

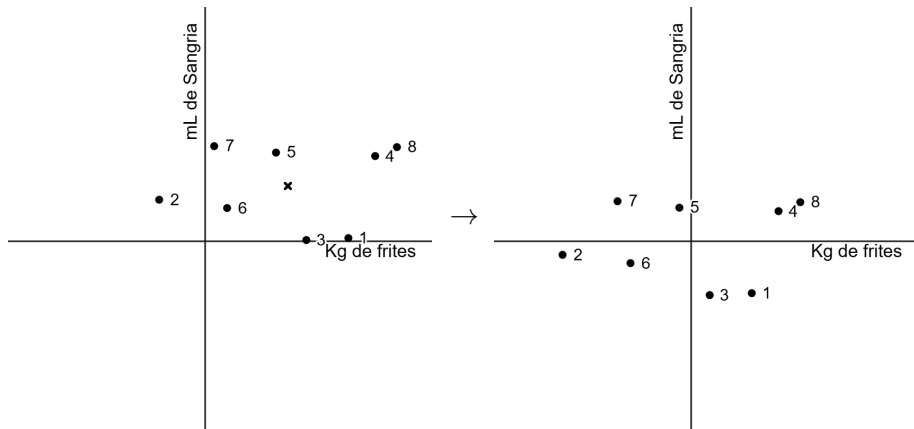
Quand le lissage crée des ellipses

Ludovick Bouthat

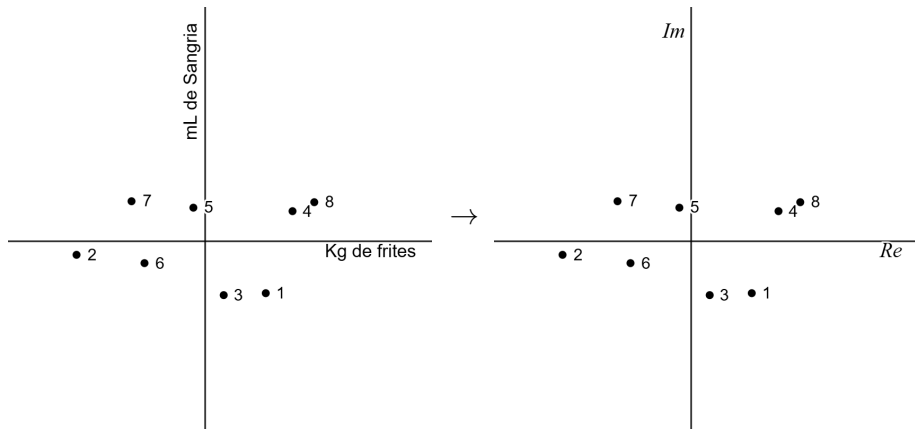
Université Laval

$\pi/2025$

Observation 1 (Indépendance de la moyenne)



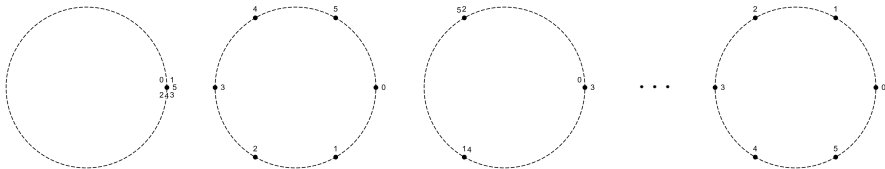
Observation 2 (La puissance des nombres complexes)



Observation 3 (Une base cyclique)

- Si $\zeta_n := e^{-2\pi i/n}$, alors les vecteurs

$$\omega_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_1 := \begin{bmatrix} \zeta_n^0 \\ \zeta_n^1 \\ \vdots \\ \zeta_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \omega_2 := \begin{bmatrix} \zeta_n^0 \\ \zeta_n^2 \\ \vdots \\ \zeta_n^{2(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \omega_{n-1} := \begin{bmatrix} \zeta_n^0 \\ \zeta_n^{n-1} \\ \vdots \\ \zeta_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$



forment une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$.

Changement de base

- On peut donc représenter n'importe quel vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ dans la base $\Omega := \{\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\}$.

