

MARJORIE RUTH RICE ET LES PAVAGES PENTAGONAUX DU PLAN

*I could make the whole matter clear to you as the noonday sun,
if it were not that you are wedded to the theory
that you can't understand mathematics!*

CHARLES SANDERS PEIRCE, *LETTER TO WILLIAM JAMES* (DATE INCONNUE).

Imaginons que l'on dispose d'une quantité illimitée de tuiles de formes quelconques, mais toutes identiques. S'il y a une façon d'assembler ces pièces de manière à recouvrir l'entièreté du plan¹ sans qu'il y ait de chevauchement et sans laisser d'interstices ou de trous, alors on dit que ces tuiles permettent de réaliser un pavage du plan (aussi appelé une *tessellation*²).

De l'antiquité jusqu'à ce jour, les pavages du plan n'ont cessé d'intriguer et de captiver. Étant donné le grand nombre de chroniques *Mathematical Games* que Gardner consacra à divers aspects de la *théorie de la tessellation* (voir par exemple [1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6]) et considérant son penchant marqué pour la combinatoire, la géométrie discrète et pour l'art inspiré des mathématiques, on peut assurément affirmer que les pavages du plan figurent parmi les sujets mathématiques qui lui tenaient le plus à cœur.

Les anciens Grecs ont démontré qu'il n'y a que trois polygones réguliers³ qui permettent de paver le plan, soit les triangles équilatéraux, les carrés (imaginons un échiquier s'étendant à l'infini) et les hexagones réguliers (il suffit de produire une structure alvéolaire analogue à celle des nids d'abeilles ; ces structures alvéolaires peuvent également être observées dans le graphite, une forme cristalline particulière du carbone).

De même qu'il est possible de couvrir entièrement le plan avec des tuiles carrées sans les placer parfaitement côte à côte (pensons

1. On entend ici un espace euclidien à deux dimensions, c'est-à-dire une surface plate illimitée.

2. Ce terme dérive du latin *tessellae*, qui signifie « mosaïque ».

3. Un polygone régulier est une figure géométrique plane fermée équilatérale (tous ses côtés ont la même longueur) et équiangle (tous les angles internes ont la même mesure).

à la façon dont les rangées de blocs d'un mur de brique sont décalées les unes par rapport aux autres), on peut paver le plan avec des triangles équilatéraux non alignés. En revanche, pour paver le plan avec des hexagones, il faut impérativement que ceux-ci partagent un côté.

En relâchant la contrainte voulant que les tuiles du pavage doivent être des polygones réguliers, le problème consistant à déterminer quelles formes géométriques permettent de paver le plan devient considérablement plus exigeant, mais également beaucoup plus intéressant.

Comme le souligne Gardner dans son texte de juillet 1975 [1 ; 4], les géomètres sont en mesure de montrer qu'il est impossible de recouvrir entièrement le plan sans chevauchement ni interstice avec une infinité de tuiles identiques ayant la forme d'un polygone convexe de plus de six côtés. Cela signifie que l'on peut restreindre la portée des recherches et n'étudier que les polygones convexes à trois, quatre, cinq et six côtés.

Or, on peut produire un pavage du plan à partir de n'importe quel triangle. En effet, il suffit de joindre d'abord les côtés correspondants de deux triangles identiques de manière à obtenir un parallélogramme, puis de mettre côte à côte les parallélogrammes pour former une bande infinie et, enfin, de placer ces bandes les unes par-dessus les autres.

Il est presque aussi aisé de démontrer qu'on peut produire un pavage du plan avec tout quadrilatère. Gardner a d'ailleurs présenté une esquisse de démonstration particulièrement limpide dans les pages de la revue *Scientific American* [1 ; 4].

Les choses se compliquent lorsque l'on considère les polygones convexes à cinq côtés. On sait depuis 1918, suivant la publication de la thèse de doctorat du mathématicien allemand Karl Reinhardt (1895-1941), qu'il existe au moins cinq types distincts de pavages pentagonaux. Sans se prononcer catégoriquement sur la question, Reinhardt suggérait à mots couverts que ces cinq types constituaient en fait une liste exhaustive. Quelle ne fut donc pas la surprise lorsque, en 1968, Richard Brandon Kershner, le directeur adjoint de l'Applied Physics Laboratory de l'Université Johns Hopkins, annonça en grande pompe avoir trouvé trois types de pavages pentagonaux n'ayant pas été répertoriés par Reinhardt, portant ainsi le total à huit [7].

Martin Gardner consacra sa chronique *Mathematical Games* de juillet 1975 [1 ; 4] à faire connaître au plus grand nombre les travaux de Kershner. Dans son texte, Gardner répéta l'affirmation de Kershner selon laquelle la liste des huit types de pavages du plan par des pentagones convexes était exhaustive. Or, moins d'un mois s'était écoulé depuis la parution de la chronique que Gardner reçut une lettre de la part d'un informaticien dénommé Richard E. James III qui indiquait comment concevoir un pavage pentagonal du plan qui avait échappé tant à Reinhardt qu'à Kershner. Gardner eut donc la difficile tâche d'informer Richard Kershner que sa conviction qu'il n'existait que huit façons de paver le plan en assemblant des pentagones convexes identiques était en définitive sans fondement. Ce dernier encaissa le coup avec philosophie.

L'annonce, par Gardner en marge de sa chronique de décembre 1975 [3 ; 6] que le problème de la classification de tous les types de pavages du plan par des polygones convexes à cinq côtés n'était – contrairement à ce qu'on croyait – en fin de compte pas encore résolu éveilla la curiosité et l'intérêt d'une autre lectrice, Marjorie Ruth Rice (1923-2017). Cette femme au foyer, mère de cinq enfants, comptait parmi les plus ferventes adeptes des chroniques du grand vulgarisateur. Dans son enthousiasme, elle se ruait sur la boîte aux lettres dès que le facteur y déposait le numéro de *Scientific American* (pourtant adressé à son fils) afin de pouvoir lire les écrits de Gardner avant que ce soit d'autre dans la maisonnée.

