
Article

L'inégalité-mère

GOLSA MASHREGHI
Université Laval

FRÉDÉRIC MORNEAU-GUÉRIN
Département Éducation TÉLUQ

Résumé

Nous proposons une lecture rétro-mathématique d'un ensemble d'inégalités classiques. En adoptant une démarche de rétro-ingénierie conceptuelle, nous cherchons à identifier les principes minimaux nécessaires à leur démonstration. Nous montrons que plusieurs résultats fondamentaux — notamment l'inégalité arithmético-géométrique, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et celle de Bernoulli — peuvent être obtenus de manière systématique à partir de deux ingrédients seulement : la positivité du carré et le principe d'induction mathématique.

Mots clés : Inégalités classiques ; rétro-mathématique ; principes minimaux ; induction mathématique ; positivité du carré ; Cauchy–Schwarz ; inégalité arithmético-géométrique ; inégalité de Bernoulli ; fondements de l'analyse ; pédagogie mathématique.

Classification mathématique par matières (MSC2020) : 03F35, 26D15, 26A09, 00A35, 97E20

1 Introduction

En logique mathématique, il existe un programme de recherche appelé *rétro-mathématique* (*reverse mathematics*) [6, 7]. Le nom est révélateur : il s'inspire directement de la notion de *reverse engineering* — ou *rétro-ingénierie* — bien connue en informatique et en ingénierie.

La rétro-ingénierie consiste à prendre un système déjà fonctionnel (par exemple un logiciel, un circuit, ou un dispositif mécanique), à le démonter conceptuellement, puis à analyser ses

composants afin de comprendre comment il fonctionne et quels sont ses éléments essentiels. On ne part pas du plan de construction : on part du produit fini et on remonte vers sa structure interne.

La rétro-mathématique applique exactement cette idée aux théorèmes.

Au lieu de travailler à l'intérieur d'un cadre logique déjà admis — qu'il soit formellement axiomatisé ou simplement présumé — elle renverse la démarche. Elle part de théorèmes familiers et cherche à répondre à une question apparemment simple :

Quels sont, au juste, les principes (logiques ou ensemblistes) minimaux requis pour établir tel théorème ?

Concrètement, on fixe d'abord une théorie de base extrêmement faible, juste assez riche pour formaliser des objets élémentaires comme les entiers, les suites ou les fonctions simples. À partir de cette base minimale, on tente de démontrer un théorème classique. Puis, vient l'étape décisive : on montre que ce théorème est lui-même suffisamment puissant pour reconstruire précisément le jeu d'axiomes qui a servi à le prouver.

Lorsque ces deux directions coïncident — c'est-à-dire lorsque le théorème est démontrable à partir des axiomes, et les axiomes sont récupérables à partir du théorème — on dit que le théorème et le système axiomatique sont équivalents au-dessus de la théorie de base.

Cette approche fournit plusieurs éclairages profonds.

Elle offre d'abord une mesure calibrée de la force logique des énoncés mathématiques. Deux résultats peuvent sembler très différents en surface, tout en reposant exactement sur les mêmes principes fondamentaux.

Elle permet aussi de révéler des hypothèses puissantes dissimulées dans des théorèmes en apparence élémentaires. Des raisonnements courants mobilisent parfois, sans que cela ne soit explicité, des principes forts comme un principe de choix (ex. : choix fini, choix dénombrable, choix dépendant, axiome du choix ...), une forme de compacité (ex. : compacité usuelle, pseudocompacité, compacité dénombrable, compacité locale, compacité de type Lindelöf ...) ou une forme de complétude (ex. : complétude métrique, complétude séquentielle, complétude au sens de Čech ...).

Enfin — et c'est sans doute l'aspect le plus fécond sur le plan pédagogique — la rétro-mathématique expose le coût logique de nos raisonnements ordinaires. Elle rend explicite ce qui est habituellement implicite et fournit ainsi un langage précis pour comparer des principes issus de domaines très différents.

On peut donc voir la rétro-mathématique comme une forme de rétro-ingénierie conceptuelle : on démonte les théorèmes pour identifier leurs composants fondamentaux. On cherche les « particules élémentaires » du raisonnement mathématique, en privilégiant des critères de minimalité, de non-redondance et de puissance démonstrative, puis on vérifie que ces particules suffisent effectivement à reconstruire les pans ciblés de la théorie.

C'est dans cet esprit général que s'inscrit le présent texte — mais avec une nuance importante.

Nous n'allons pas chercher les particules élémentaires. En effet, nous ne descendrons pas jusqu'au niveau des axiomes formels. Notre regard se place à une échelle plus grande.