Changement de base

- On peut donc représenter n'importe quel vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ dans la base $\Omega := \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$.
- Si $\mathbf{z} = \tilde{z}_0\omega_0 + \tilde{z}_1\omega_1 + \tilde{z}_2\omega_2 + \dots + \tilde{z}_{n-1}\omega_{n-1}$, alors

$$\mathbf{z} = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \dots \mid \omega_{n-1}] \begin{bmatrix} \tilde{z}_0 \\ \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{n-1} \end{bmatrix} =: W\tilde{\mathbf{z}}$$

Changement de base

- On peut donc représenter n'importe quel vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ dans la base $\Omega := \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$.
- Si $\mathbf{z} = \tilde{z}_0\omega_0 + \tilde{z}_1\omega_1 + \tilde{z}_2\omega_2 + \dots + \tilde{z}_{n-1}\omega_{n-1}$, alors

$$\mathbf{z} = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \dots \mid \omega_{n-1}] \begin{bmatrix} \tilde{z}_0 \\ \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{n-1} \end{bmatrix} =: W\tilde{\mathbf{z}}$$

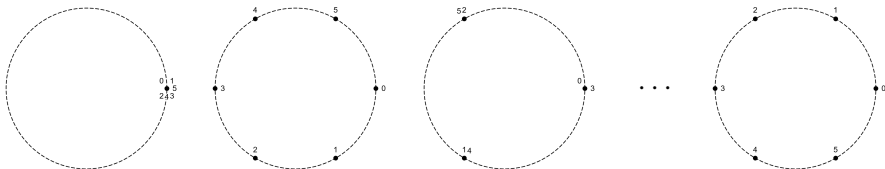
En particulier,

$$\tilde{\mathbf{z}} = W^{-1}\mathbf{z}$$

Remarque importante

- $W = [\omega_0 | \omega_1 | \cdots | \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$

• Puisque l'on suppose que $z_0 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 0$, on a $\tilde{z}_0 = 0$.



Le processus itératif

$$\bullet W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}] \quad \bullet \tilde{z} = W^{-1}z \quad \bullet \tilde{z}_0^{(0)} = 0$$

- On considère un vecteur $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ quelconque. *SPDG on suppose que*
 $z_0^{(0)} + z_1^{(0)} + \cdots + z_{n-1}^{(0)} = 0.$

Le processus itératif

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$

- On considère un vecteur $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ quelconque. *SPDG on suppose que*
 $z_0^{(0)} + z_1^{(0)} + \cdots + z_{n-1}^{(0)} = 0$.

- On envoie le vecteur $z^{(k)}$ au vecteur $z^{(k+1)} \in \mathbb{C}^n$ définit par

$$z_j^{(k+1)} = \frac{z_j^{(k)} + z_{j+1}^{(k)}}{2}.$$

Le processus itératif

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$

- On considère un vecteur $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ quelconque. *SPDG on suppose que*
 $z_0^{(0)} + z_1^{(0)} + \cdots + z_{n-1}^{(0)} = 0$.

- On envoie le vecteur $z^{(k)}$ au vecteur $z^{(k+1)} \in \mathbb{C}^n$ définit par

$$z_j^{(k+1)} = \frac{z_j^{(k)} + z_{j+1}^{(k)}}{2}.$$

- On normalise le vecteur $z^{(k)}$ par une certaine constante $\rho \geq 1$.

La transformation $\mathbf{z}^{(k)} \mapsto \mathbf{z}^{(k+1)}$

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{\mathbf{z}} = W^{-1}\mathbf{z}$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$

- On a donc

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} z_0^{(k+1)} \\ z_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0^{(k)} \\ z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix} =: \rho T_2 \mathbf{z}^{(k)}.$$

La transformation $\mathbf{z}^{(k)} \mapsto \mathbf{z}^{(k+1)}$

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{\mathbf{z}} = W^{-1}\mathbf{z}$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$

- On a donc

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} z_0^{(k+1)} \\ z_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0^{(k)} \\ z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix} =: \rho T_2 \mathbf{z}^{(k)}.$$

- Ainsi, on a itérativement

$$\mathbf{z}^{(k)} = (\rho T_2)^k \mathbf{z}^{(0)}.$$

Diagonalisation de T_k

- $W = [\omega_0 | \omega_1 | \dots | \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$
- $z^{(k)} = (\rho T_2)^k z^{(0)}$

• On a

$$T_2 = W \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) W^{-1} = W \Lambda W^{-1}.$$

Diagonalisation de T_k

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$
- $z^{(k)} = (\rho T_2)^k z^{(0)}$

- On a

$$T_2 = W \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) W^{-1} = W \Lambda W^{-1}.$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} z^{(k)} = (\rho T_2)^k z^{(0)} &\implies z^{(k)} = W(\rho \Lambda)^k W^{-1} z^{(0)} \\ &\implies W^{-1} z^{(k)} = (\rho \Lambda)^k (W^{-1} z^{(0)}) \\ &\implies \tilde{z}^{(k)} = (\rho \Lambda)^k \tilde{z}^{(0)} \\ &\implies \tilde{z}_j^{(k)} = (\rho \lambda_j)^k \tilde{z}_j^{(0)}, \quad \forall j. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de T_k

