

Le spectre du polytope de Birkhoff

Ludovick Bouthat

Université Laval

28 novembre 2025

Matrices stochastiques

Définition

Une matrice carrée S est dite stochastique si

- ① ses coefficients sont non-négatifs,
- ② la somme de chacune des ses lignes est égale à 1.

L'ensemble des matrices stochastiques d'ordre n est noté $\mathbb{S}_n$.

Exemple (Matrices stochastiques d'ordre 3)

$$S = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un problème spectral

Soit Ω_n l'ensemble de toutes les valeurs propres de toutes les matrices stochastiques, à savoir

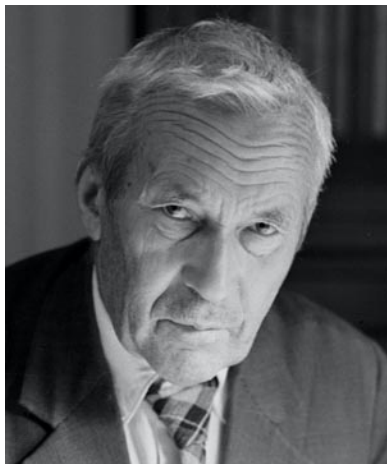
$$\begin{aligned}\Omega_n &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists S \in \mathbb{S}_n \text{ t.q. } \lambda \in \sigma(S)\} \\ &= \bigcup_{S \in \mathbb{S}_n} \sigma(S).\end{aligned}$$

Un problème spectral

Soit Ω_n l'ensemble de toutes les valeurs propres de toutes les matrices stochastiques, à savoir

$$\begin{aligned}\Omega_n &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists S \in \mathbb{S}_n \text{ t.q. } \lambda \in \sigma(S)\} \\ &= \bigcup_{S \in \mathbb{S}_n} \sigma(S).\end{aligned}$$

En 1938, Kolmogorov soulève le problème de caractériser l'ensemble Ω_n pour toute valeur de n .



Andreï Kolmogorov

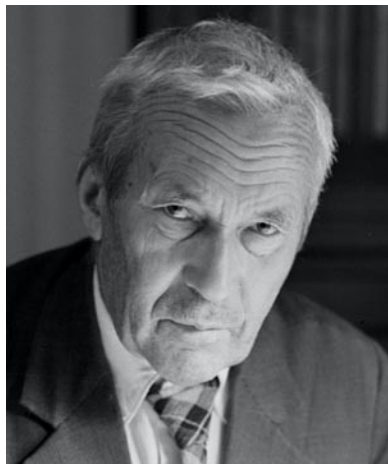
Un problème spectral

Soit Ω_n l'ensemble de toutes les valeurs propres de toutes les matrices stochastiques, à savoir

$$\begin{aligned}\Omega_n &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists S \in \mathbb{S}_n \text{ t.q. } \lambda \in \sigma(S)\} \\ &= \bigcup_{S \in \mathbb{S}_n} \sigma(S).\end{aligned}$$

En 1938, Kolmogorov soulève le problème de caractériser l'ensemble Ω_n pour toute valeur de n .

En 1951, Karpelevič obtient une description complète de Ω_n pour tous les n .



Andreï Kolmogorov

Le résultat de Karpelevič

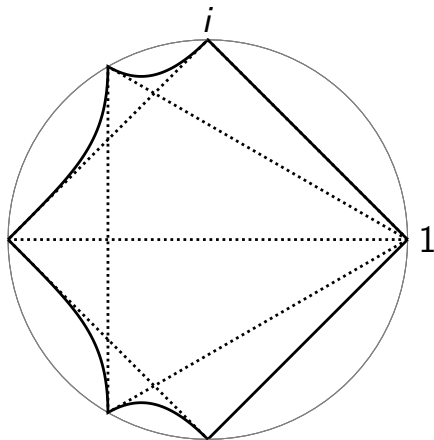
Théorème (Karpelevič, 1951 ; Ito, 1997)