Disons, par analogie, que nous travaillerons à l'échelle des molécules — voire des structures supramoléculaires. Ou encore, si l'on préfère une métaphore biologique, nous chercherons à mettre en lumière l'un des nucléotides fondamentaux à partir desquels on peut composer, de multiples façons, l'ADN possible d'un pan de l'analyse.

Notre objectif est plus modeste, mais aussi plus concret : identifier un petit nombre de principes mathématiques simples et montrer qu'ils possèdent une puissance générative remarquable.

Il importe toutefois de distinguer deux démarches conceptuellement différentes. D'une part, la rétro-mathématique au sens strict cherche à isoler des principes *minimaux*, c'est-à-dire des systèmes d'axiomes dont aucun élément ne peut être retranché sans perdre la capacité de démontrer un théorème donné. D'autre part, la démarche adoptée ici vise plutôt des principes *suffisants*, choisis pour leur simplicité et leur fécondité, sans prétendre qu'ils soient minimaux au sens logique.

Autrement dit, il ne s'agit pas de déterminer le coût axiomatique optimal des résultats considérés, mais de mettre en évidence un noyau opératoire particulièrement économique et transparent, à partir duquel ces résultats peuvent être reconstruits.

En particulier, nous allons défendre l'idée qu'une large famille d'inégalités classiques — notamment l'inégalité arithmético-géométrique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de Bernoulli — peut être reconstruite de manière systématique à partir d'un seul ingrédient explicite : la positivité du carré,

$$x^2 \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Cette inégalité, anodine en apparence, constitue ce que l'on peut appeler une *inégalité-mère*.

Bien entendu, nos raisonnements font aussi appel, en arrière-plan, aux axiomes de corps et aux propriétés usuelles qui découlent de l'entrelacement entre la structure algébrique des nombres réels et leur structure d'ordre. Mais ce maillage abstrait s'incarne ici de façon emblématique dans la positivité du carré, qui sera le principe effectivement mobilisé au départ de chacune de nos constructions.

Il existe, bien sûr, de nombreuses démonstrations élégantes des inégalités classiques. Certaines s'appuient sur la géométrie euclidienne, d'autres sur la convexité, les dérivées ou des outils plus avancés. Ces approches sont puissantes, mais elles peuvent parfois masquer le mécanisme qui fait véritablement tourner la machine.

Le propos du présent texte n'est pas de pratiquer la rétro-mathématique au sens technique, avec une analyse fine de systèmes axiomatiques. Il s'agit plutôt d'une lecture structurale : mettre en évidence, au cœur d'une série de résultats familiers, un principe opératoire unique que l'on voit agir à découvert.

L'idée directrice sera constamment la même, mais elle sera exprimée soit de manière directe,

soit par l'intermédiaire de résultats qui en découlent. Dans les cas fondamentaux, on choisit une expression dont la positivité est immédiate, on développe cette positivité pour faire apparaître l'inégalité cherchée et, enfin, on identifie les cas d'égalité en étudiant les zéros de l'expression considérée. Dans les autres cas, les inégalités seront obtenues à partir de ces premiers résultats, qui jouent alors le rôle de relais tout en demeurant ultimement fondés sur ce même principe. Lorsque le nombre de variables devient arbitraire, le principe d'induction mathématique intervient naturellement comme pont logique entre un cas de base et sa propagation à toute taille finie.

Dans les pages qui suivent, nous verrons comment cette stratégie permet de reconstruire successivement, et dans cet ordre, l'inégalité arithmético-géométrique, l'inégalité géométrico-harmonique, l'inégalité de Bernoulli, l'inégalité de Cauchy-Schwarz en dimension finie, puis l'inégalité arithmético-quadratique, en gardant toujours au premier plan le même principe : partir d'une expression manifestement positive (typiquement un carré), puis en exploiter le développement pour faire apparaître l'inégalité recherchée.

2 Les inégalités pythagoriciennes

2.1 L'inégalité arithmético-géométrique

Nous entamons maintenant l'étude des *inégalités des moyennes*. Ce choix n'est pas arbitraire. Parmi les nombreuses familles d'inégalités classiques, celles reliant les moyennes occupent une position à la fois centrale et fondatrice. Elles constituent souvent la première manifestation concrète du pouvoir génératif de l'inégalité-mère de la positivité du carré.

Comparer plusieurs nombres réels strictement positifs conduit naturellement à vouloir les résumer par une valeur unique, représentative de l'ensemble. Une telle valeur est appelée une *moyenne*. Elle condense l'information contenue dans les données en un seul nombre, situé entre la plus petite et la plus grande des valeurs considérées. Cette simple observation reflète déjà une idée profonde : une moyenne est une opération monotone composante par composante, au sens où une augmentation de certaines valeurs (sans diminution des autres) ne peut entraîner une diminution de la moyenne.

