DONALD ERVIN KNUTH ET LES NOMBRES SURRÉELS

Pride in craftsmanship
obligates the mathematicians of one generation
to dispose of the unfinished business of their predecessors.

E. T. Bell, *The Last Problem.*

A curious thing about the ontological problem is its simplicity.
It can be put in three Anglo-Saxon monosyllables : « What is there? »
It can be answered, moreover, in a word – « Everything. »

Willard van Orman Quine, *On What There Is.*

L'année 1969 fut particulièrement faste pour le mathématicien John H. Conway. Il jeta les bases, cette année-là, du Jeu de la vie[6], révolutionnant ainsi la théorie des automates cellulaires. Mais il effectua aussi, cette même année, une autre découverte remarquable [15, ch. 10]. En bidouillant avec divers jeux enfantins, le génie britannique inventa par inadvertance une façon de regrouper au sein d'une seule et même théorie unifiée les nombres réels, les nombres ordinaux[7] transfinis conceptualisés par Georg Cantor en 1883 et construits par John von Neumann en 1923, et les nombres infinitésimaux imaginés par Gottfried Wilhelm Leibniz et Sir Isaac Newton au 18e siècle. Plus surprenant encore, cette nouvelle théorie unifiée – la théorie des nombres surréels – permettait d'engendrer de nouveaux nombres jusque-là inconnus.

Les nombres surréels ne sont pas construits tout d'un coup. Ils sont plutôt construits par étape, de manière itérative. À chaque étape, de nouveaux nombres sont créés en mettant à profit deux ensembles de nombres déjà construits, appelés *ensemble de gauche* et son

6. La nouvelle de la découverte des nombres surréels fut communiquée à Martin Gardner dans la même fort longue lettre dans laquelle il lui présenta les rudiments du Jeu de la vie. Dans cette lettre (datée, à la réception par Gardner lui-même, de mars 1970), Conway affirme avoir jeté les bases de cette construction au cours de la période des Fêtes 1969 [15, ch. 10].

7. En théorie des ensembles, la classe des nombres ordinaux (qui généralise l'ensemble des nombres naturels dans un sens très précis) est une collection d'objets permettant de caractériser le type d'ordre d'un ensemble bien ordonné.

ensemble de droite. On note un nombre surréel d'ensembles de gauche G et d'ensembles de droite D par : $\{G|D\}$

Ce qui rend la découverte de Conway encore plus remarquable est sa simplicité d'énonciation (et pour Conway – un homme qui avait en aversion tout ce qui lui apparaissait excessivement subtil ou raffiné –, c'est dans cette relative simplicité que réside toute la beauté de l'affaire [15, ch. 10]). La théorie des nombres surréels repose uniquement sur les deux règles que voici :

Règle 1 (construction) :

1a (définition) : Soient G et D deux ensembles de nombres surréels tels que pour tout x dans G et tout y dans D on a $x < y$ (où $<$ désigne la version stricte de relation d'ordre définie ci-dessous). Alors $\{G|D\}$ est un nombre surréel.

1b (équivalence[8]) : Deux nombres surréels S_1 et S_2 sont équivalents si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées : (i) $S_1 \leq S_2$; et (ii) $S_2 \leq S_1$.

Règle 2 (ordre) :

Soient $S_1 := \{G_1|D_1\}$ et $S_2 := \{G_2|D_2\}$ deux nombres surréels. Alors $S_1 \leq S_2$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées : (i) il n'y a aucun x dans G_1 tel que $S_2 \leq x$; et (ii) il n'y a aucun y tout dans D_2 tel que $y \leq S_1$.

La règle de construction énoncée ci-dessus est formelle : rien ne vient de rien. *Ex nihilo nihil fit*. Fort heureusement, on peut aisément construire le premier nombre surréel à partir de presque rien. En posant G et D comme étant l'ensemble vide dans la règle 1a, on obtient un premier nombre surréel que l'on assimilera au nombre zéro :

$$0:=\{|\}$$

8. De la même manière que les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, etc. constituent des représentations différentes d'une même valeur numérique (ces représentations sont donc qualifiées d'*équivalentes*), un nombre surréel admet plusieurs représentations différentes. La règle 1b énonce un critère permettant de déterminer quels nombres surréels sont équivalents.