Inspirée par cette nouvelle découverte inattendue, Rice entreprit de consacrer – à l'insu de son mari et de ses enfants afin de ne pas s'exposer aux moqueries – ses rares temps libres à dessiner des diagrammes en quête de nouvelles façons de paver le plan à l'aide de pentagones. Compensant une culture mathématique limitée (elle se résumait à une maîtrise approximative des contenus du curriculum mathématique dispensé à l'école primaire et secondaire) par un esprit méthodique, une patience d'ange et une détermination à toute épreuve, Rice s'affaira à développer son propre système de notation pour représenter les contraintes et les relations entre les côtés et les angles des pentagones. Cette notation singulière lui permettait de générer des configurations susceptibles de faire l'affaire. Il lui restait ensuite à vérifier expérimentalement lesquelles de ces configurations permettaient réellement de paver le plan.

En février 1976, raisonnablement convaincue d'avoir découvert un type de pavage pentagonal inédit, Marjorie Rice écrit à Martin Gardner. Ce dernier, s'estimant incapable de valider par lui-même les dires de Rice, fit appel à Doris J. Schattschneider, une mathématicienne américaine ayant fait carrière au Moravian College, une université située à Bethlehem en Pennsylvanie. Titulaire d'un doctorat en mathématiques de l'Université Yale (1966), Schattschneider est connue pour avoir abondamment écrit au sujet des pavages du plan, notamment ceux exploités par l'artiste néerlandais Maurits Cornelis Escher dans ses œuvres. De prime abord, Schattschneider réagit avec scepticisme. Mais, au terme d'un examen minutieux qui requit qu'elle se familiarise avec la notation bizarroïde développée par Rice, Schattschneider n'eut d'autre choix que de reconnaître la validité des résultats de la mathématicienne amateur.

La fabuleuse histoire de l'incursion de Marjorie Rice dans le monde des mathématiques fondamentales ne s'arrête pas là. Elle découvrit deux autres types de pentagones pavant le plan au cours de l'année 1976, puis encore un autre en 1977, portant ainsi le total à 13.

La découverte par Marjorie Rice de quatre nouveaux types de pavages pentagonaux ne fit jamais l'objet d'une chronique *Mathematical Games*. Gardner en fit toutefois mention dans un addenda à la reproduction de sa chronique de juillet 1975 [4]. Quant à Schattschneider, elle consacra plusieurs articles aux travaux de Rice, dont un texte intitulé *In Praise of Amateurs* [11] dans lequel elle esquisse la méthodologie insolite employée par Marjorie Rice.

À ce jour, donc, 15 classes de polygones convexes à 5 côtés pavant le plan ont été identifiées. Le 14^e type fut découvert en 1985 par Rolf Stein, un étudiant aux cycles supérieurs en mathématiques à l'Université de Dortmund, en Allemagne [12]. Quant au 15^e, il fut découvert en 2015 par Casey Mann, Jeniffer McLoud-Mann et David Von Derau, 3 mathématiciens du campus de Bothell de l'Université de Washington [8].

Il appert que, pour la troisième fois dans l'histoire, certains spécialistes avancent qu'il se pourrait que la liste des types de pavages pentagonaux connus soit exhaustive. À la différence des deux autres fois, cependant, il ne s'agit pas d'une affirmation sans preuve. En effet, Michaël Rao, de l'École nationale supérieure de Lyon, affirma en mai 2017 avoir fait la preuve de l'exhaustivité de la liste. En date d'octobre 2022, sa preuve, accessible en ligne [9], demeure sujette

à validation par la communauté mathématique. Nos espoirs de voir cette question être enfin résolue seront-ils une fois de plus déçus ? L'avenir nous le dira.

Références

- [1] Gardner, M. (1975, juillet). « Mathematical Games: On tessellating the plane with convex polygon tiles». *Scientific American*, 233 (1), 112-119. [www.jstor.org/stable/24949848]
- [2] Gardner, M. (1975, août). « Mathematical Games: More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds and polyhexes ». *Scientific American*, 233 (2), 112-115. [www.jstor.org/stable/24949870]
- [3] Gardner, M. (1975, décembre). « Mathematical Games: A random assortment of puzzles, together with reader responses to earlier problems ». *Scientific American*, 233 (6), 116-119. [www.jstor.org/stable/24949967]
- [4] Gardner, M. (1988). « Tiling with Convex Polygons ». Ch. 13 dans *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman & Co.
- [5] Gardner, M. (1988). « Tiling with Polyominoes, Polyiamonds, and Polyhexes ». Ch. 14 dans *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman & Co.
- [6] Gardner, M. (1988). « The Sixth Symbol and Other Problems ». Ch. 16 dans *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman & Co.
- [7] Kershner, R. B. (1968). « On paving the plane ». *The American Mathematical Monthly*, 75 (8), 839-844.
- [8] Mann, C., McLoud-Mann, J., et Von Derau, D. (2018). « Convex pentagons that admit i-block transitive tilings ». *Geometriae Dedicata*, 194 (1), 141-167.
- [9] Rao, M. (2017). Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. *arXiv preprint arXiv:1708.00274*.
- [10] Reinhardt, K. (1918). *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*.
- [11] Schattschneider, D. (1981). « In praise of amateurs ». Dans *The Mathematical Gardner*, 140-166. Springer, Boston, MA.
- [12] Schattschneider, D. (1985). « A new pentagon tiler ». *Mathematics Magazine*, 58 (5), 308.