Mais il n'existe pas une seule manière naturelle de résumer plusieurs nombres.

Si l'on privilégie l'addition, c'est-à-dire une perspective additive, on est conduit à la moyenne arithmétique. Si l'on privilégie la multiplication, c'est-à-dire une perspective multiplicative, on est conduit à la moyenne géométrique. Ces deux constructions traduisent deux façons différentes d'interpréter la notion de « valeur moyenne ».

Dès lors, une question fondamentale surgit : ces différentes moyennes sont-elles comparables ? Existe-t-il une hiérarchie naturelle entre elles ?

La réponse est affirmative, et cette hiérarchie est loin d'être accidentelle. Elle s'enracine directement dans les propriétés les plus élémentaires de l'ordre sur $\mathbb{R}$ et, plus profondément encore, dans la positivité du carré.

Définition. Soient des nombres réels $x_1, \dots, x_n > 0$.

1. La *moyenne arithmétique* de $x_1, \dots, x_n$ est le nombre

$$A(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n};$$

2. La *moyenne géométrique* de $x_1, \dots, x_n$ est le nombre

$$G(x_1, \dots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Ces deux constructions apparaissent naturellement dans des contextes très différents — statistique, croissance composée, analyse, théorie des nombres. La moyenne arithmétique est adaptée aux situations où les quantités se combinent par accumulation (notes, erreurs, distances, variations), tandis que la moyenne géométrique intervient plutôt dans des phénomènes gouvernés par des facteurs multiplicatifs (taux de croissance, rendements successifs, proportions).

Bien sûr, on peut multiplier des longueurs pour obtenir des aires, ou des volumes, mais cette multiplication change alors la nature des éléments en jeu : elle ne produit plus une grandeur du même type. À l'inverse, l'addition préserve les dimensions. Ces deux manières d'agréger des données positives obéissent donc à des logiques différentes, et rien n'impose a priori qu'elles soient directement comparables.

C'est pourtant précisément ce que fait l'inégalité arithmético-géométrique : elle met en relation ces deux opérations hétérogènes et exprime une hiérarchie naturelle entre elles.

Avant d'envisager l'énoncé général, commençons par le cas le plus simple — celui de deux nombres réels strictement positifs. Ce cas contient déjà l'essentiel du mécanisme et met à nu le ressort fondamental sous-jacent : la positivité d'un carré convenablement choisi.

Inégalité arithmético-géométrique à 2 variables

Soit $x_1, x_2 > 0$. Alors,

$$G(x_1, x_2) \leq A(x_1, x_2),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $x_1 = x_2$.

Démonstration. Appliquons l'inégalité-mère de la positivité du carré à la quantité

$$x := \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}.$$

On obtient alors

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0.$$

En développant le membre de gauche, on obtient

$$x_1 - 2\sqrt{x_1x_2} + x_2 \geq 0.$$

En réorganisant les termes, on peut voir que cette inégalité est équivalente à

$$2\sqrt{x_1x_2} \leq x_1 + x_2,$$

ou encore

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Enfin, l'égalité a lieu si et seulement si

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2},$$

et donc à $x_1 = x_2$.

■

La démonstration précédente met en lumière le mécanisme à l'oeuvre : un fait algébrique très simple — la positivité du carré — suffit, lorsqu'il est appliqué à une expression judicieusement choisie, à produire une inégalité de portée plus large.

Cette première démonstration, modeste, joue néanmoins un rôle emblématique. Elle montre concrètement comment un principe d'apparence anodin — la positivité du carré — peut engendrer une relation profonde entre deux quantités construites selon des logiques différentes.

Mais cette inégalité marque surtout le point de départ d'un processus plus large. Dans un premier temps, en la combinant avec le principe d'induction mathématique — constituant élémentaire de toute théorie qui recouvre l'arithmétique — nous pourrions étendre l'inégalité arithmético-géométrique du cas de deux variables à celui d'un nombre arbitraire n de variables.

Dans un second temps, cette forme générale servira de point d'appui pour faire apparaître d'autres inégalités fondamentales. Autrement dit, à partir d'un fait algébrique élémentaire et d'un principe logique universel, se met progressivement en place un véritable procédé génératif, dont nous allons maintenant récolter les premiers fruits.

Inégalité arithmético–géométrique (cas général)

Soit $x_1, \dots, x_n > 0$. Alors,

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Avant de passer à la démonstration, il est important de comprendre la stratégie employée.