La région Ω_n est symétrique par rapport à l'axe réel, est incluse dans le disque unité $|z| \leq 1$ et intercepte le cercle unité $|z| = 1$ aux points $e^{2\pi ia/b}$, où a et b sont des entiers premiers relativement satisfaisant $0 \leq a \leq b \leq n$. La courbe délimitant le bord de Ω_n est constituée de ces points et d'arcs curvilignes les reliant dans un ordre antihoraire. Si les extrémités d'un arc sont $e^{2\pi ia_1/b_1}$ et $e^{2\pi ia_2/b_2}$ ($b_1 \leq b_2$), alors l'arc est caractérisé par l'équation paramétrique

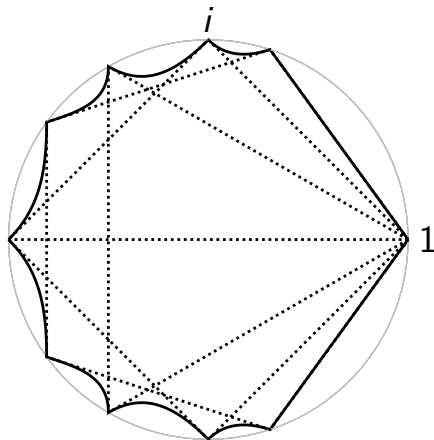
$$\lambda^{b_2}(\lambda^{b_1} - s)^{\lfloor n/b_1 \rfloor} = (1 - s)^{\lfloor n/b_1 \rfloor} \lambda^{b_1 \lfloor n/b_1 \rfloor},$$

où $s \in [0, 1]$ et $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction plancher.

Les régions de Karpelevič



La région Ω_4

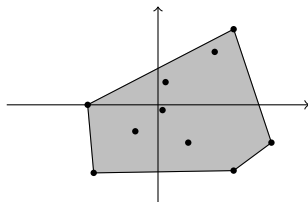


La région Ω_5

Idée de la preuve

Théorème (Dmitriev, Dynkin, 1946)

Soient $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $K_1 := \text{Conv}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Alors il existe une matrice stochastique $S \in \mathbb{S}_n$ telle que $S\vec{z} = \lambda\vec{z}$ (i.e., $\lambda \in \Omega_n$) si et seulement si $\lambda K_1 \subseteq K_1$.



Enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan

Matrices doublement stochastiques

Définition

Une matrice carrée D est dite doublement stochastique si

- ① ses coefficients sont non-négatifs,
- ② la somme de chacune des ses lignes est égale à 1,
- ③ la somme de chacune des ses colonnes est égale à 1.

L'ensemble des matrices doublement stochastiques d'ordre n est noté $\mathbb{D}_n$.

Exemple (Matrices doublement stochastiques d'ordre 3)

$$D = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question principale

Question principale (Mirsky, 1963)

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il une matrice doublement stochastique $D \in \mathbb{D}_n$ telle que λ est une valeur propre de D ? Plus précisément, comment caractériser l'ensemble

$$\omega_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists D \in \mathbb{D}_n \text{ t.q. } \lambda \in \sigma(D)\} = \bigcup_{D \in \mathbb{D}_n} \sigma(D)?$$

Propriétés de ω_n

- ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.

Propriétés de ω_n

- ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.
 $\implies$ On caractérisera ω_n seulement dans le plan complexe supérieur.

Propriétés de ω_n

- ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.
 $\implies$ On caractérisera ω_n seulement dans le plan complexe supérieur.
- ω_n est un ensemble connexe et étoilé à partir de 0.

Propriétés de ω_n

- ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.
 $\implies$ On caractérisera ω_n seulement dans le plan complexe supérieur.
- ω_n est un ensemble connexe et étoilé à partir de 0.
 $\implies$ On cherchera à caractériser l'équation polaire de la bordure de ω_n .

