ci se développa progressivement et devint plus manifeste dans le dernier tiers de la carrière de vulgarisateur mathématique de Gardner. Le chercheur aux Bell Laboratories est en effet brièvement mentionné dans plus d'une

3. Selon les données colligées par le *Erdős Number Projet*, au moment d'aller sous presse, plus de 265 000 personnes avaient un nombre d'Erdős fini. Le nombre d'Erdős médian serait actuellement de 5. Enfin, le nombre d'Erdős moyen serait autour de 4.65 avec un écart-type de 1.21.

dizaine de chroniques et ses travaux occupent une place prépondérante dans deux textes signés Gardner [3 ; 4 ; 5 ; 7].

La toute dernière chronique *Mathematical Games* qui a été publiée dans les pages de *Scientific American* [4 ; 7], en juin 1986, porte d'ailleurs manifestement la marque de Graham. On y traite en effet d'un problème laissant entrevoir de possibles applications dans le monde des télécommunications.

Considérons un ensemble fini de points du plan cartésien. Il existe de nombreux contextes pratiques dans lesquels il paraît souhaitable de déterminer de quelle manière ces points peuvent être reliés par un réseau de segments de droites dont la longueur totale est la plus courte possible. La solution à ce problème, c'est-à-dire le réseau le plus court qui connecte tous ces points, est donnée par ce qu'on appelle l'*arbre couvrant minimal*. Il existe plusieurs façons d'obtenir, pour un ensemble de points donné, l'arbre couvrant minimal. L'une de ces façons consiste à appliquer l'*algorithme glouton,* un ensemble de règles opératoires développées par Joseph B. Kruskal, un autre illustre employé des Bell Laboratories.

Notons que, si l'on est autorisé à ajouter de nouveaux points à l'ensemble d'origine, alors il arrive qu'il soit possible de concevoir un réseau connectant tous les points et dont la longueur totale est inférieure à celle de l'arbre couvrant minimal. Il suffit de considérer l'exemple élémentaire suivant pour s'en convaincre : prenons comme ensemble de points les sommets d'un triangle équilatéral de côtés unitaires. La somme des longueurs des arêtes de l'arbre couvrant minimal pour cet ensemble de points est 2. Il est possible d'obtenir un réseau de longueur totale égale à $\sqrt{3} \approx 1.732$ (soit une longueur totale environ 13 % plus courte que celle de l'arbre couvrant minimal) en ajoutant un quatrième point au centre de gravité[4] du triangle équilatéral en considérant l'arbre couvrant minimal de l'ensemble à 4 points ainsi obtenus.

Comme le mathématicien suisse Jacob Steiner (1796-1863) fut l'un des premiers à s'intéresser à ce genre de problème d'optimisation combinatoire [3 ; 5 ; 6 ; 8], il est devenu une pratique courante d'appeler *points de Steiner* les points supplémentaires dont l'ajout permet de

4. Le centre de gravité d'un triangle se situe à l'intersection des segments joignant un sommet au point milieu du côté qui lui est opposé.

MEP_Martin_Gardner_E5.indd 261 2026-03-30 12:55:49

minimiser la longueur totale d'un réseau. Tout arbre comportant un ou des points de Steiner est quant à lui appelé *arbre de Steiner*. Enfin, un arbre de Steiner est dit *minimal* s'il s'agit de la solution optimale au problème consistant à réduire le plus possible la longueur totale du réseau.

Ayant consacré une chronique *Mathematical Games* aux arbres de Steiner minimaux [6 ; 8], Gardner savait pertinemment qu'il n'existait aucun algorithme permettant d'obtenir *efficacement* l'arbre de Steiner minimal d'une configuration générique de points. Mais, se demanda Gardner, existe-t-il un tel algorithme *efficace* dans le cas particulier d'un ensemble de points positionnés à chacun des coins des cases d'un échiquier ? Lorsque l'on sait à quel point les compositeurs de casse-tête numériques et logiques Henry Ernest Dudeney et Sam Loyd exercèrent une influence marquante dans le cheminement intellectuel et professionnel de Martin Gardner [9], et considérant à quel point ces deux géants du monde des mathématiques récréatives aimaient à concevoir des problèmes exploitant d'une manière ou d'une autre les configurations en damier, que Gardner en soit venu à considérer pareille question n'a rien d'étonnant.