Une tentative naturelle consisterait à démontrer l'inégalité arithmético–géométrique pour $n = 2$ (c'est maintenant fait), puis à montrer que le cas général pour n implique le cas $n + 1$, ce qui permet de conclure qu'elle est vraie pour tout nombre entier $n \geq 2$ par le principe d'induction mathématique. Toutefois, cette approche se heurte à une difficulté : la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique ne se comportent pas de façon compatible lorsqu'on ajoute une variable supplémentaire. En particulier, il n'existe pas de relation simple reliant

$$A(x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad A(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

ou encore

$$G(x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

qui permettrait de conclure directement.

En revanche, une structure favorable apparaît lorsque le nombre de variables est une puissance de 2. Dans ce cas, on peut regrouper les variables par blocs de même taille, appliquer l'hypothèse d'induction à chaque bloc, puis utiliser l'inégalité arithmético–géométrique à deux variables pour combiner les résultats. Cette observation motive une induction sur les nombres naturels de la forme $n = 2^k$, où k désigne lui-même un nombre naturel.

Une fois l'inégalité démontrée pour tous les $n = 2^k$, il devient possible de traiter un nombre arbitraire de variables en complétant la famille initiale $x_1, \dots, x_n$ par des termes égaux à leur moyenne arithmétique $A(x_1, \dots, x_n)$ pour obtenir un total de 2^{k+1} termes (à savoir un nombre de termes correspondant à la prochaine puissance de 2). Cette technique permet de ramener le cas général (où n est un nombre naturel non nul quelconque) au cas déjà établi (lorsque n est une puissance de 2).

Démonstration. — ÉTAPE 1 : INDUCTION SUR LES PUISSANCES DE 2

Étant donné un nombre naturel $k \geq 1$, considérons l'énoncé suivant :

$$\mathcal{P}(k) := \quad \ll \forall x_1, \dots, x_{2^k} > 0, \quad \sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}. \gg$$

1. *Initialisation.* Pour $k = 1$, on a $2^k = 2$ et l'énoncé $\mathcal{P}(1)$ correspond exactement à l'inégalité arithmético-géométrique à deux variables :

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2},$$

qui a été démontrée précédemment.

2. *Hérédité.* Supposons que l'énoncé $\mathcal{P}(k)$ soit vrai pour un certain nombre entier $k \geq 1$ et soit

$$\underbrace{x_1, \dots, x_{2^k}}_{2^k \text{ termes}}, \underbrace{x_{2^k+1}, \dots, x_{2^{k+1}}}_{2^k \text{ termes}} > 0.$$

Posons

$$A_1 := \frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} \quad \text{et} \quad A_2 := \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{(x_1 + \dots + x_{2^k}) + (x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}})}{2 \cdot 2^k} \\ &= \frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\ &= \frac{A_1 + A_2}{2}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse d'induction appliquée à A_1 , puis à A_2 , on a

$$A_1 \geq \sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}} \quad \text{et} \quad A_2 \geq \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdots x_{2^{k+1}}}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{A_1 + A_2}{2} \geq \frac{\sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}} + \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdots x_{2^{k+1}}}}{2}.$$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à deux variables au membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{A_1 + A_2}{2} &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{x_{2^k+1} \cdots x_{2^{k+1}}}} \\ &= \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdots x_{2^{k+1}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\frac{x_1 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdots x_{2^{k+1}}}.$$

Ainsi, nous avons montré que si l'énoncé $\mathcal{P}(k)$ est vrai, alors l'énoncé $\mathcal{P}(k+1)$ l'est également.

Comme l'énoncé $\mathcal{P}(1)$ est vrai (c'est le cas de deux variables), et comme la validité de $\mathcal{P}(k)$ entraîne celle de $\mathcal{P}(k+1)$ pour tout entier $k \geq 1$, le principe d'induction mathématique permet de conclure que l'énoncé $\mathcal{P}(k)$ est vérifié pour tout entier $k \geq 1$.

Autrement dit, l'inégalité arithmético-géométrique est démontrée pour tout nombre de variables de la forme $n = 2^k$.

— ÉTAPE 2 : PASSAGE AU CAS GÉNÉRAL

Soit maintenant $n \geq 1$ quelconque. L'objectif est de démontrer que

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n).$$

L'idée consiste à se ramener à un cas déjà traité en complétant la famille initiale jusqu'à obtenir un nombre de termes égal à une puissance de 2, le tout sans modifier sa moyenne arithmétique.