Propriétés de ω_n

- ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.
 $\implies$ On caractérisera ω_n seulement dans le plan complexe supérieur.
- ω_n est un ensemble connexe et étoilé à partir de 0.
 $\implies$ On cherchera à caractériser l'équation polaire de la bordure de ω_n .
- Si (λ, ν) est une paire de valeur/vecteur propre d'une matrice doublement stochastique D , alors la somme des coefficients de ν est nulle.

Propriétés de ω_n

- ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.
 $\implies$ On caractérisera ω_n seulement dans le plan complexe supérieur.
- ω_n est un ensemble connexe et étoilé à partir de 0.
 $\implies$ On cherchera à caractériser l'équation polaire de la bordure de ω_n .
- Si (λ, ν) est une paire de valeur/vecteur propre d'une matrice doublement stochastique D , alors la somme des coefficients de ν est nulle.
- Nous avons les inclusions $\omega_n \subseteq \Omega_n \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. En particulier, ω_n est contenu dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

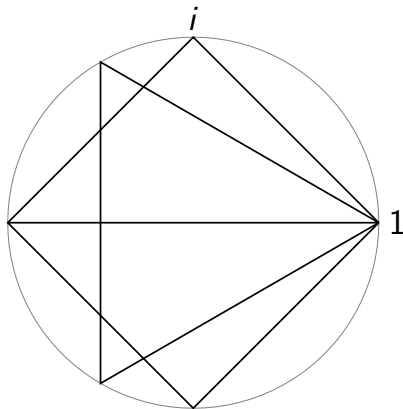
Une inclusion d'ensembles

Théorème (Perfect, Mirsky, 1965)

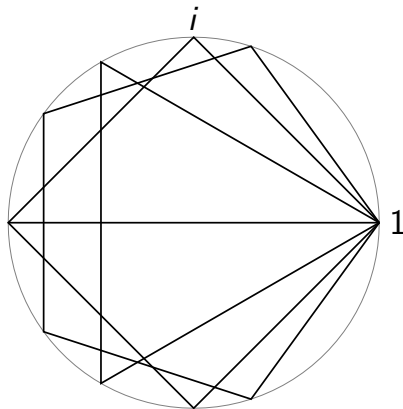
Soient $\zeta_k := e^{2\pi i/k}$ et $\Pi_k := \text{Conv}\{1, \zeta_k, \zeta_k^2, \dots, \zeta_k^{k-1}\}$. Alors pour $n \geq 1$,

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \dots \cup \Pi_n \subseteq \omega_n.$$

Quelques exemples



La région $\cup_{k=1}^4 \Pi_k$



La région $\cup_{k=1}^5 \Pi_k$

Conjecture de Perfect–Mirsky

Conjecture (Perfect, Mirsky, 1965)

$$\omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k =: PM_n.$$

Conjecture de Perfect–Mirsky

Conjecture (Perfect, Mirsky, 1965)

$$\omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k =: PM_n.$$

- La conjecture est trivialement vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.

Conjecture de Perfect–Mirsky

Conjecture (Perfect, Mirsky, 1965)

$$\omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k =: PM_n.$$

- La conjecture est trivialement vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.
- La conjecture a été vérifiée pour $n = 3$ par Perfect et Mirsky.

Conjecture de Perfect–Mirsky

Conjecture (Perfect, Mirsky, 1965)

$$\omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k =: PM_n.$$

- La conjecture est trivialement vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.
- La conjecture a été vérifiée pour $n = 3$ par Perfect et Mirsky.
- La conjecture a été vérifiée pour $n = 4$ en 2015 par Levick, Pereira et Kribs.

Conjecture de Perfect–Mirsky

Conjecture (Perfect, Mirsky, 1965)

$$\omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k =: PM_n.$$

- La conjecture est trivialement vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.
- La conjecture a été vérifiée pour $n = 3$ par Perfect et Mirsky.
- La conjecture a été vérifiée pour $n = 4$ en 2015 par Levick, Pereira et Kribs.
- Mashreghi et Rivard montrent en 2007 à l'aide d'un contre-exemple que la conjecture est FAUSSE pour $n = 5$!