L'obtention du nombre zéro nous permet de définir sans effort, de proche en proche, tous les nombres entiers :

$$
\begin{array}{ll}
1 : = \{0|\} & -1 : = \{|0\} \\
2 : = \{0, 1|\} & -2 : = \{|0, -1\} \\
3 : = \{0, 1, 2|\} & -3 : = \{|0, -1, -2\} \\
\ldots & \ldots \\
n + 1 : = \{0, 1, 2, \ldots, n|\} & -\ (n + 1) \\
 & \{|0, -1, -2, \ldots, -n\}
\end{array}
$$

De là, on peut aisément définir les nombres ordinaux transfinis :

$$\omega : = \{0, 1, 2, 3, \ldots|\emptyset\}$$

$$\omega + 1 : = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega|\emptyset\}$$

etc.

On peut également définir les nombres rationnels :

$$\frac{1}{2} : = \{0|1\}$$

$$\frac{1}{4} : = \left\{0|\frac{1}{2}\right\}$$

$$\frac{3}{4} : = \left\{\frac{1}{2}|1\right\}$$

etc.

C'est presque malgré lui que Conway découvrit les nombres surréels. Loin de viser à construire une nouvelle classe de nombres généralisant l'ensemble des nombres réels, Conway cherchait plutôt une façon d'analyser les parties de jeux de stratégie combinatoires abstraits à deux joueurs comme le jeu de Go. Il souhaitait en effet élaborer une façon d'analyser des parties complexes de sorte à pouvoir calculer en temps réel (par exemple après chaque tour) quel joueur est en tête.

Dans la théorie des jeux combinatoires, on dit d'un jeu au tour par tour qu'il est *impartial* lorsque les coups autorisés de même que les gains obtenus sont les mêmes pour les deux joueurs et ne dépendent que de la position. Le jeu de stratégie pure Nim forme l'archétype du jeu impartial[9]. Un jeu qui n'est pas impartial est quant à lui qualifié de *partisan*[10]. À titre d'exemple, les échecs et le jeu de Go sont des jeux partisans car, pour une configuration donnée, les coups autorisés pour le joueur blanc ne sont pas les mêmes que ceux pour le joueur noir (le joueur blanc peut déplacer les pièces blanches, mais pas les pièces noires, alors que pour l'autre joueur c'est l'inverse). Après s'être entiché des jeux impartiaux et d'avoir contribué à développer la théorie à leur sujet, Conway s'en lassa. Son attention, éternellement volatile, se porta alors sur les jeux partisans [15, ch. 10].

Par un heureux concours de circonstances, au moment où s'avivait l'intérêt de Conway envers les jeux partisans, la Faculté de mathématiques de l'Université de Cambridge accueillait en son sein un étudiant de premier cycle répondant au nom de Jon Diamond. Ce jeune homme était alors, et ce, depuis 1965, champion britannique de Go. Il va sans dire que sa présence eut pour effet de susciter un engouement marqué pour ce jeu de société originaire de Chine. Conway, qui, de son propre aveu, ne comprit jamais complètement le jeu de Go [15, ch. 10], aimait bien malgré tout observer Diamond démontrer toute l'étendue de son talent lorsque celui-ci disputait une partie dans la salle commune avec un ami. S'il se révélait le plus souvent incapable de distinguer les bons coups des moins bons, un esprit aussi aiguisé que le sien ne manqua pas de noter que, vers la fin de la partie, le jeu se divisait en un grand nombre de sous-parties se déroulant dans des régions distinctes du plateau de jeu et n'empiétant pas les unes sur les autres. Cette observation l'incita à tenter d'élaborer une théorie permettant de donner un sens à la *somme de jeux partisans*.