Choisissons un entier k tel que

$$2^k < n \leq 2^{k+1},$$

et posons

$$A := \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{de même que} \quad G := \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Définissons alors

$$x_{n+1} = \dots = x_{2^{k+1}} := A. \quad (2.1)$$

Par l'étape 1, l'inégalité arithmético-géométrique pour les 2^{k+1} nombres $x_1, \dots, x_{2^{k+1}}$ donne :

$$\sqrt[2^{k+1}]{x_1 \dots x_n \cdot x_{n+1} \dots x_{2^{k+1}}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}},$$

ce qui, compte tenu de (2.1), est équivalent à

$$\sqrt[2^{k+1}]{x_1 \dots x_n \cdot A^{2^{k+1}-n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n + (2^{k+1} - n)A}{2^{k+1}}.$$

Or, d'une part

$$\begin{aligned} \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \dots x_n \cdot A^{2^{k+1}-n}} &= \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \dots x_n} \cdot A^{(2^{k+1}-n)/2^{k+1}} \\ &= G^{n/2^{k+1}} \cdot A^{(2^{k+1}-n)/2^{k+1}} \\ &= A \left(\frac{G}{A} \right)^{n/2^{k+1}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + \dots + x_n + (2^{k+1} - n)A}{2^{k+1}} &= \frac{nA + (2^{k+1} - n)A}{2^{k+1}} \\ &= A. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$A \left(\frac{G}{A} \right)^{n/2^{k+1}} \leq A.$$

Comme $A > 0$, on peut diviser par A , ce qui entraîne

$$\left(\frac{G}{A} \right)^{n/2^{k+1}} \leq 1,$$

et par conséquent

$$G^{n/2^{k+1}} \leq A^{n/2^{k+1}}.$$

Enfin, en élevant à la puissance $\frac{2^{k+1}}{n}$, on obtient

$$G \leq A,$$

à savoir

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

— ÉTAPE 3 : IDENTIFICATION DES CONDITIONS DE SATURATION DE L'INÉGALITÉ

La condition d'égalité découle immédiatement des conditions d'égalité dans les inégalités utilisées : elle impose que $x_1 = \cdots = x_n$. ■

2.2 L'inégalité géométrico-harmonique

Jusqu'ici, nous avons associé à n nombres réels positifs $x_1, \dots, x_n$ deux valeurs moyennes particulièrement naturelles : la moyenne arithmétique

$$A(x_1, \dots, x_n) := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

et la moyenne géométrique

$$G(x_1, \dots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Ces deux quantités expriment deux manières distinctes de produire une valeur représentative pour $x_1, \dots, x_n$: la première par *addition* puis *division par n* , la seconde par *multiplication* puis *racine n -ième*. Il existe toutefois une troisième moyenne, tout aussi classique, qui apparaît lorsqu'on se place non plus du côté des nombres eux-mêmes, mais du côté de leurs *inverses*. Cette idée est naturelle dès qu'on s'intéresse à des situations où les grandeurs pertinentes sont de type « par unité » (par exemple, un temps par distance, ou un coût par objet) : dans ces contextes, ce sont souvent les inverses multiplicatifs $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$ qui se combinent de façon simple.

Définition. Soient des nombres réels $x_1, \dots, x_n > 0$. On appelle *moyenne harmonique* de $x_1, \dots, x_n$ le nombre réel

$$H(x_1, \dots, x_n) := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Inégalité géométrico–harmonique. Soient des nombres réels $x_1, \dots, x_n > 0$. Alors

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n),$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Démonstration. Appliquons l'inégalité arithmético–géométrique aux nombres positifs $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$. On obtient

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Comme tous les termes sont strictement positifs, on peut prendre les inverses. L'inégalité s'inverse alors, ce qui donne

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Donc

$$G(x_1, \dots, x_n) \geq H(x_1, \dots, x_n).$$

De plus, l'égalité dans l'inégalité arithmético–géométrique appliquée à $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$ a lieu si et seulement si

$$\frac{1}{x_1} = \dots = \frac{1}{x_n},$$

c'est-à-dire si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$. ■

2.3 L'inégalité de Bernoulli

L'inégalité arithmético-géométrique occupe une place tout à fait centrale dans l'étude des inégalités. Il serait difficile d'en exagérer l'importance : elle est à l'origine d'un grand nombre de résultats fondamentaux.

Un exemple frappant de sa portée apparaît lorsqu'on cherche à comparer une puissance $(1+t)^\alpha$ avec son approximation linéaire $1+\alpha t$. Cette comparaison est naturelle : le développement de $(1+t)^k$, pour un nombre naturel k , commence après tout par

$$(1+t)^k = 1+kt+\dots,$$

ce qui suggère que, pour des valeurs modestes de t , le terme $1+kt$ fournit une approximation raisonnable. Le résultat suivant, connu sous le nom d'*inégalité de Bernoulli*, précise cette intuition.

