BENOÎT B. MANDELBROT ET LES FRACTALES

The following anecdote is told of William James [...] After a lecture on
cosmology and the structure of the solar system,
James was accosted by a little old lady.
Your theory that the sun is the centre of the solar system,
and the earth is a ball which rotates around it
has a very convincing ring to it, Mr. James, but it's wrong
I've got a better theory, said the little old lady.
And what is that, madam? inquired James politely.
That we live on a crust of earth which is on the back of a giant turtle [...]
If your theory is correct, madam, he asked, what does this turtle stand on?
You're a very clever man, Mr. James, and that's a very good question,
replied the little old lady,
but I have an answer to it. And it's this:
The first turtle stands on the back of a second, far larger, turtle,
who stands directly under him.
But what does this second turtle stand on? persisted James patiently.
To this, the little old lady crowed triumphantly,
It's no use, Mr. James—it's turtles all the way down.

J. R. Ross, *Constraints on Variables in Syntax* (1967).

Chairman of a meeting of the Society of Logicians: « Before we put the motion: "That the motion be now put", shoud we not first put the motion: "That the motion: 'That the motion be now put' be now put"? »

Blague publiée dans le magazine humoristique *Punch*.

Dans sa chronique *Mathematical Games* de mars 1967 [4 ; 7], Martin Gardner propose une réflexion sur la façon dont sont produites les définitions mathématiques. Gardner nous fait voir que celles-ci – loin de se présenter à nous comme une vérité révélée – sont, le plus souvent, le fruit d'un long processus d'essai-erreur impliquant le plus souvent de nombreuses reformulations de plus en plus éclairées :

> Les objets reçoivent un nom *x* et sont définis de manière approximative, conformément à l'intuition et à l'usage. Puis quelqu'un découvre un objet exceptionnel qui répond à la définition, mais qui n'est manifestement pas ce que tout le monde a à l'esprit lorsqu'il appelle un objet *x*. Une nouvelle définition, plus précise,

> est alors proposée, qui inclut l'objet exceptionnel ou l'exclut. La nouvelle définition « fonctionne » tant qu'aucune nouvelle exception ne survient. Si c'est le cas, la définition doit être révisée à nouveau, et le processus peut se poursuivre indéfiniment. Si les exceptions vont fortement à l'encontre de l'intuition, on les appelle parfois des monstres. L'adjectif « pathologique » leur est souvent accolé. (traduction libre) [4 ; 7]

Pour illustrer ce processus, Gardner prend l'exemple du concept de *courbe*. Déjà, les mathématiciens de la Grèce antique disposaient de deux définitions concurrentes de ce qu'est une *courbe*. Suivant l'une d'elles, une courbe était l'intersection de deux surfaces. Un cercle, par exemple, peut être vu comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan, où l'angle d'inclinaison du plan de coupe est droit. Selon l'autre conception, une courbe pouvait être décrite comme étant assimilable à la trajectoire d'un point qui se meut suivant une loi déterminée. Pour reprendre le même exemple, un cercle est le lieu des points par où passe une branche de compas effectuant une rotation complète. Le développement de la géométrie analytique puis celui du calcul différentiel et intégral, qui s'accéléra à partir du 17e siècle, rendit possible la formulation d'une définition alternative, plus précise, mais aussi plus contraignante. Le mot *courbe* en vint à désigner seulement le graphe d'une fonction continue ; des fonctions qu'il était possible, croyait-on, d'approcher localement (sauf possiblement en un certain nombre de points isolés exceptionnels) de manière assez fine par une fonction linéaire. Or, comme le souligne Gardner, la seconde moitié du 19e siècle fut ponctuée de découvertes par des mathématiciens de courbes monstrueuses qui n'avaient pas de tangentes uniques en un point quelconque. La définition de ce qu'est une courbe dut donc être à nouveau revue.

De nos jours, le bestiaire monstrueux mathématique comporte tout un tas de fascinantes curiosités : le flocon de Koch, la saucisse de Minkowski, la courbe du blanc-manger de Takagi, le lamentable fléau de Weierstrass, la poussière de Fatou, le cube de Cantor, l'escalier du diable, le tapis de Sierpiński, le décalage de Bernoulli, l'éponge de Menger, l'attracteur de Feigenbaum, le lapin de Douady, le pavage de Penrose, l'arbre de Pythagore, le Mandelbulb, la courbe remplissante de Peano, etc.