Au terme d'un examen étendu de la littérature scientifique, Gardner ne put trouver la moindre indication permettant de croire que cette question avait déjà été résolue, voire soulevée. Maintenant convaincu de son originalité, le vulgarisateur scientifique s'essaya dans un premier temps à la résoudre seul. Se heurtant à des difficultés insoupçonnées, il dut se résoudre à solliciter l'aide de son bon ami Ronald Graham. Pendant plus d'un an, ce dernier s'évertua, avec le concours de son épouse et principale collaboratrice, Fan Chung, à essayer de trouver un angle d'attaque permettant de réaliser une percée majeure. Malgré quelques progrès, la solution demeura toutefois insaisissable.

La pratique des mathématiques est un continuel exercice d'humilité. Les leçons que l'on tire de ses propres échecs, comme de ceux des autres d'ailleurs, peuvent toutefois grandement favoriser l'avancement des connaissances. Voilà pourquoi il est souvent préférable d'ébruiter ses échecs plutôt que de chercher à les dissimuler. « Peu importe, disait Samuel Beckett. Essaie encore. Échoue encore. Échoue mieux. »

Soucieux de ne pas entraver le développement de la science, Gardner, Graham et Chung partagèrent avec l'ensemble de la communauté mathématique le fascinant problème soulevé par Gardner ainsi que leurs modestes progrès. Il convient de souligner que c'est faire preuve d'une grande abnégation que d'abandonner ainsi toute prétention sur un problème intéressant et de le laisser assumer une existence propre. Avec la parution de cet article dans les pages de *The Mathematics Magazine* [2] en 1989, Gardner rejoignit le groupe restreint des quelque 6 500 mathématiciens possédant un nombre d'Erdős de 2[5].

Pour clore ce chapitre, il convient de dire quelques mots au sujet du second principal point de rencontre entre les sphères d'activités de Martin Gardner et de Ronald Graham. En 1980, Graham fit paraître, en collaboration avec ses confrères Bruce Rothschild et Joel Spencer, un ouvrage remarquable intitulé *Ramsey Theory*. Les auteurs y décrivent cette théorie en ces termes : « La philosophie qui sous-tend la théorie [de Ramsey] est que dans tout système suffisamment grand, une certaine régularité doit toujours exister » [12]. La théorie de Ramsey aspire en effet à identifier les conditions faisant en sorte que si on scinde un objet suffisamment grand et régulier en parties, alors l'une de ces parties héritera inévitablement de la régularité dont jouissait originellement l'objet fractionné.

La théorie de Ramsey est en quelque sorte une excroissance ayant surgi, presque à l'insu des mathématiciens, d'un lemme technique à forte saveur combinatoire démontré par le logicien britannique Frank Plumpton Ramsey[6] (1903-1930) dans un article portant sur un problème de logique du premier ordre présenté à la *London Mathematical Society* en 1928 [15]. Ce petit lemme, anodin en apparence, s'avéra avoir une grande variété d'applications que son auteur n'eut toutefois pas l'occasion d'entrevoir puisqu'il fut emporté par une leptospirose le 19 janvier 1930, à quelques jours de son 27e anniversaire [13].

C'est Paul Erdős qui, plus que quiconque, contribua à l'obtention, entre le début des années 1930 et la fin des 1950, d'une masse critique de

5. En vertu de la parution, en 1988, d'un article rédigé en collaboration avec Frank Harary [10] – qui, tout comme Ronald Graham et Fan Chung, avait un nombre d'Erdős de 1 –, Gardner pouvait déjà prétendre avoir un nombre d'Erdös de 2. Cependant la revue *Eureka*, dans laquelle parut cet article, n'est pas indexée par le *American Mathematical Society's Mathematical Reviews*. La connexion Gardner–Harary–Erdős est donc susceptible de ne pas être reconnue par tous comme étant valide, contrairement aux connexions Gardner–Graham–Erdős et Gardner–Chung–Erdős.

6. Ramsey, qui étudia les mathématiques à l'Université de Cambridge, est également connu des économistes pour sa contribution à la théorie de la taxation optimale, pour avoir avancé une nouvelle interprétation du concept de probabilité subjective, ainsi que pour avoir jeté les bases de la théorie de l'optimum de second rang. Il est également connu des logiciens en raison des simplifications qu'il apporta à la théorie ramifiée des types de Russell.

théorèmes provenant de divers champs mathématiques, mais ayant comme dénominateur commun d'avoir été obtenus en exploitant une technique de preuves rappelant en esprit celle employée par Ramsey pour démontrer son lemme. Cette accumulation de *résultats de type Ramsey* suscita une prise de conscience : une nouvelle théorie était en train de naître. Le lemme de Ramsey sert désormais de pierre d'assise à tout un pan des mathématiques qui demeure à ce jour fort actif.