Inégalité de Bernoulli. Soit $t \geq -1$ et soit $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. Si $0 < \alpha \leq 1$, alors

$$(1+t)^\alpha \leq 1+\alpha t; \tag{2.2}$$

2. Si $\alpha \geq 1$ ou si $\alpha < 0$, alors

$$(1+t)^\alpha \geq 1+\alpha t. \tag{2.3}$$

Dans tous les cas, l'égalité a lieu si et seulement si $t = 0$.

Démonstration. Soit m et n des nombres naturels tels que $1 \leq m < n$ et soit $\alpha = \frac{m}{n}$. Appliquons l'inégalité arithmético-géométrique à n nombres positifs définis par

$$x_1 = \dots = x_m = 1+t \quad \text{et} \quad x_{m+1} = \dots = x_n = 1.$$

La moyenne géométrique vaut alors

$$\sqrt[n]{(1+t)^m \cdot 1^{n-m}} = (1+t)^{\frac{m}{n}},$$

tandis que la moyenne arithmétique est

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_n) &= \frac{m(1+t) + (n-m) \cdot 1}{n} \\ &= \frac{mt + n}{n}. \end{aligned}$$

L'inégalité arithmético-géométrique nous donne donc

$$(1+t)^{\frac{m}{n}} \leq 1 + \frac{m}{n}t,$$

c'est-à-dire

$$(1+t)^\alpha \leq 1+\alpha t,$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ vérifiant $0 < \alpha \leq 1$.

Passons maintenant à l'inégalité (2.3).

- Si $1+\alpha t \leq 0$, l'inégalité est immédiate puisque $(1+t)^\alpha \geq 0$;
- Supposons que $1+\alpha t > 0$ et $\alpha \geq 1$.

Dans l'inégalité (2.2), substituons α par $\frac{1}{\alpha} \in (0,1]$ et t par αt . On obtient

$$(1+\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha t) = 1+t.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\alpha \geq 1$, on conserve le sens de l'inégalité et on obtient

$$1+\alpha t \leq (1+t)^\alpha,$$

ce qui démontre (2.3) pour $\alpha \geq 1$;

- Le cas $\alpha < 0$ se traite de manière analogue en remarquant que l'inversion transforme (2.2) en (2.3).

Dans tous les cas, l'égalité a lieu si et seulement si $t = 0$, ce qui correspond à l'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. ■

3 L'inégalité de Cauchy–Schwarz et quelques-unes des conséquences

3.1 L'inégalité de Cauchy–Schwarz

Jusqu'à présent, notre étude des inégalités nous a conduits à des résultats comme l'inégalité arithmético-géométrique ou l'inégalité de Bernoulli. Ces inégalités comparent des expressions construites à partir de nombres réels en utilisant essentiellement des opérations simples, comme l'addition ou la multiplication. Elles permettent, par exemple, de relier une somme à un produit, ou d'estimer une puissance à l'aide d'une expression plus facile à manipuler.

Une étape supplémentaire est franchie lorsque l'on cesse de travailler uniquement avec des nombres isolés et que l'on considère plutôt des vecteurs de la forme

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

Dans ce cadre, les objets que l'on compare ne sont plus de simples sommes ou produits, mais des combinaisons linéaires et des produits scalaires, qui tiennent compte des interactions entre les différentes composantes.

L'inégalité de Cauchy–Schwarz est un résultat fondamental s'inscrivant dans ce contexte. Elle établit un lien précis entre la somme des produits terme à terme de deux vecteurs et les sommes des carrés de leurs composantes. Cette inégalité joue un rôle central en algèbre linéaire ainsi que dans l'étude des séries, des intégrales et des probabilités. D'un point de vue historique, elle porte les noms d'Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) et d'Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), bien que des formes voisines aient été connues plus tôt dans des contextes particuliers.

Ce qui distingue l'inégalité de Cauchy–Schwarz des résultats précédents est qu'elle ne repose pas sur une comparaison directe terme à terme, mais sur une idée structurelle : la positivité d'une certaine expression quadratique. Cette approche illustre que le fait que

$$x^2 \geq 0$$

pour tout réel x constitue un élément de base pour démontrer d'autres inégalités fondamentales.