À force de manipuler des jeux enfantins assez simples, Conway en vint progressivement à échafauder une théorie répondant à peu près adéquatement à ses objectifs initiaux. À sa grande surprise, il remarqua que, intégrée dans sa théorie des jeux partisans, se trouvait encodée la construction des nombres naturels, puis celle des nombres entiers. Il s'étonna ensuite de voir ses jeux exsuder les nombres rationnels. Puis,

9. Il s'agit même, à certains égards, du *seul* jeu impartial. En effet, un théorème découvert indépendamment par l'Allemand Roland Sprague (1935) et le Britannique Patrick Grundy (1939) stipule que tout jeu impartial est équivalent (dans un sens technique précis qu'il ne convient pas d'expliquer ici) au jeu de Nim.

10. Si c'est le terme *partisan* (plutôt que *partial*) qui s'est imposé comme étant l'opposé d'*impartial*, c'est parce que le mot anglais «*partial*» est équivoque. Il sert à la fois à exprimer l'équivalent du mot français «partial» que celui du mot français «partiel». Selon Conway, c'est le mathématicien britanno-canadien Richard K. Guy (1916-2020) qui aurait proposé le mot «partisan» et celui-ci serait progressivement entré dans l'usage [15, ch. 10].

après quelques semaines de jeu, il comprit que ce n'était pas seulement les nombres rationnels qui étaient enchâssés dans sa théorie, mais aussi tous les nombres irrationnels. Conway discerna en effet qu'en développant sa théorie, il marchait d'une certaine façon dans les traces du mathématicien allemand Richard Dedekind [15, ch. 10]. Au début des années 1860, alors que la communauté mathématique s'affairait à asseoir cette discipline (qui s'était fabuleusement développée au cours du siècle précédent, mais souvent avec une désinvolture qui seyait mal à une science abstraite que l'on aspirait à utiliser comme socle sur lequel s'érigeraient les sciences dites empiriques) sur des fondements rigoureux, la nécessité de présenter une construction des nombres réels se fit sentir de façon pressante. En 1872, Dedekind proposa une manière de construire les nombres réels irrationnels à partir des rationnels (qui, eux, étant jugés élémentaires et intuitifs, étaient raisonnablement bien acceptés). La théorie qu'avait élaborée Conway se trouvait à donner lieu à une construction analogue, mais formulée d'une façon qui permettait d'entrevoir une vaste généralisation.

Considérons par exemple le nombre $\sqrt{2}$. Un argument classique fort simple permet de démontrer que ce nombre ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où a et b sont deux nombres entiers. Par conséquent, le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ; il est irrationnel. Il va sans dire que le nombre $\sqrt{2}$ se situe quelque part entre les nombres naturels 1 et 2. Les nombres rationnels $\frac{7}{5}$ et $\frac{3}{2}$ représentent respectivement des approximations inférieures et supérieures plus précises. Mais on peut faire encore mieux et montrer que $\sqrt{2}$ est situé entre $\frac{41}{29}$ et $\frac{17}{12}$; entre $\frac{239}{169}$ et $\frac{577}{408}$; entre $\frac{1393}{985}$ et $\frac{3363}{2378}$; etc. À la lumière de ce qui précède, on voit que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ coupe d'une certaine façon l'ensemble des nombres rationnels en deux : il y a d'une part ceux qui sont strictement inférieurs à $\sqrt{2}$ et d'autre part ceux qui sont strictement supérieurs à $\sqrt{2}$. Tout nombre rationnel appartient forcément à l'une ou l'autre des catégories. L'idée géniale de Dedekind fut de *conceptualiser* ou *assimiler* $\sqrt{2}$ à cette coupure. Le nombre $\sqrt{2}$ est donc *défini* comme étant cette coupure :

