

## ROGER PENROSE ET LES PAVAGES NON PÉRIODIQUES DU PLAN

*Une mosaïque de données ne peut s'assembler toute seule  
sans ces petits morceaux de marbre qu'on appelle des faits ;  
ce qui compte, cependant, ce ne sont pas tant les petits éléments,  
mais les schémas successifs dans lesquels on les arrange,  
qu'on brise pour les arranger de nouveau.*

ARTHUR KOESTLER, *LE CRI D'ARCHIMÈDE :  
L'ART DE LA DÉCOUVERTE ET LA DÉCOUVERTE DE L'ART*  
une traduction française de *THE ACT OF CREATION* (1964).

*When patterns are broken,  
new worlds emerge.*

TULI KUPFERBERG

Le 6 octobre 2020, le prix Nobel de physique fut attribué à l'Allemand Reinhard Genzel et à l'Américaine Andrea Ghez pour « la découverte d'un objet compact supermassif au centre de notre galaxie », ainsi qu'au Britannique Sir Roger Penrose pour « la découverte que la formation d'un trou noir est une prévision robuste de la théorie de la relativité générale ».

Roger Penrose, qui fut de 1973 à 1999 Rouse Ball Professor of Mathematics au Mathematical Institute de l'Université d'Oxford, est l'un de ces génies des mathématiques avec qui Martin Gardner entretint une relation d'amitié. Leur relation était suffisamment étroite, à tout le moins, pour que Penrose séjourne au 10 Euclid Avenue, à Hastings-on-Hudson lorsqu'il était en visite sur la côte est des États-Unis [6].

Né en 1931 à Colchester, dans le comté d'Essex, Roger Penrose est le fils de Dre Margaret Leathes et de Dr Lionel Penrose, un psychiatre et généticien s'étant illustré par ses travaux de pionnier en génétique de la déficience intellectuelle. Les Penrose auraient tous deux souhaité voir leur fils marcher dans leurs traces et embrasser la carrière médicale, mais le jeune Roger développa dès l'adolescence un vif intérêt pour les mathématiques.

Après avoir terminé un diplôme de premier cycle en mathématiques à l'University College London avec la mention *très honorable*, le jeune Penrose choisit de poursuivre ses études en mathématiques pures à l'Université de Cambridge, d'abord sous la direction de l'algébriste et géomètre renommé William Vallance Douglas Hodge (1903-1975), puis sous celle de son distingué collègue John A. Todd (1908-1994).

Si c'est à titre de mathématicien que Penrose soutint avec succès une thèse de doctorat portant sur les méthodes tensorielles en géométrie algébrique, le jeune homme s'était senti chaque jour de plus en plus attiré par la physique mathématique depuis qu'il avait suivi, au cours de la première année de son parcours à Cambridge, les enseignements du cosmologiste autrichien Hermann Bondi (1919-2005), de même que ceux du physicien théoricien nobélisé Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984).

À la fin des années 1960 et au début des années 1970, Penrose travailla en étroite interaction avec le physicien britannique Stephen Hawking (1942-2018). Leur relation, marquée à la fois par une forte émulation scientifique et par une compétition intellectuelle soutenue, joua un rôle déterminant dans l'élaboration d'une théorie décrivant l'effondrement gravitationnel des corps massifs sur eux-mêmes.

Aussi importantes et influentes que furent les idées originales de Penrose en physique théorique – des contributions scientifiques qui lui valurent de cumuler au fil des ans une impressionnante collection des plus prestigieuses distinctions scientifiques à l'échelle internationale –, c'est d'abord par ses quelques incursions dans le domaine des mathématiques récréatives qu'il sut capter l'attention de Martin Gardner.

Depuis longtemps déjà, Penrose éprouvait une fascination profonde pour la géométrie du plan et pour les motifs qu'elle permet de déployer. Bien au-delà d'un simple passe-temps, le dessin de formes imbriquées, de figures répétées et de découpages du plan constituait pour lui une manière naturelle de penser et d'explorer les structures mathématiques. Dans ce contexte, il en vint à imaginer, presque spontanément, des pavages aux motifs étonnamment riches, qui semblaient défier les régularités familières sans jamais sombrer dans le désordre. Intrigué par ces configurations et par leur cohérence interne, il prit le temps d'en consigner quelques-unes dans un court article, qu'il soumit à une revue scientifique de faible envergure [7], le physicien ne vit dans ses