Inégalité de Cauchy–Schwarz. Soit $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ des nombres réels. Alors

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2). \quad (3.1)$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel λ tel que

$$u_k = \lambda v_k \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n.$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz peut être démontrée de multiples façons : par des arguments géométriques, par des considérations algébriques, ou encore en s'appuyant sur les propriétés des produits scalaires. La démonstration que nous présenterons ici — due à Titu Andreescu et Bogdan Enescu [1] — est particulièrement astucieuse et élégante. Elle s'inscrit parfaitement dans l'esprit de notre démarche rétro-mathématique : elle montre, de façon très directe, comment un résultat central de l'analyse peut être reconstruit à partir de l'inégalité-mère de la positivité du carré, en suivant exactement le même schéma que précédemment pour démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à 2 variables. On construit une quantité manifestement positive, on en exploite le développement algébrique, puis on en déduit l'inégalité recherchée.

Lemme. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $x > 0, y > 0$. Alors,

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}.$$

Démonstration du lemme. Appliquons l'inégalité-mère de la positivité du carré à la quantité

$$ay - bx.$$

On obtient alors

$$(ay - bx)^2 \geq 0.$$

En développant l'expression de gauche, on obtient

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0.$$

Cela équivaut à

$$a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy.$$

À présent, comme $x > 0$ et $y > 0$, on a $xy > 0$. On peut donc diviser l'inégalité par xy sans que cela ne change le sens de. On trouve

$$\frac{a^2y^2}{xy} + \frac{b^2x^2}{xy} \geq \frac{2abxy}{xy}.$$

En simplifiant ensuite terme à terme, on obtient

$$\frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} \geq 2ab.$$

On ajoute maintenant a^2 et b^2 de part et d'autre :

$$a^2 + \frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2,$$

c'est-à-dire

$$a^2 + \frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} + b^2 \geq (a + b)^2.$$

Le membre de gauche se réécrit

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} + b^2 &= a^2 \left(1 + \frac{y}{x}\right) + b^2 \left(1 + \frac{x}{y}\right) \\ &= a^2 \left(\frac{x+y}{x}\right) + b^2 \left(\frac{x+y}{y}\right). \end{aligned}$$

En factorisant $(x + y)$ dans les deux premiers termes, on obtient :

$$(x + y) \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) \geq (a + b)^2.$$

Enfin, comme $x + y > 0$, on peut diviser par $x + y$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y},$$

ce qui est exactement le résultat voulu. ■

Démonstration de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Le cas $n = 1$ étant trivial, on peut donc considérer sans perte de généralité que $n \geq 2$.

- Notons que le lemme ci-dessus s'*auto-généralise*. En effet, si on remplace b par $b + c$ et y par $y + z$, on obtient

$$\frac{(a + b + c)^2}{x + y + z} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{(b + c)^2}{y + z}.$$

Il suffit alors d'appliquer à nouveau le lemme au second terme de l'expression de droite pour obtenir

$$\frac{(a + b + c)^2}{x + y + z} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{(b + c)^2}{y + z} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z};$$

- En itérant l'idée qui précède n fois (on fait ici un raisonnement inductif implicite qui pourrait être entièrement formalisé par une preuve par induction explicite et rigoureuse), on obtient

$$\frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{x_1 + \dots + x_n} \leq \frac{a_1^2}{x_1} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n}; \quad (3.2)$$

- L'inégalité (3.2) étant valable pour tout choix des réels a_i et des réels strictement positifs x_i , on l'applique au choix particulier

$$a_i = u_i v_i \quad \text{et} \quad x_i = v_i^2.$$

(Le cas $v_i = 0$ sera traité séparément dans l'étude du cas d'égalité.) On obtient

$$\frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2}{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \leq \frac{u_1^2 v_1^2}{v_1^2} + \frac{u_2^2 v_2^2}{v_2^2} + \dots + \frac{u_n^2 v_n^2}{v_n^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2}{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \leq u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2);$$

- L'inégalité (3.2) est obtenue par itération du lemme. Par conséquent, l'égalité dans (3.2) a lieu si et seulement si l'égalité a lieu à *chacune* des étapes. Cela force les rapports à être constants :

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n}.$$

Ainsi, il existe un réel λ tel que

$$a_i = \lambda x_i \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On applique (3.2) avec $a_i = u_i v_i$ et $x_i = v_i^2$. Lorsque $v_i \neq 0$, la condition d'égalité $a_i = \lambda x_i$ devient

$$u_i v_i = \lambda v_i^2 \quad \implies \quad u_i = \lambda v_i.$$

Si $v_i = 0$, alors $u_i v_i = 0$ et l'égalité dans Cauchy–Schwarz impose aussi $u_i = 0$ (sinon le membre de droite augmente strictement tandis que le membre de gauche reste inchangé). On retrouve donc la condition classique : l'égalité dans (3.1) a lieu si et seulement si les familles $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ sont proportionnelles, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_i = \lambda v_i$ pour tout i . ■