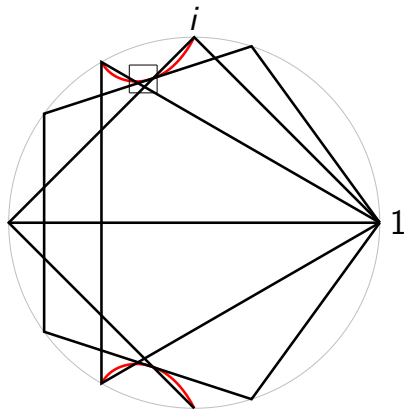
Le contre-exemple en question

Les matrices doublement stochastiques

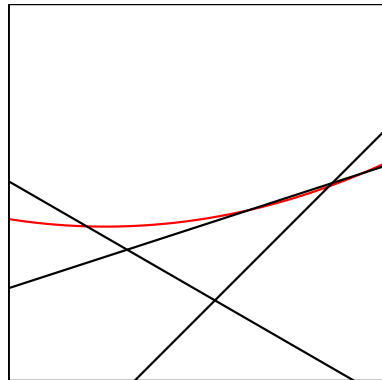
$$t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admettent des valeurs propres en dehors de $\bigcup_{k=1}^5 \Pi_k$ pour $t \in [0.4705275, 0.5490013]$.

La courbe exceptionnelle



La région de Perfect–Mirksy $\bigcup_{k=1}^5 \Pi_k$
et la courbe exceptionnelle de
Mashreghi–Rivard.



Zoom sur la courbe exceptionnelle
autour de $[-0.35, -0.2] \times [0.7, 0.85]$.

Théorème de Birkhoff

Théorème (Théorème de Birkhoff, 1946)

L'ensemble $\mathbb{D}_n$ des matrices doublement stochastiques d'ordre n est l'enveloppe convexe des matrices de permutation d'ordre n . De plus, les matrices de permutation sont précisément les points extrêmes de $\mathbb{D}_n$.

En particulier, toute matrice doublement stochastique admet une décomposition en une combinaison convexe de matrices de permutation.

Qu'en est-il des cas $n \geq 6$

- Pour $n \geq 6$, le statut de la conjecture demeure en suspend.

Qu'en est-il des cas $n \geq 6$

- Pour $n \geq 6$, le statut de la conjecture demeure en suspend.
- Toutefois, des travaux récents (2022) de Harlev, Johnson et Lim semblent indiquer la validité de la conjecture.

Qu'en est-il des cas $n \geq 6$

- Pour $n \geq 6$, le statut de la conjecture demeure en suspend.
- Toutefois, des travaux récents (2022) de Harlev, Johnson et Lim semblent indiquer la validité de la conjecture.
- Ils ont calculé les valeurs propres des matrices doublement stochastiques qui sont une combinaison convexe de deux matrices de permutation pour tout $n \leq 11$.

La majorisation

Définition

Soit $x_1^\downarrow \geq \dots \geq x_n^\downarrow$ l'arrangement décroissant des coefficients de $x = (x_1, \dots, x_n)$, et soit $x^\downarrow = (x_1^\downarrow, \dots, x_n^\downarrow)$. Alors y est majorisé par x , et on écrit $y \prec x$, si

$$\sum_{j=1}^k y_j^\downarrow \leq \sum_{j=1}^k x_j^\downarrow, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

avec égalité si $k = n$.

Exemple

$$\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \prec (a_1, \dots, a_n) \prec (1, 0, \dots, 0)$$

pour tout $a_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$) tels que $\sum_{j=1}^n a_j = 1$.

Le théorème de Hardy, Littlewood, Pólya, Schur et Horn

Théorème (Schur, 1923 ; HLP, 1929 ; Horn, 1954)

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Les énoncées suivants sont équivalents :

- ① $y = Dx$ pour une certaine matrice doublement stochastique D ;
- ② $y \prec x$;
- ③ $\sum_{i=1}^n \phi(y_i) \leq \sum_{i=1}^n \phi(x_i)$ pour toute fonction convexe ϕ ;
- ④ Il existe une matrice hermitienne dont les éléments de la diagonale principale sont donnés par y et les valeurs propres sont données par x .