Si les avancées réalisées en topologie au cours des 19e et 20e siècles permirent de proposer de nouvelles définitions moins restrictives ou plus inclusives de ce qu'est une courbe et si la communauté mathématique finit par s'accoutumer à vivre entourée de monstres, il n'en demeure pas moins que ces courbes pathologiques continuent de défier l'intuition et de captiver.

Martin Gardner, qui a toujours su flairer les sujets intéressants, consacra sa chronique de mars 1967 [3 ; 5] à faire découvrir à son lectorat l'un de ces monstres : la courbe du dragon. Découverte en 1966 par un physicien travaillant à la NASA, John E. Heighway, la courbe du dragon est la résultante de l'application de la procédure suivante :

Dans un premier temps, plions une feuille de papier en deux, puis déplions-la jusqu'à ce que les deux moitiés forment un angle droit et positionnons la feuille de sorte à l'observer dans le sens de l'épaisseur ; la courbe tracée par le mince bord de la feuille est appelée un *dragon d'ordre 1*. Dans un deuxième temps, plions deux fois la même feuille (toujours dans le même sens) puis déplions-la jusqu'à ce que chaque pli forme un angle droit ; le bord de la feuille décrit la courbe appelée *dragon d'ordre 2*. De façon générale, en pliant la feuille à n reprises et en la dépliant pour que chaque pli forme un angle droit, on obtient un dragon d'ordre n. Avec un peu d'imagination, on arrivera à se convaincre que la courbe ressemble vaguement à un dragon de mer pagayant avec ses pattes griffues et maintenant sa queue enroulée juste au-dessus des flots.

À la suite de la parution de la chronique de Gardner, la courbe du dragon fit l'objet d'une analyse à la fois sérieuse et poussée de la part du mathématicien canado-américain Horace Chandler Davis (1926-2022) et de l'informaticien américain Donald Ervin Knuth [13]. Leurs résultats furent présentés dans un article en deux parties publiées en 1970 [1 ; 2].

Dans ce qui suit, nous nous pencherons sur la vie et l'œuvre d'un homme qui, plus que quiconque, contribua à réhabiliter ces monstres, à les faire apparaître sous un jour infiniment plus favorable et, ultimement, à les positionner comme sujet d'étude d'une toute nouvelle branche des mathématiques absolument fascinante.

C'est à Varsovie, en Pologne, que Benedykt Mandelbrojt vint au monde le 20 novembre 1924. Sa famille, issue de la communauté juive de Lituanie, immigra en France en 1936. On peut dire sans exagération que cette décision, prise à l'aube des terribles violences qui secouèrent la Pologne, leur sauva la vie. Le jeune Benedykt, sous l'influence de son oncle paternel, le mathématicien Szolem Mandelbrojt, ne tarda pas à faire montre d'un intérêt débordant pour les sciences. Prenant le pli identitaire de sa société d'accueil, le jeune homme francisa son nom et devint Benoît Mandelbrot.

De 1945 à 1947, Mandelbrot étudia à l'École Polytechnique. Dans cette école d'ingénieurs française, le jeune homme reçut les enseignements d'éminents mathématiciens français comme Gaston Julia et Paul Lévy. Puis, de 1947 à 1949, il fréquenta le California Institute of Technology, où il décrocha un diplôme de maîtrise en aéronautique. De retour en France, Mandelbrot obtint un doctorat en mathématiques à l'Université de Paris en 1952. Bénéficiant d'une bourse de la Fondation Rockefeller, Mandelbrot traversa à nouveau l'Atlantique l'année suivante afin d'entreprendre un stage postdoctoral au Institute for Advanced Study de Princeton au New Jersey sous la supervision du génial mathématicien hongrois John von Neumann.

Désireux de poursuivre librement ses recherches dans les très nombreux domaines qui l'intéressaient, Mandelbrot renonça à mener une carrière dans le milieu universitaire qu'il jugeait trop contraignant et trop enclin à surcharger les chercheurs avec des formalités administratives abrutissantes et chronophages. C'est ainsi qu'il choisit, en 1958, de se joindre au Thomas J. Watson Research Center, le siège central de la recherche et de l'innovation de la société multinationale américaine IBM situé à Yorktown Heights dans l'État de New York. Il y mena des recherches dans une pléthore de disciplines scientifiques, allant des mathématiques fondamentales aux sciences économiques en passant par la dynamique des fluides et la théorie de l'information.