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$
- $\tilde{z}_j^{(k)} = (\rho\lambda_j)^k \tilde{z}_j^{(0)}$

- $\lambda_j := \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) e^{\frac{\pi ij}{n}}$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Les valeurs propres de T_k

$$\bullet W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}] \quad \bullet \tilde{z} = W^{-1}z \quad \bullet \tilde{z}_0^{(0)} = 0 \quad \bullet \tilde{z}_j^{(k)} = (\rho\lambda_j)^k \tilde{z}_j^{(0)}$$

- $\lambda_j := \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) e^{\frac{\pi i j}{n}}$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- $|\lambda_j|$ atteint son maximum en $j = 1$ et $j = n-1$ lorsque $j \neq 0$.

Les valeurs propres de T_k

$$\bullet W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}] \quad \bullet \tilde{\mathbf{z}} = W^{-1} \mathbf{z} \quad \bullet \tilde{z}_0^{(0)} = 0 \quad \bullet \tilde{z}_j^{(k)} = (\rho \lambda_j)^k \tilde{z}_j^{(0)}$$

- $\lambda_j := \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) e^{\frac{\pi i j}{n}}$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- $|\lambda_j|$ atteint son maximum en $j = 1$ et $j = n-1$ lorsque $j \neq 0$.
- On pose $\rho := \sec\left(\frac{\pi}{n}\right) = |\lambda_1|^{-1}$. On a donc $|\rho \lambda_j| = |\lambda_j|/|\lambda_1| < 1$ pour $2 \leq j \leq n-2$ et $|\rho \lambda_j| = |\lambda_j|/|\lambda_1| = 1$ pour $j = 1$ et $j = n-1$.

La limite

- $W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}]$
- $\tilde{z} = W^{-1}z$
- $\tilde{z}_0^{(0)} = 0$
- $\tilde{z}_j^{(k)} = (\rho\lambda_j)^k \tilde{z}_j^{(0)}$

- Il s'ensuit des remarques précédentes que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_j^{(2nk)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\rho\lambda_j)^{2nk} \tilde{z}_j^{(0)} = \begin{cases} \tilde{z}_j^{(0)} & \text{si } j = 1, n-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La limite

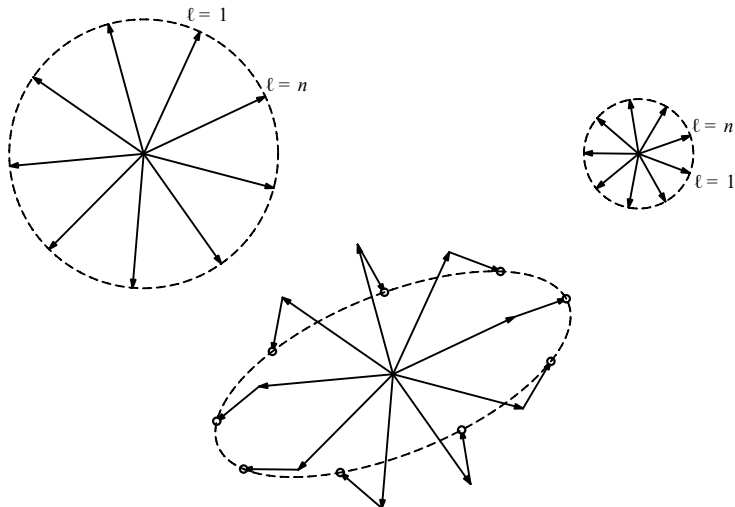
$$\bullet W = [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}] \quad \bullet \tilde{z} = W^{-1}z \quad \bullet \tilde{z}_0^{(0)} = 0 \quad \bullet \tilde{z}_j^{(k)} = (\rho\lambda_j)^k \tilde{z}_j^{(0)}$$

- Il s'ensuit des remarques précédentes que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_j^{(2nk)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\rho\lambda_j)^{2nk} \tilde{z}_j^{(0)} = \begin{cases} \tilde{z}_j^{(0)} & \text{si } j = 1, n-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} z^{(2nk)} &= W \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}^{(2nk)} \\ &= [\omega_0 \mid \omega_1 \mid \cdots \mid \omega_{n-1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{z}_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{z}_1 \omega_1 + \tilde{z}_{n-1} \omega_{n-1}. \end{aligned}$$

Pourquoi une ellipse?



Fin

Merci et bonne journée des maths!