découvertes que de simples curiosités mathématiques qui seraient vite reléguées aux oubliettes. Doté d'un remarquable flair pour trouver les sujets promis à un avenir radieux, Gardner, lui, se promit bien de faire rayonner les pavages non périodiques de son ami Penrose. Il en fit d'abord brièvement mention dans la conclusion de sa chronique *Mathematical Games* d'août 1975 [1 ; 3]. Toutefois, soucieux de ne pas nuire aux démarches entreprises par Penrose pour faire breveter sa découverte<sup>1</sup> – qui, comme nous le verrons, avait un fort potentiel commercial – au Royaume-Uni, aux États-Unis et au Japon, il dut attendre jusqu'en janvier 1977 avant de pouvoir y consacrer l'un de ses textes [2 ; 4 ; 5].

Le moins qu'on puisse dire est que l'attente en valut la peine. La chronique *Mathematical Games* intitulée *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles* est, parmi les textes de vulgarisation mathématique qu'écrivit Gardner au cours de sa vie, l'un de ceux qui suscitèrent le plus d'intérêt et qui eurent le plus de répercussions. Cette chronique figure également parmi les plus emblématiques de sa capacité à rendre accessible au plus grand nombre des sujets captivants qui, autrement, n'auraient été portés à l'attention que d'une poignée d'initiés. De plus, l'auditoire de Gardner comptant un impressionnant nombre de mathématiciens en quête de problèmes intéressants, il ne fait aucun doute que le texte de 1977 joua un rôle non négligeable dans le soudain regain d'intérêt pour les questions concernant les pavages du plan.

Afin d'apprécier à leur juste valeur les pavages de Penrose, il est d'abord nécessaire de faire une digression pour introduire – à la suite de Gardner [1 ; 3] – les éléments terminologiques afférents issus de la branche de la théorie de la tessellation dans laquelle les pavages du plan sont réalisés avec plus d'une forme de tuiles.

On appelle *prototuiles* les formes géométriques utilisées pour réaliser un pavage du plan donné. La tâche consistant à énumérer et à classifier les pavages du plan pouvant être réalisés avec un nombre fini de prototuiles est d'une ampleur considérablement. Suffisamment, en tout cas, pour qu'elle apparaisse presque impossible à attaquer

---

1. En 1997, Penrose intenta une poursuite contre Kimberly-Clark après que la société a utilisé sa conception protégée par droit d'auteur sur du papier hygiénique matelassé [9, p. 274]. À la suite de négociations tenues entre les parties, l'affaire fut réglée hors cour. Notons que le brevet ne concerne les pavages de Penrose qu'en tant qu'œuvre graphique. En tant que concept mathématique, les pavages de Penrose sont évidemment libres de droits.

frontalement. Il semble en effet nécessaire de scinder ce problème en sous-problèmes plus spécifiques.

Avant de pouvoir enfin décrire les travaux de Penrose, il nous faut encore dire un mot au sujet de la périodicité des pavages du plan. Un pavage du plan est dit *périodique* s'il suffit de connaître une portion bornée du pavage pour reconstruire, uniquement par translation (c'est-à-dire en la faisant glisser sans la déformer, la retourner ou la faire pivoter) l'entièreté du pavage. Un pavage du plan qui ne jouit pas de cette propriété est quant à lui qualifié de *non périodique*.

Certains ensembles de prototiles ne permettent de réaliser que des pavages périodiques du plan ; c'est notamment le cas si l'on prend l'hexagone régulier comme unique prototile. D'autres ensembles de prototiles, en revanche, permettent de réaliser tant des pavages périodiques que des pavages non périodiques. C'est notamment le cas du carré. En effet, l'échiquier s'étendant à l'infini est un exemple de pavage périodique du plan par des carrés ; un pavage non périodique pourra être obtenu en décalant latéralement (et de façon judicieuse) les rangées de cet échiquier s'étendant à l'infini.

La question de savoir s'il existe un ensemble de prototiles admettant des pavages non périodiques du plan mais aucun pavage périodique résista longtemps aux assauts des mathématiciens ; un tel ensemble de prototiles, s'il existe, serait qualifié d'*apériodique*. Certains des spécialistes de la théorie de la tessellation en vinrent à croire, à tort, qu'il n'existait pas de tel ensemble.