$$\sqrt{2} = \left\{\ldots,1,\ldots,\frac{7}{5},\ldots,\frac{41}{29},\ldots,\frac{239}{169},\ldots,\frac{1393}{985},\ldots \middle| \ldots,\frac{3363}{2378},\ldots,\frac{577}{408},\ldots,\frac{99}{70},\ldots,\frac{17}{12},\ldots\frac{3}{2},\ldots,2,\ldots\right\},$$

où, pour le voir de façon imagée $\sqrt{2}$, est ce nombre qu'il faut ajouter afin de boucher le trou béant entre tous les nombres rationnels se trouvant à la gauche de $\sqrt{2}$ dans notre image mentale de la droite numérique et tous les nombres rationnels se trouvant à sa droite. En bouchant le nombre infini de trous que l'on retrouve entre les nombres rationnels par l'ajout de nombres irrationnels, on obtient la droite réelle.

Lorsqu'il se fut rendu compte que ce qu'il avait fait ressemblait à ces coupures de Dedekind, la théorie commença à prendre forme dans l'esprit de Conway. Bientôt il observa qu'en associant les jeux à des nombres, on pouvait certes construire les nombres réels. Mais on pouvait aller beaucoup plus loin et construire des tas d'autres nombres, y compris (contre toute attente) des myriades et des myriades de nombres dont l'existence n'avait jusque-là jamais été envisagée.

D'abord incrédule, puis stupéfait, Conway mit un certain temps à apprécier à sa juste valeur la gigantesque envergure du système de nombres qu'il avait découvert. Lorsque cela eut percolé jusque dans les tréfonds de sa conscience, Conway, fasciné, voire envoûté, entra alors dans un cycle d'acharnement et de travail compulsif. Rédigeant de 8 h 30 du matin jusqu'à minuit pendant 7 jours consécutifs [15, ch. 10], il produisit en un temps record le manuscrit de ce qui deviendrait un jour son plus grand succès de librairie : *On Numbers and Games* [1]. À ceux qui se demandent pourquoi, si Conway compléta la rédaction de sa monographie introduisant les nombres surréels à l'automne 1970, le livre *On Numbers and Games* ne parut qu'en 1976, on répondra ceci : ne cherchez pas à comprendre. Siobhan Roberts, la biographe de Conway, a trouvé une formule qui nous semble remarquablement adéquate pour décrire l'un des traits marquants de ce personnage haut en couleur qu'était John H. Conway : il avait l'esprit du conquérant, pas celui du colon [15, ch. 10]. Quand on sait que nombre de ses découvertes s'imposèrent dans le folklore scientifique sans qu'il se donnât la peine de les introduire formellement dans un article soumis pour publication à une revue savante, on peut déjà s'estimer chanceux !

Si la découverte des nombres surréels doit être entièrement attribuée à John H. Conway, c'est au mathématicien américain Donald Ervin Knuth que revient le mérite d'avoir proposé leur nom. Conway, lui, jusque-là, s'entêtait à les appeler des *Nombres.* Si l'usage de la majuscule visait à souligner à gros traits que le référent était une nouvelle lasse de nombres suffisamment vaste pour contenir tout à la fois l'ensemble des nombres naturels, l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des nombres réels et la classe des nombres ordinaux, cette appellation s'avéra en pratique insuffisamment emphatique pour avoir l'effet voulu [15, ch. 10]. Conway se rangea à la suggestion de Knuth avec d'autant plus d'entrain que le qualificatif « surréel » lui semblait doublement approprié en ceci qu'il exprimait une idée de portée supérieure tout en étant porteur d'une connotation évoquant une sorte de bizarrerie.