C'est par nécessité davantage que par choix que Mandelbrot dut, en 1987 se résoudre à quitter IBM. La compagnie décida en effet de démanteler le programme de recherche en sciences fondamentales. L'homme de science – alors âgé de 63 ans – n'en avait pas terminé pour autant avec les mathématiques. Il entama en effet une carrière professorale tardive mais étincelante au sein du département de mathématiques de l'Université Yale[1].

Penchons-nous maintenant sur la principale découverte réalisée par Benoît Mandelbrot au cours de sa carrière, celle qui assura sa place dans la grande histoire des mathématiques : les fractales.

Dans un article scientifique publié en 1967 et intitulé *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension* [10], Mandelbrot se penche sur le concept de courbes *autosimilaires,* à savoir les courbes pour lesquelles – pour user d'une analogie simple – aucun nouveau détail précédemment invisible n'apparaît lorsque l'on grossit l'image à l'aide d'un microscope au pouvoir de résolution infini ; aucune nouvelle structure plus fine n'émerge, et ce, peu importe l'intensité du changement d'échelle.

Pour le dire avec les mots de Gardner [4 ; 7], de nombreux phénomènes naturels (le tracé de la zone de contact entre la mer et la terre ferme, la forme des flocons de neige et des nuages, la structure des éclairs, mais aussi le déploiement des vaisseaux sanguins, des neurones et des bronchioles) exhibent – certes imparfaitement – une certaine forme d'autosimilarité statistique. Le littoral, par exemple, conserve la même apparence (soit celle d'une courbe irrégulière, imprévisible et infiniment morcelée), qu'on le regarde depuis des centaines de kilomètres d'altitude ou depuis un point d'observation situé à quelques mètres au-dessus du niveau de la mer.

S'il est difficile de retracer précisément l'origine de l'intérêt de Benoît Mandelbrot pour le concept d'autosimilarité, on peut nettement discerner dans ses travaux une certaine influence de ses anciens professeurs, les mathématiciens français Gaston Julia et Paul Lévy. Ces deux hommes avaient, chacun à sa façon, réalisé certaines études de courbes statistiquement autosimilaires. Mais celles-ci étaient alors considérées comme de simples curiosités mathématiques inutiles et alambiquées.

1. Considérant l'âge relativement avancé auquel Benoît Mandelbrot se joignit au corps professoral de l'Université Yale, on pourrait s'attendre à ce qu'il n'y effectuât qu'un dernier tour de piste avant une retraite bien méritée. Mais ce serait là bien mal connaître le mathématicien polono-franco-américain. Ce n'est qu'en 2005, à l'âge de 81 ans, qu'il se résolut à mettre un terme à sa quête exploratoire aux confins de la connaissance scientifique. Atteint d'un cancer du pancréas, le mathématicien s'éteignit le 14 octobre 2010 à Cambridge au Massachusetts.

En 1975, avec la parution d'un ouvrage intitulé *Les objets fractals : forme, hasard et dimension* [11], Mandelbrot contribua à regrouper sous un même étendard différents concepts, différentes idées, différents objets abstraits qui semblaient jusque-là être les fruits de réflexions éparses. En forgeant le mot « fractal » – un terme dérivant du latin « *fractus* » qui signifie cassé, brisé, décousu, morcelé, irrégulier – afin de décrire toute structure dans laquelle des copies de plus en plus petites d'un motif sont successivement imbriquées les unes dans les autres de sorte que les mêmes formes complexes apparaissent, quel que soit le degré d'agrandissement effectué, Mandelbrot concourra à consolider les développements d'une pensée mathématique jusque-là décousue s'étant échelonnée sur des centaines d'années.

Dans de nombreux pays dont les États-Unis, la coutume veut que l'on attribue aux personnes un nom intermédiaire qui est placé entre le prénom et le nom de famille. Faisant preuve d'un grand sens de l'humour, Mandelbrot exploita le fait que dans les pays anglophones ce nom intermédiaire soit généralement abrégé par son possesseur en une initiale et prit l'habitude de se présenter sous le nom de Benoît B. Mandelbrot. À quiconque lui demandait ce qui se cachait derrière l'initiale B., le père des fractales répondait « Benoît B. Mandelbrot », laissant ainsi sous-entendre qu'il était lui-même une incarnation du principe des poupées gigognes.