Le problème que voici, qui fut publié dans le numéro juin-juillet 1958 de *The American Mathematical Monthly* [1], est incontestablement le *résultat de type Ramsey* le plus connu :

> ***E1321.*** *Montrez que si l'on prend six personnes au hasard, il y a toujours au moins trois personnes qui se connaissent mutuellement ou au moins trois personnes qui sont étrangères les unes aux autres.*

Martin Gardner consacra sa chronique de novembre 1977 à la théorie de Ramsey [4, 7]. Dans son texte, il attire l'attention du lecteur sur le fait qu'en tentant d'obtenir une borne supérieure pour une certaine quantité intervenant dans un problème en théorie de Ramsey, Ronald Graham obtint comme borne supérieure un entier positif – le nombre de Graham – si énorme qu'il fut inscrit dans le livre Guinness des records de 1980 à titre de plus grand nombre jamais utilisé dans une preuve mathématique sérieuse.

Nous l'avons dit, la philosophie qui sous-tend la théorie de Ramsey est la suivante : le désordre absolu n'existe pas, car dans toute structure désordonnée suffisamment grande on verra inévitablement poindre des oasis d'ordre au milieu du chaos. Vaillant chevalier de l'ordre contre le chaos, Ronald Graham passa une partie importante de sa vie à étudier et à approfondir la théorie de Ramsey. Ses proches rapportent d'ailleurs qu'il était encore attelé à la tâche au soir du 5 juillet 2020, quelques heures avant son décès.

Références

[1] Bostwick, C. W. (1958, juin-juillet). « Elementary Problems and Solutions. Problem E1321 ». *The American Mathematical Monthly, 65* (6), 446-447. [www.jstor.org/stable/2310728]

[2] Chung, F., Gardner, M., et Graham, R. (1989). « Steiner Trees on a Checkerboard ». *The Mathematics Magazine 62* (2), 83-96. [www.jstor.org/stable/2690388]

[3] Gardner, M. (1968, février). « Mathematical Games: Combinatorial problems involving "tree" graphs and forests of trees ». *Scientific American, 218* (2), 118-123. [www.jstor.org/stable/24925976]

[4] Gardner, M. (1977, novembre). « Mathematical Games: In which joining sets of points by lines leads into diverse (and diverting) paths ». *Scientific American, 237* (5), 18-29. [www.jstor.org/stable/24953911]

[5] Gardner, M. (1977). « Trees ». Ch. 17 dans *Mathematical Magic Show*. Knopf.

[6] Gardner, M. (1986, juin). « Mathematical Games: Casting a net on a checkerboard and other puzzles of the forest ». *Scientific American, 254* (6), 16-23. [www.jstor.org/stable/24975967]

[7] Gardner, M. (1989). « Ramsey Theory? ». Ch. 17 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers… And the Return of Dr. Matrix*. W. H. Freeman & Co.

[8] Gardner, M. (1997). « Minimal Steiner Tree ». Ch. 22 dans *The Last Recreations: Hydras, Eggs, and other Mathematical Mystifications*. Copernicus Books/Springer-Verlag New York.

[9] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus. The autobiography of Martin Gardner*. Princeton University Press.

[10] Gardner, M., et Harary, F. (1988). « The propositional calculus with directed graphs ». *Eureka, 48*, 34-40.

[11] Goffman, C. (1969). « And what is your *Erdős* number? ». *American Mathematical Monthly 76* (7), 791. [www.jstor.org/stable/2317868]

[12] Graham, R. L., Rothschild, B. L., et Spencer, J. H. (1980). *Ramsey Theory*. John Wiley & Sons.

[13] Misak, C. (2020). *Frank Ramsey: A Sheer Excess of Powers*. Oxford University Press.

[14] Odda, T. (1979). « On Properties of a Well-Known Graph or what is your Ramsey Number? ». *Annals of the New York Academy of Sciences, 328* (1), 166-172.

[15] Ramsey, F. P. (1930). « On a Problem of Formal Logic ». *Proceedings of the London Mathematical Society, 2* (1), 264-286.

[16] Roberts, S. (2009). *King of infinite space: Donald Coxeter, the man who saved geometry*. Bloomsbury Publishing USA.