Idée principale

Si $\mathbb{C}_0^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$, alors

$$\lambda = re^{i\theta} \in \omega_n \iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } D\vec{z} = \lambda\vec{z}$$

Idée principale

Si $\mathbb{C}_0^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$, alors

$$\lambda = re^{i\theta} \in \omega_n \iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } D\vec{z} = \lambda\vec{z}$$

$$\iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), D(e^{i\phi}\vec{z}) = \lambda(e^{i\phi}\vec{z})$$

Idée principale

Si $\mathbb{C}_0^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$, alors

$$\lambda = re^{i\theta} \in \omega_n \iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } D\vec{z} = \lambda\vec{z}$$

$$\iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), D(e^{i\phi}\vec{z}) = \lambda(e^{i\phi}\vec{z})$$

$$\implies \begin{aligned} &\exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), \\ &D \operatorname{Re}(e^{i\phi}\vec{z}) = \operatorname{Re}(re^{i(\phi+\theta)}\vec{z}) \end{aligned}$$

Idée principale

Si $\mathbb{C}_0^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$, alors

$$\begin{aligned}
 \lambda = re^{i\theta} \in \omega_n &\iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } D\vec{z} = \lambda\vec{z} \\
 &\iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), D(e^{i\phi}\vec{z}) = \lambda(e^{i\phi}\vec{z}) \\
 &\implies \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), \\
 &\quad D \operatorname{Re}(e^{i\phi}\vec{z}) = \operatorname{Re}(re^{i(\phi+\theta)}\vec{z}) \\
 (Dx=y \implies y \prec x) &\iff \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), r \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)}\vec{z}) \prec \operatorname{Re}(e^{i\phi}\vec{z})
 \end{aligned}$$

Idée principale

Si $\mathbb{C}_0^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n z_i = 0\}$, alors

$$\begin{aligned}
 \lambda = re^{i\theta} \in \omega_n &\iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } D\vec{z} = \lambda\vec{z} \\
 &\iff \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), D(e^{i\phi}\vec{z}) = \lambda(e^{i\phi}\vec{z}) \\
 &\implies \exists D \in \mathbb{D}_n, \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), \\
 &\quad D \operatorname{Re}(e^{i\phi}\vec{z}) = \operatorname{Re}(re^{i(\phi+\theta)}\vec{z}) \\
 (Dx=y \implies y \prec x) &\iff \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), r \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)}\vec{z}) \prec \operatorname{Re}(e^{i\phi}\vec{z}) \\
 (\text{def. de } \prec) &\iff \exists \vec{z} \in \mathbb{C}_0^n \text{ t.q. } \forall \phi \in [0, \pi), \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \\
 &\quad r \sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)}z_j)^\downarrow \leq \sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i\theta}z_j)^\downarrow.
 \end{aligned}$$

Une proposition intéressante ?

Proposition (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Soient $r, \theta \in \mathbb{R}$. Si $re^{i\theta} \in \omega_n$, alors

$$r \leq \max_{\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n} \min_{\substack{1 \leq k < n \\ \phi \in [0, \pi)}} \frac{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i\theta} z_j)^\downarrow}{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)} z_j)^\downarrow}.$$

Un corollaire intéressant ?

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Soit $R_n(\theta)$ l'équation polaire de la région de Perfect-Mirsky PM_n . Si

$$R_n(\theta) = \max_{\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n} \min_{\substack{1 \leq k < n \\ \phi \in [0, \pi)}} \frac{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i\theta} z_j)^\downarrow}{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)} z_j)^\downarrow}$$

alors $\omega_n = PM_n$.

Un corollaire intéressant ?