Tirant profit de son accès aux technologies informatiques nouvellement développées par IBM, Mandelbrot produisit des visualisations de fractales construites par ordinateur et frappant l'imaginaire. Son exploration mathématique, philosophique et infographique des fractales culmina avec la publication, en 1982, de *The Fractal Geometry of Nature* [12], une version révisée, augmentée et traduite de son livre français de 1975. L'importante place qu'accorda Mandelbrot à l'intuition visuelle et géométrique fit de *The Fractal Geometry of Nature* un ouvrage qui fait aujourd'hui référence, une lecture que bon nombre de profanes jugèrent non seulement accessible, mais aussi instructive et inspirante. Ce livre, qui connut un succès tant populaire que critique, suscita un grand intérêt pour les fractales et contribua à imprimer un élan nouveau à l'étude des systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales. De plus, de nombreuses autres disciplines – comme la géologie, l'hydrologie, la biologie, la morphologie animale, la météorologie, l'astronomie, l'économie, la finance et les arts graphiques – tirèrent profit du développement de la théorie des fractales, sinon mathématiquement du moins par leur puissance évocatrice.

À la lumière de ce qui précède, il appert que Benoît B. Mandelbrot – qui était un excellent communicateur – n'eut pas besoin du secours de Martin Gardner pour faire connaître du grand public ses fractales. Comme nous le verrons, l'influence de Gardner sur l'itinéraire mathématique du père des fractales fut certes subtile, mais mutuellement profitable. Il convient d'abord de dire que c'est à la suite de circonstances contingentes que les deux hommes firent connaissance. Du temps où il travaillait pour IBM, Mandelbrot habitait dans la localité de Scarsdale, dans le comté de Westchester, dans l'État de New York, soit à une dizaine de kilomètres de la résidence des Gardner, au 10 Euclid Avenue, à Hastings-on-Hudson [9]. Or, Mandelbrot affectionnait particulièrement aller à la rencontre des personnes qui effectuaient des travaux liés à son domaine. Un homme à la culture mathématique aussi vaste que Mandelbrot n'était pas sans savoir que Gardner avait déjà consacré un texte à populariser une courbe fractale (et ce, avant même que ce mot ne soit forgé) : la courbe du dragon. De plus, Mandelbrot ne pouvait ignorer que Gardner était la plaque tournante de tout un réseau de mathématiciens remarquablement actifs, créatifs et productifs dans les domaines les plus excentriques des mathématiques. Aller à la rencontre du célèbre chroniqueur s'avéra payant pour le père des fractales. C'est en effet au cours d'une soirée chez les Gardner que Mandelbrot eut l'occasion de faire la connaissance de John H. Conway et de discuter longuement avec lui du caractère fractal du pavage de Penrose [9]. C'est également par l'entremise de Gardner que Mandelbrot put s'entretenir avec Ralph William « Bill » Gosper Jr., le mathématicien et informaticien ayant découvert la courbe fractale qu'il nomma *flowsnake* (une contrepèterie obtenue en permutant deux phonèmes du mot anglais « *snowflake* », qui signifie « flocon », que l'on associe à une autre courbe fractale plus ancienne : le flocon de Koch) [4 ; 7]. Quant à Gardner, l'amitié qu'il entretint avec Mandelbrot lui permit notamment d'avoir accès à du matériel original pour alimenter ses chroniques ainsi qu'aux lumières d'un mathématicien lui-même fort doué pour la vulgarisation. C'est ainsi que les lecteurs du magazine *Scientific American* purent entendre parler de la découverte étonnante réalisée par le physicien Richard F. Voss, un collègue de travail de Benoît Mandelbrot au Thomas J.

Watson Research Center [6 ; 8]. Avant de décrire en quoi consiste cette découverte, voici d'abord quelques éléments contextuels.

On appelle *bruit blanc* (également nommé *bruit de Johnson-Nyquist*) le bruit généré par l'agitation thermique produit par les mouvements aléatoires des électrons dans une résistance électrique en équilibre thermique. Ce phénomène physique est à l'origine du grésillement que l'on entend lorsqu'il n'y a pas d'émetteur à proximité. On peut aisément produire de la *musique blanche* – c'est-à-dire une mélodie dans laquelle il n'y a absolument aucune corrélation entre deux notes – à l'aide d'un piano et d'une roue de fortune divisée en autant de secteurs circulaires d'égale aire qu'il y a de touches sur le piano (soit habituellement 88). Il suffit en effet d'associer chaque secteur à une note puis de faire tourner la roue aussi souvent que désiré en prenant bien soin de noter la succession de notes produites.