Donald Ervin Knuth vint au monde le 10 janvier 1938 à Milwaukee, la ville la plus populeuse de l'État du Wisconsin. Une anecdote, aujourd'hui célèbre, témoigne bien de l'acuité de l'esprit systématique et méthodique de Donald Knuth de même que de sa discipline de fer [2 ; 14]. Alors qu'il n'était encore qu'un écolier, le jeune Knuth se vit poser un défi qui lui seyait particulièrement. George Zieler, un confiseur basé à Milwaukee, organisa un concours destiné aux enfants. Ceux-ci étaient invités à former le plus grand nombre de mots de la langue anglaise possible en permutant un sous-ensemble de lettres composant le groupe de mots « *Ziegler's Giant Bar* ». Knuth s'attaqua à ce défi avec un enthousiasme débordant et un flegme sans accroc. Afin de disposer d'un maximum de temps libre pour se consacrer à sa tâche, il feignit de souffrir d'une indigestion et rata ainsi plusieurs jours d'école. Équipé d'un dictionnaire en version intégrale, il dressa une liste de 4 500 mots valides distincts, soit près de 2 fois plus qu'en avait identifié le jury du concours. Il remporta donc haut la main le grand prix : ses camarades de classe et lui reçurent chacun une barre de chocolat Ziegler.

En 1956, alors qu'il aspirait à étudier la musique (lui qui jouait du saxophone et du tuba en plus de composer des œuvres pour orgue et instruments à vent), Knuth se vit offrir par le Case Institute of Technology, une université située à Cleveland en Ohio, une bourse d'études pour étudier la physique [2]. Flatté, le jeune homme accepta. Au cours de sa deuxième année d'études, il réalisa toutefois que son intérêt résidait plutôt dans les mathématiques pures [2 ; 14].

Provenant d'une famille sans tradition d'éducation supérieure (ce qui l'affubla d'un complexe d'infériorité) [2], Knuth ne lésina pas sur les efforts afin de rattraper les retards académiques qu'il estimait – selon toute vraisemblance à tort – avoir. Les efforts supplémentaires qu'il investit dans l'acquisition de connaissances de façon autodidacte prirent une telle ampleur et témoignèrent d'un tel niveau d'expertise que, lorsqu'il eut terminé ses études de premier cycle en juin 1960, il se vit décerner simultanément un diplôme de baccalauréat et un diplôme de maîtrise [14].

À l'automne 1960, Knuth fit son entrée à la California Institute of Technology (Caltech) où il décrocha, 3 ans plus tard, un doctorat en mathématiques. En parallèle de ses recherches doctorales, Knuth mit à profit son expertise informatique en devenant consultant en développement de logiciels pour le compte de la Burroughs Corporation, une société aujourd'hui disparue qui compta un temps parmi les principaux fabricants d'ordinateurs.

Après l'obtention de son doctorat en 1963, Knuth fut nommé professeur de mathématiques à Caltech. Puis, en 1969, il transféra à l'Université Stanford, où il occupa un poste de professeur en sciences informatiques jusqu'à sa retraite en 1993. Dans ses travaux en recherche fondamentale, mais aussi dans le cadre de ses activités en mathématiques dites récréatives (qui, bien souvent, furent catalysées par Gardner et qui servirent en retour à le ravitailler en contenu original pour ses chroniques[11]), Knuth appliqua ses connaissances informatiques de fine pointe en vue de la résolution de problèmes de nature algébrique et combinatoire.

Dès 1962, soit avant même que Knuth ne soutienne sa thèse de doctorat, son expertise informatique était à ce point manifeste, établie et notoire que la maison d'édition Addison-Wesley – spécialisée dans les manuels scolaires, les monographies et la littérature informatique – l'approcha pour lui proposer d'écrire un ouvrage portant sur les compilateurs (à savoir les programmes transformant le code écrit dans un langage informatique présentant un haut niveau d'abstraction le rendant facilement compréhensible par l'humain en un langage interprétable par le processeur d'un ordinateur). Knuth se mit au travail à l'été 1962. En travaillant sur ce projet, il arriva rapidement à la conclusion qu'il lui était impossible de rendre justice à ce sujet complexe en demeurant à l'intérieur des paramètres restrictifs qui

11. L'apport de Don Knuth, qui prend le plus souvent la forme d'un coup de main calculatoire ponctuel, mais déterminant, est omniprésent dans les chroniques *Mathematical Games* de Gardner.