Puis, en 1964, l'Américain Robert Berger soutint une thèse de doctorat dans laquelle il démontra d'une part qu'un certain ensemble de 20 462 prototiles permettait de produire des pavages non périodiques du plan et, d'autre part, que ces mêmes prototiles ne permettaient pas de réaliser de pavage périodique du plan. Il parvint ensuite à réduire à 104 le nombre de prototiles nécessaires. Puis, en 1968, Donald Knuth – un ami et proche collaborateur de Martin Gardner – réduisit ce nombre à 92. Quelques années plus tard, un progrès important fut réalisé par le mathématicien californien Raphael M. Robinson. Celui-ci construisit un ensemble de six prototiles apériodiques.

C'est à ce moment que Sir Roger Penrose fait son entrée dans le récit. En parallèle à ses travaux en physique théorique, Penrose continuait

à entretenir son intérêt pour les curiosités mathématiques<sup>2</sup> en s'évertuant à trouver des ensembles de prototiles ne pavant le plan que de façon non périodique.

Puisant son inspiration dans certains des pavages décrits par l'illustre astronome allemand Johannes Kepler dans les chapitres 1 et 2 de son traité d'astronomie intitulé *Harmonices Mundi* (1619), il découvrit un autre ensemble de six prototiles apériodiques. Il trouva ensuite un autre ensemble de prototiles apériodiques ne comportant que quatre formes géométriques distinctes. Enfin, il identifia deux prototiles (auxquelles le mathématicien iconoclaste britannique John Horton Conway, qui n'était jamais à court de noms originaux visant à susciter autour des sujets qu'il jugeait d'intérêt, donna le nom de *cerf-volant* et de *fléchette*) ne produisant que des pavages non périodiques du plan [8 ; 10, ch. 11].

Aucun des pavages du plan obtenus par Penrose ne peut être décrit comme un motif répété (autrement ces pavages seraient périodiques). Ils jouissent cependant tous d'une propriété de *quasi-périodicité* : toute portion finie du pavage, aussi imposante soit-elle, se répète infiniment dans celui-ci. De plus, certains d'entre eux présentent une invariance par rotation d'angle de  $72^\circ$  (cela s'avérera important dans ce qui suit).

La question quant à savoir si la solution de Penrose est optimale est longtemps demeurée l'un des plus intrigants et fascinants problèmes en suspens de la théorie de la tessellation et, plus largement, de la géométrie discrète. Puis, au printemps 2023, prenant le monde mathématique entièrement au dépourvu, un curieux quatuor formé d'un technicien d'imprimerie britannique à la retraite et de trois mathématiciens est parvenu à mettre le doigt sur une forme géométrique remarquable qui, à elle seule, engendre des pavages non périodiques du plan, mais aucun pavage périodique [12 ; 13].

D'ordinaire, les avancées et les progrès de la théorie de la tessellation ne tardent pas à être mis à profit par architectes et artistes, et ce, depuis des temps immémoriaux. Partout à travers le monde s'est

---

2. Penrose partageait avec son père un vif intérêt pour les mathématiques récréatives, de même que pour les objets inutiles. C'est d'ailleurs à ce duo père-fils que l'on doit la célèbre représentation en deux dimensions d'un escalier formant une boucle et que l'on peut monter indéfiniment (ou descendre, selon le sens de rotation) puisque l'on revient continuellement à son point de départ.

développé l'art de couvrir les murs et les sols avec un motif répété<sup>3</sup> (nous y reviendrons d'ailleurs sur les pavages du plan lorsque nous aborderons les œuvres artistiques de Maurits Cornelis Escher). De tels motifs ont également été employés, depuis l'antiquité, dans la confection de tapis, de tapisseries, de vêtements et de courtepintes.

Outre les considérations artistiques, il n'est pas déraisonnable de croire que la théorie de la tessellation peut avoir des incidences industrielles. En effet, le défi consistant à trouver la façon dont il faut s'y prendre pour découper, à l'aide d'un emporte-pièce, un maximum de pièces d'une forme donnée dans une surface plane de grande dimension tout en limitant les pertes est, à la base, un problème qui concerne la théorie de la tessellation [1 ; 3].

Il serait exagéré de dire que Roger Penrose se pencha sur la question des pavages aperiodiques du plan à la manière d'un dilettante. Toutefois, il est clair qu'il s'agissait pour lui d'une activité qui était de l'ordre du divertissement mathématique. Il était sans doute bien loin de se douter que ces travaux allaient contribuer à rendre possible le développement d'un nouveau champ d'études situé à l'interface de la physique et de la chimie.