Il existe un autre type de bruit aléatoire plus complexe appelée *bruit brownien* puisqu'il affiche certaines des caractéristiques du mouvement brownien, cette description mathématique du mouvement aléatoire d'une *grosse* particule (lors de la célèbre expérience réalisée par le botaniste Robert Brown en 1827, il s'agissait d'un grain de pollen de *Clarkia Pulchella*) immergée dans un liquide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des collisions avec les petites molécules du liquide ambiant. Une fois de plus, on peut se servir d'un piano et d'une roue de fortune pour produire de la *musique brownienne* (ou, si l'on s'autorise à jouer sur l'homophonie entre le patronyme Brown et le mot anglais « *brown* » qui signifie *brun*, la *musique brune*), soit une mélodie dans laquelle il y a une forte corrélation entre les différentes notes qui s'enchaînent. Considérons par exemple une roue divisée en deux secteurs d'égale aire respectivement étiquetés + et -. On commence la mélodie sur le do central et on se sert de la roue de fortune pour générer une marche aléatoire sur le clavier. Lorsque la roue s'arrête sur un +, la prochaine note jouée sera celle se trouvant immédiatement au-dessus (dans la gamme de do) de la note actuelle ; lorsqu'elle s'arrête sur un -, on enchaîne plutôt avec la note se trouvant immédiatement au-dessous de la note actuelle. La mélodie prend fin aussitôt que l'on atteint l'une ou l'autre des extrémités du clavier.

L'idée géniale de Voss fut d'appliquer certaines idées mathématiques afin de concevoir un type de musique aléatoire, la musique, se situant d'une certaine manière entre les extrêmes que sont la musique blanche et la musique brune. Avec l'aide de Mandelbrot, Gardner fut en mesure d'expliquer à ses lecteurs l'idée maîtresse derrière cette musique fractale, cet hybride mélodieux aux accents orientaux qui est à la fois moins aléatoire que la musique blanche et moins corrélé que la musique brune.

Références

[1] Davis, C., et Knuth, D. E. (1970). « Number representations and dragon curves I ». *journal of Recreational Mathematics*, *3* (2), 66-81.

[2] Davis, C., et Knuth, D. E. (1970). « Number representations and dragon curves II ». *journal of Recreational Mathematics*, *3* (3), 133-149.

[3] Gardner, M. (1967, mars). « Mathematical Games: An array of problems that can be solved with elementary mathematical techniques ». *Scientific American, 216* (3), 124-129. [www.jstor.org/stable/24931439]

[4] Gardner, M. (1976, décembre). « Mathematical Games: In which "monster" curves force redefinition of the word "curve" ». *Scientific American, 235* (6), 124-133. [www.jstor.org/stable/24950510]

[5] Gardner, M. (1977). « The Dragon Curve and Other Problems ». Ch. 15 dans *Mathematical Magic Show*. Knopf.

[6] Gardner, M. (1978, avril). « Mathematical Games: White and brown music, fractal curves and one-over-f fluctuations ». *Scientific American, 238* (4), 16-33. [www.jstor.org/stable/24955701]

[7] Gardner, M. (1989). « Mandelbrot's Fractals ». Ch. 3 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers… And the Return of Dr. Matrix*. W. H. Freeman & Co.

[8] Gardner, M. (1992). « White, Brown, and Fractal Music ». Ch. 1 dans *Fractal Music, Hypercards, and More… Mathematical Recreation from scientific american Magazine*. W. H. Freeman & Co.

[9] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus. The autobiography of Martin Gardner*. Princeton University Press.

[10] Mandelbrot, B. (1967). « How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension ». *Science*, *156* (3775), 636-638.

[11] Mandelbrot, B. (1975). *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*. Flammarion.

[12] Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman & Co.

[13] Sriraman, B. (dir.). (2017). « Can Something Just Happen to Be True? ». Ch. 15 dans *Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays celebrating the 90th birthday of Reuben Hersh*. Birkhäuser.