avaient été établis par l'éditeur. Il décida donc de son propre chef d'accroître considérablement la portée de son étude et de commencer par développer une théorie fondamentale de la programmation informatique. En 1965, Knuth finit d'écrire le premier jet de ce qui devait être un volume unique composé de 12 chapitres. L'imposant manuscrit que se vit remettre l'éditeur comportant plus de 3 000 pages et ratissant considérablement plus large que ce qui était initialement prévu, on n'eut d'autre choix que de revoir le plan d'action. L'auteur et l'éditeur s'entendirent pour restructurer l'ouvrage sur sept volumes. Les 3 premiers volumes de *The Art of Computer Programming* furent publiés en 1968, 1969 et 1973 respectivement [9 ; 10 ; 11]. La rédaction du volume 4, amorcée en 1973, n'est à ce jour pas encore achevée[12]. Une première partie, identifiée comme le volume 4A, parut en 2011 [12], tandis qu'une seconde, le volume 4B, fut publiée en septembre 2022 [13]. Des volumes 4C, 4D, 5, 6 et 7 sont toujours dans les cartons. Verront-ils le jour ? L'avenir nous le dira. Une seule chose est sûre, Knuth continue de travailler d'arrache-pied à réaliser le plan établi avec son éditeur il y a de cela plus d'un demi-siècle.

En vue de souligner les accomplissements titanesques de son illustre professeur de sciences informatiques, l'Université Stanford conféra en 1990 à Knuth un titre universitaire fait sur mesure pour lui, soit *professeur de l'art de la programmation informatique*.

C'est en 1967, à l'occasion d'un séjour l'Université d'Oxford, au Royaume-Uni, où se tenait une conférence de mathématiques, que Conway et Knuth firent connaissance [15, ch. 10]. Quelques années plus tard, en février 1972, ils se retrouvèrent à nouveau pour une autre conférence, cette fois à l'Université de Calgary. Après la présentation de Conway, ils dînèrent ensemble à la cafétéria et Conway commença à exposer à Knuth les grandes lignes de la théorie (alors non encore publiée) des nombres surréels. Le mathématicien américain, dont la curiosité fut piquée, tenta de griffonner à mesure les éléments clés

12. Outre l'expansion continuelle de la portée du projet, d'autres raisons expliquent le long délai entre la parution du volume 3 et celle de la première partie du volume 4. Par exemple, au cours des années 1970, Knuth fut importuné par la lamentable qualité de la typographie des logiciels d'édition de l'époque et décida de développer le système logiciel libre de composition de documents TeX (qui révolutionna l'édition scientifique). Il élabora ensuite Metafont, un langage de programmation employé pour composer des polices de caractères vectorisées. Enfin, il créa Computer Modern, une famille complète de polices de caractères conçues avec Metafont.

sur une serviette de table qui s'emplit d'informations et d'équations à une vitesse affolante.

Quelques mois plus tard, au début de janvier 1973, alors qu'il profitait d'un congé sabbatique à l'Université d'Oslo en Norvège, Knuth, qui avait été incapable de chasser de son esprit l'élégante construction que lui avait exposée Conway d'une nouvelle vaste classe de nombres incluant tous les nombres usuels, décida de tenter de conjurer son obsession en interrompant temporairement tous ses projets en cours afin de se consacrer à la rédaction d'une « novelette[13] fondée sur les nombres de Conway, une idée folle » [15, ch. 10]. Il s'enferma dans sa chambre d'hôtel et s'attela à la tâche. Le 10 janvier, jour de son 35e anniversaire, il apporta la touche finale au manuscrit de ce qui allait devenir *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathematics and Found Total Happiness*[14] [3 ; 5 ; 8]. L'ouvrage prend la forme d'un dialogue entre deux personnages, Alice et Bill, qui s'aventurent dans une expérience de ressourcement pour couple au bord de l'océan Indien, loin des distractions de la vie quotidienne. Ils y découvrent un rocher noir comportant des inscriptions hébraïques gravées qu'ils arriveront ultimement à déchiffrer et qui se lisent comme suit :