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Soit $R_n(\theta)$ l'équation polaire de la région de Perfect–Mirsky PM_n . Si

$$R_n(\theta) = \max_{\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n} \min_{\substack{1 \leq k < n \\ \phi \in [0, \pi)}} \frac{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i\theta} z_j)^\downarrow}{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)} z_j)^\downarrow}$$

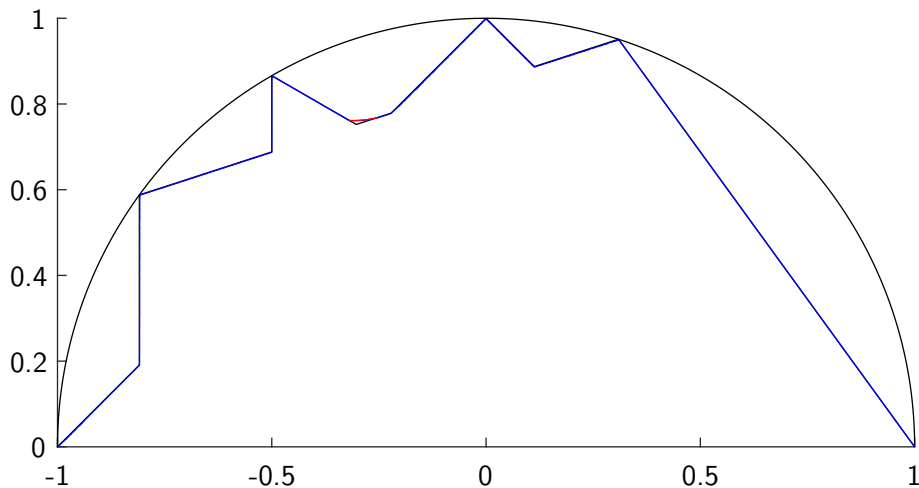
alors $\omega_n = PM_n$.

Remarque

La région de Perfect–Mirsky PM_n est caractérisée par l'équation polaire

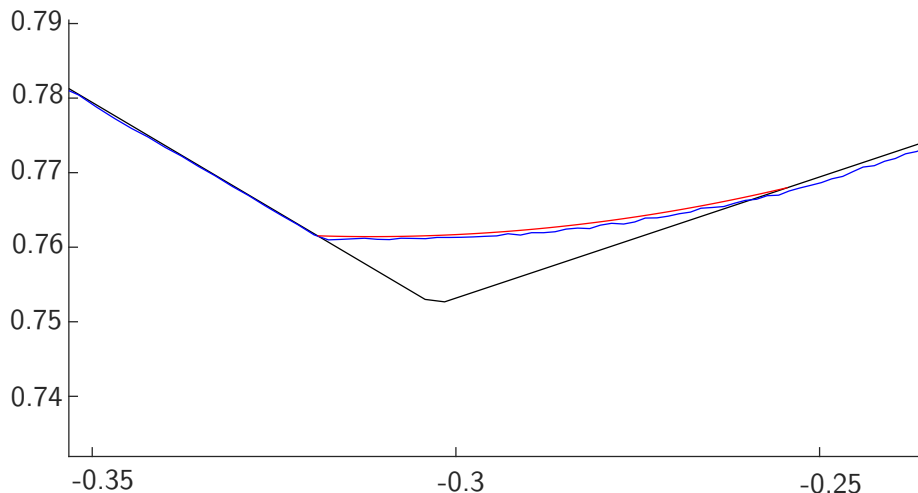
$$R_n(\theta) = \max_{b \in \{3, \dots, n\}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{b}\right)}{\cos\left(\frac{\pi(2\lceil b\theta/2\pi \rceil - 1)}{b} - \theta\right)}, \quad n \geq 4.$$