En 1982, alors qu'il travaillait sur un alliage d'aluminium et de manganèse rapidement solidifié, le scientifique israélo-américain Dan Shechtman obtint un spécimen qui présentait distinctement une structure cristalline, mais dont la structure atomique n'était pas périodique (ce qui, selon la théorie en vigueur établie depuis deux siècles, était impossible). De plus, le spécimen cristallin obtenu par Shechtman présentait une évidente invariance par rotation d'angle de  $72^\circ$ , ce qui, en soi, semblait suggérer l'existence d'un lien entre ces structures cristallines et les pavages aperiodiques de Penrose.

Différentes explications potentielles furent avancées. Mais en définitive, aucune d'elles ne put survivre à une application du principe du rasoir d'Occam et il fallut se rendre à l'évidence : Shechtman avait découvert une nouvelle variété de cristaux désormais appelés *quasi-cristaux*.

---

3. C'est dans la civilisation islamique que l'art de la mosaïque a atteint les plus hauts sommets de raffinement et d'exubérance. S'agit-il d'une heureuse conséquence de l'interdiction, dans la religion musulmane, de la production de représentations figuratives d'êtres animés ? On ne saurait l'affirmer avec certitude.

Nul ne saurait ébranler la foi en la véracité d'une théorie biséculaire sans avoir pris le temps de procéder à la validation de la méthodologie employée, à la contre-vérification des résultats et à l'examen méticuleux de la robustesse des données recueillies. On comprend donc aisément pourquoi il fallut deux ans à Shechtman et à ses collaborateurs pour trouver le courage de soumettre leurs résultats aux regards inquisiteurs de la communauté scientifique.

La parution de leur article [11], en novembre 1984, marqua le début d'une véritable révolution scientifique dans le domaine de la cristallographie. En moins de temps qu'il ne faut pour le dire, d'autres structures cristallines non périodiques furent découvertes et des centaines d'articles sur le sujet furent publiés<sup>4</sup>. Enfin, Dan Shechtman se vit remettre le prix Nobel de chimie 2011 pour sa découverte des quasi-cristaux.

Dans ses mémoires [6], Gardner revient sur cet épisode surprenant de l'histoire des sciences : « [Les quasi-cristaux] constituent un merveilleux exemple de la façon dont une découverte mathématique, faite sans la moindre réflexion sur la manière dont elle peut s'appliquer à la réalité, peut malgré tout s'avérer avoir été anticipée par Mère Nature ! » Pour le dire avec les mots de Marcel Proust, le temps perdu par Roger Penrose à rêvasser aux objets mathématiques qui semblent complètement frivoles et inutiles fut ultimement retrouvé.

## Références

- [1] Gardner, M. (1975, août). « Mathematical Games: More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds and polyhexes ». *Scientific American*, 233 (2), 112-115. [www.jstor.org/stable/24949870]
- [2] Gardner, M. (1977, janvier). « Mathematical Games: Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles ». *Scientific American*, 236 (1), 110-121. [www.jstor.org/stable/24953856]
- [3] Gardner, M. (1988). « Tiling with Polyominoes, Polyiamonds, and Polyhexes ». Ch. 14 dans *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman & Co.
- [4] Gardner, M. (1989). « Penrose Tiling ». Ch. 1 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... And the Return of Dr. Matrix*. W. H. Freeman & Co.
- [5] Gardner, M. (1989). « Penrose Tiling II ». Ch. 2 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... And the Return of Dr. Matrix*. W. H. Freeman & Co.
- [6] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus. The autobiography of Martin Gardner*. Princeton University Press.
- [7] Penrose, R. (1974). « The role of aesthetics in pure and applied mathematical research ». *Bull. Inst. Math. Appl.*, 10, 266-271.

---

4. Au moment d'écrire ces lignes, l'article de Shechtman et ses collaborateurs a été cité dans plus de 8000 articles savants.

- [8] Penrose, R. (1979). «Pentaplexity a class of non-periodic tilings of the plane». *The mathematical intelligencer*, 2 (1), 32-37.
- [9] Roberts, S. (2009). *King of infinite space: Donald Coxeter, the man who saved geometry*. Bloomsbury Publishing USA.
- [10] Roberts, S. (2015). *Genius at play: the curious mind of John Horton Conway*. Bloomsbury Publishing USA.
- [11] Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., et Cahn, J. W. (1984). «Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry». *Physical review letters*, 53 (20), 1951.
- [12] Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S., et Goodman-Strauss, C. (2023). «An aperiodic monotile». *arXiv preprint arXiv: 2303.10798*.
- [13] Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S., et Goodman-Strauss, C. (2023). «A chiral aperiodic monotile». *arXiv preprint arXiv: 2305.17743*.