> Au commencement, tout était vide, et J. H. W. H. Conway commença à créer des nombres. Conway dit : « Qu'il y ait deux règles qui donnent naissance à tous les nombres [...] Ceci sera la première règle : chaque nombre correspond à deux ensembles de nombres créés précédemment, de sorte qu'aucun membre de l'ensemble de gauche n'est supérieur ou égal à un membre de l'ensemble de droite. Et la deuxième règle va comme suit : un nombre est inférieur ou égal à un autre nombre si et seulement si aucun membre de l'ensemble de gauche du premier nombre n'est supérieur ou égal au deuxième nombre, et si aucun membre de l'ensemble de droite du deuxième nombre n'est inférieur ou égal au premier nombre. » (traduction libre)

13. Une *novella* est un type d'œuvre de fiction littéraire dont la longueur se situe habituellement entre celle de la nouvelle et celle du roman. Quant au mot «novelette», il semble qu'il fut forgé par le compositeur et pianiste allemand Robert Schumann (1810-1856) pour désigner de petites œuvres de piano. Ce mot se veut à la fois un jeu de mot avec le diminutif *petite nouvelle* et avec le nom d'une pianiste alors célèbre, Clara Anastasia Novello (1818-1908).

14. Ce livre parut en 1974, soit 2 ans avant *On Numbers and Games*. C'est donc Knuth qui, par sa novelette, qui popularisa les nombres surréels découverts par Conway.

Le récit se poursuit ensuite par l'application de ces règles fondatrices et l'émergence des premiers objets.

> Et Conway examina les deux règles qu'il avait faites. Et Conway vit que cela était bon. Et le premier nombre fut créé à partir de l'ensemble vide gauche et de l'ensemble vide droit. Conway appela ce nombre « zéro », et dit qu'il s'agirait d'un signe pour séparer les nombres positifs des nombres négatifs. (traduction libre)

Il sembla à Knuth que cette prodigalité émanant des deux règles fort simples constituant le socle de la théorie des nombres surréels – une prodigalité qu'il se plaisait à résumer par la formule « *E duobus plurimis* » (à savoir « de deux, plusieurs ») [15, ch. 10] – faisait d'une certaine façon écho à la devise en latin apparaissant sur le grand sceau des États-Unis ainsi que sur les sceaux du président, du vice-président, du Congrès et de la Cour suprême : « *E pluribus unum* » (littéralement « de plusieurs, un »). Conway, quant à lui, préféra la formule « *Ex nihilo, plurimis* » : du vide surgit l'abondance [15, ch. 10].

L'étonnante théorie des nombres surréels avait tout pour plaire à Martin Gardner. Il n'est donc pas étonnant qu'il ait choisi d'écrire à leur sujet, et ce, par deux fois. Dans sa chronique *Mathematical Games* de février 1975 [3 ; 5], il propose une réflexion à propos du concept de *néant*. Gardner explique d'entrée de jeu que le plus près qu'un mathématicien peut s'approcher du néant est par le biais de l'ensemble vide. Or, de la même manière qu'une boîte vide ne saurait être confondue avec l'absence de boîte, cet ensemble n'est pas, *stricto sensu*, la même chose que le néant. Le vulgarisateur enchaîne avec un survol des diverses tentatives – réalisées aux 19e et 20e siècles par des philosophes, logiciens et mathématiciens comme Gottlob Frege, Richard Dedekind, George Cantor, Bertrand Russell, et John von Neumann – de définir rigoureusement les nombres. La découverte, par Conway, des nombres surréels est ensuite abordée en détail (Gardner mentionne même au passage la novelette de Knuth). L'édition du magazine *Scientific American* de septembre 1976 [4 ; 6] comporte quant à elle une présentation approfondie des liens unissant les nombres surréels aux jeux partisans.