Calculs numériques



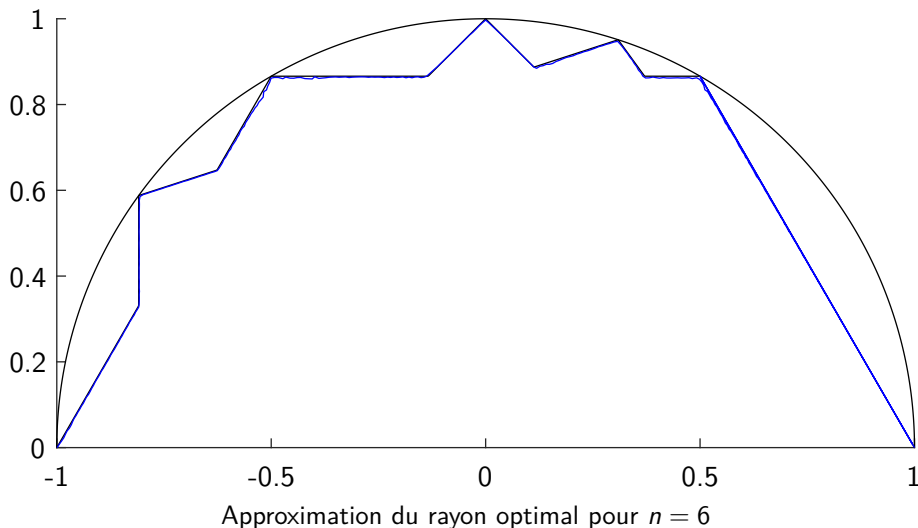
Approximation du rayon optimal pour $n = 5$