3.2 L'inégalité arithmético–quadratique

Après avoir introduit et comparé trois moyennes classiques – les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique – il est naturel d'en considérer une autre qui leur est apparentée : la *moyenne quadratique*. Sur le plan conceptuel, cette dernière est intimement liée à l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Définition. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On appelle *moyenne quadratique* de $x_1, \dots, x_n$ le nombre réel

$$Q(x_1, \dots, x_n) := \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Cette moyenne intervient naturellement dès que l'on considère des quantités au carré, par exemple dans l'étude de la variance ou des normes euclidiennes. Il est alors raisonnable de se demander comment elle se compare à la moyenne arithmétique correspondante. L'inégalité suivante apporte une réponse précise à cette question et constitue une première manifestation de l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans un cadre élémentaire.

Inégalité arithmético–quadratique. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Alors,

$$A(x_1, \dots, x_n) \leq Q(x_1, \dots, x_n),$$

c'est-à-dire

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}},$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Démonstration. Appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz à $x_1, \dots, x_n$ et $1, \dots, 1$. On obtient

$$(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 1)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2),$$

c'est-à-dire

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

En divisant par n^2 de part et d'autre, on obtient

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

On en déduit

$$\left| \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Comme tout nombre réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue, on obtient en particulier

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Enfin, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz a lieu si et seulement si les deux familles $x_1, \dots, x_n$ et $1, \dots, 1$ sont proportionnelles, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel λ tel que

$$x_k = \lambda \cdot 1 \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n.$$

Cela équivaut à $x_1 = \cdots = x_n$, ce qui conclut la démonstration.

■

Remarque. La question de la comparabilité des différentes moyennes, soulevée plus haut, admet une réponse claire. Pour tout n -uplet de réels strictement positifs $(x_1, \dots, x_n)$, on a la hiérarchie suivante :

$$H(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq Q(x_1, \dots, x_n).$$

De plus, l'égalité a lieu dans chacune de ces inégalités si et seulement si

$$x_1 = \cdots = x_n.$$

Ainsi, les différentes notions de moyenne introduites précédemment s'ordonnent naturellement selon leur nature, de la plus « petite » à la plus « grande ».

4 Conclusion

Nous avons proposé une lecture « rétro-mathématique » d'une petite constellation d'inégalités classiques. Sans entrer dans la technique de la rétro-mathématique au sens strict, l'objectif était de mettre en évidence un principe simple : la positivité du carré,

$$x^2 \geq 0,$$

et le rôle qu'il peut jouer dans la démonstration d'inégalités de natures et d'usages variés.

Le fil conducteur est resté volontairement simple. On choisit une expression dont la positivité est immédiate, typiquement sous la forme d'un carré ; on développe et on réorganise ; enfin, on

dégage les conditions d'égalité en identifiant les zéros. D'autres résultats sont ensuite obtenus à partir de ces premières inégalités, qui jouent alors le rôle de relais. Le principe d'induction mathématique intervient enfin comme moyen de propagation.

Dans ce cadre, l'inégalité-mère de la positivité du carré apparaît comme un principe effectivement génératif. Elle ne résume pas à elle seule toute l'analyse des inégalités — nos preuves mobilisent aussi, en arrière-plan, les axiomes de corps, l'ordre, et les règles usuelles de calcul — mais elle en constitue ici le point d'appui explicite et répété. C'est elle qui, pour ainsi dire, « fait tourner la machine ».

Bibliographie

- [1] Titu ANDREESCU et Bogdan ENESCU : *Mathematical Olympiad Treasures*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] P. S. BULLEN : *Handbook of means and their inequalities*, volume 560 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003. Revised from the 1988 original [P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, *Means and their inequalities*, Reidel, Dordrecht ; MR0947142].
- [3] P. S. BULLEN, D. S. MITRINOVIĆ et P. M. VASIĆ : *Means and their inequalities*, volume 31 de *Mathematics and its Applications (East European Series)*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988. Translated and revised from the Serbo-Croatian.
- [4] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA : *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1952 edition.
- [5] Pavel Petrovich KOROVKIN : *Inequalities*. Blaisdell Publishing Company.
- [6] John STILLWELL : *Reverse mathematics*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2018. Proofs from the inside out.
- [7] John STILLWELL : Reverse mathematics. *In Handbook of the history and philosophy of mathematical practice*, pages 1963–1988. Springer, Cham, [2024] ©2024.