Il convient de dire un mot, en terminant, au sujet du rôle absolument capital que joua Donald Knuth dans la préservation du patrimoine intellectuel de Martin Gardner. Au cours des années 1980, alors qu'il travaillait à la rédaction du quatrième volume de son chef-d'œuvre, *The Art of Computer Programming,* Knuth – qui avait à cœur d'inclure dans ses livres autant de mathématiques récréatives que possible afin d'exemplifier son propos et de le rendre plus vivant et incarné – demanda à Gardner la permission de consulter ses archives à la recherche de contenu mathématique intéressant demeuré inexploité. Ce dernier accepta volontiers. À cette époque, la bibliothèque et les dossiers thématiques de Gardner avaient atteint de telles proportions qu'il lui était devenu impossible de tout conserver dans sa maison de Hendersonville, en Caroline du Nord. Il louait donc un condominium avec pour seul but de les y héberger. Knuth put donc s'installer dans ce condominium et vivre en parfaite autarcie pendant deux semaines [15, ch. 10], n'interrompant son activité de nature archéologique que pour manger ou assister à la messe [7, ch. 15].

Grâce aux efforts déployés par Knuth, les dossiers thématiques méticuleusement assemblés et organisés par Gardner entre ses années passées à étudier la philosophie à l'Université de Chicago et son entrée en maison de retraite, de même que les trésors glanés auprès de ses centaines de correspondants (dont certains figurent parmi les plus éminents esprits du siècle dernier) au cours du long et patient travail de recherche documentaire et de vérification des faits précédant inévitablement la rédaction de l'une ou l'autre de ses chroniques *Mathematical Games* entre 1957 et 1986 sont aujourd'hui conservés dans une archive de l'Université de Stanford [7, ch. 18].

Références

[1] Conway, J. H. (1976). *On Numbers and Games*. London Mathematical Society Monographs, Nº 6. Academic Press, London-New York.

[2] Feigenbaum, E. (2007). « Oral History of Donald Knuth ». *Computer History Museum*. [https://archive.computerhistory.org/resources/text/Oral_History/Knuth_Don_1/Knuth_Don.oral_history.2007.102658053_all.pdf]

[3] Gardner, M. (1975, février). « Mathematical Games: How the absence of anything leads to thoughts of nothing ». *Scientific American, 232* (2), 98-103. [www.jstor.org/stable/24949734]

[4] Gardner, M. (1976, septembre). « Mathematical Games: John Horton Conway's book covers an infinity of games ». *Scientific American, 235* (3), 206-211. [www.jstor.org/stable/24950446]

[5] Gardner, M. (1977). « Nothing ». Ch. 1 dans *Mathematical Magic Show*. Knopf.

[6] Gardner, M. (1989). « Conway's Surreal Numbers ». Ch. 4 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers… And the Return of Dr. Matrix*. W. H. Freeman & Co.

[7] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus. The autobiography of Martin Gardner.* Princeton University Press.

[8] Knuth, D. E. (1974). *Surreal numbers: a mathematical novelette*. Addison-Wesley.

[9] Knuth, D. E. (1968). *The Art of Computer Programming: Fundamental Algorithms* (Vol. 1). Addison-Wesley.

[10] Knuth, D. E. (1969). *The Art of Computer Programming: Seminumerical Algorithms* (Vol. 2). Addison-Wesley.

MEP_Martin_Gardner_E5.indd 238 2026-03-30 12:55:49

[11] Knuth, D. E. (1973). *The Art of Computer Programming: Sorting and Searching* (Vol. 3). Addison-Wesley.

[12] Knuth, D. E. (2011). *The Art of Computer Programming: Combinatorial Algorithms Part 1* (Vol. 4A). Addison-Wesley.

[13] Knuth, D. E. (2022). *The Art of Computer Programming: Combinatorial Algorithms Part 2* (Vol. 4B). Addison-Wesley.

[14] O'Connor, J. J., et Robertson, E. F. (2015). « Donald Ervin Knuth ». *MacTutor*. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Knuth/]

[15] Roberts, S. (2015). *Genius at play: the curious mind of John Horton Conway*. Bloomsbury Publishing USA.