Calculs numériques

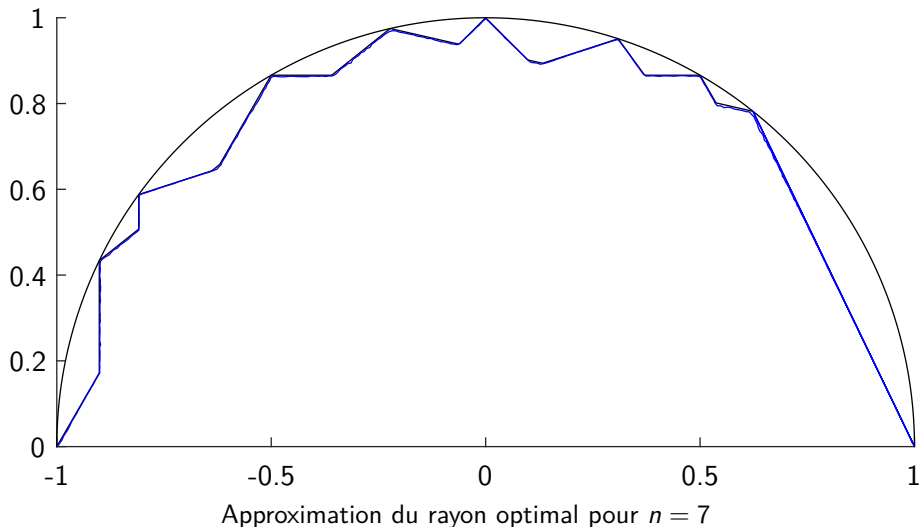


Zoom de la région exceptionnelle de l'approximation du rayon optimal

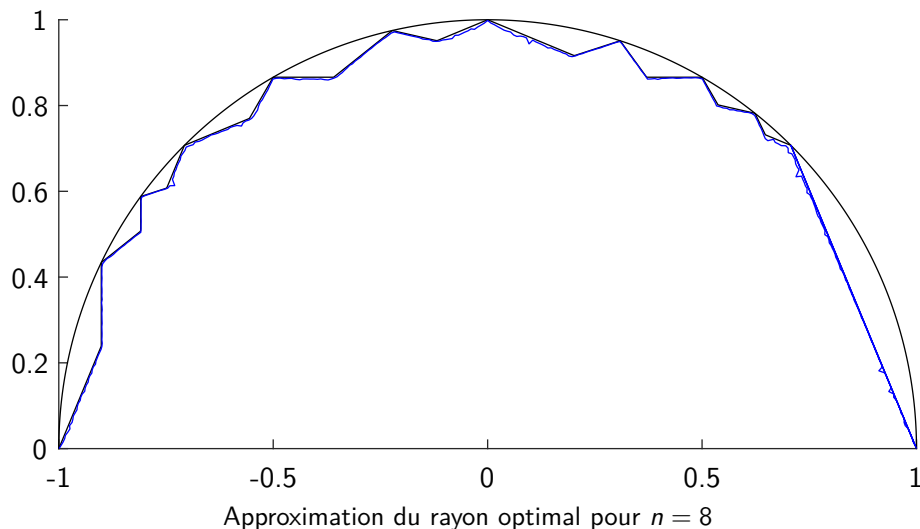
Calculs numériques



Calculs numériques



Calculs numériques



Une interprétation géométrique

Définition

Soit $\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n$. Alors on définit les polygones

$$K_1 := \text{Conv}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

$$K_2 := \text{Conv}\left\{\frac{z_i + z_j}{2} : i \neq j\right\}$$

$$\vdots$$

$$K_m := \text{Conv}\left\{\frac{z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_m}}{m} : i_j \neq i_k \text{ pour tout } j \neq k\right\}$$

$$\vdots$$

$$K_n := \text{Conv}\left\{\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}\right\} = \{0\}.$$

Une interprétation géométrique

Proposition (B., Mashregi, Morneau-Guérin, 2026+)

Soit $\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n$. Alors

$$r \leq \min_{\substack{1 \leq k < n \\ \phi \in [0, \pi)}} \frac{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i\theta} z_j)^\downarrow}{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)} z_j)^\downarrow}$$

si et seulement si $re^{i\theta} K_m \subseteq K_m$ pour tout $m = 1, 2, \dots, n$.

Une interprétation géométrique

Proposition (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Soit $\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n$. Alors

$$r \leq \min_{\substack{1 \leq k < n \\ \phi \in [0, \pi)}} \frac{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i\theta} z_j)^\downarrow}{\sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(e^{i(\phi+\theta)} z_j)^\downarrow}$$

si et seulement si $re^{i\theta} K_m \subseteq K_m$ pour tout $m = 1, 2, \dots, n$.

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $\lambda \in \omega_n$, alors il existe $\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n$ tel que

$$\lambda K_m \subseteq K_m \quad \text{pour tout } m = 1, 2, \dots, n.$$

Un problème difficile

Théorème (Dmitriev, Dynkin, 1946)

On a $\lambda \in \Omega_n$ si et seulement s'il $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\lambda K_1 \subseteq K_1.$$

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $\lambda \in \omega_n$, alors il existe $\vec{z} \in \mathbb{C}_0^n$ tel que

$$\lambda K_m \subseteq K_m \quad \text{pour tout } m = 1, 2, \dots, n.$$

Un cas particulier intéressant

Définition

Soit $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$. On dit que $\vec{z}$ est strictement convexe si chacune de ses entrées n'est pas une combinaison convexe des $n - 1$ autres entrées.

Un cas particulier intéressant

Définition

Soit $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$. On dit que $\vec{z}$ est strictement convexe si chacune de ses entrées n 'est pas une combinaison convexe des $n - 1$ autres entrées.

Conjecture (Levick, Pereira, Kribs, 2015)

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre d'une matrice doublement stochastique associée à un vecteur propre strictement convexe, alors $\lambda \in PM_n$.

Une conjecture plus précise

Conjecture (B., Mashregi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre d'une matrice doublement stochastique associée à un vecteur propre strictement convexe, alors $\lambda \in \Pi_n \subsetneq PM_n$.

Approche potentielle

Observation : Si $\vec{z}$ est strictement convexe, alors $K_2, K_3, \dots$ prennent une forme simple.

Approche potentielle

Observation : Si $\vec{z}$ est strictement convexe, alors $K_2, K_3, \dots$ prennent une forme simple.

Définition

Une paire de valeur/vecteur propre $(re^{i\theta}, \vec{z})$ d'une matrice doublement stochastique avec $\vec{z}$ strictement convexe est dite maximale si $(r + \varepsilon)e^{i\theta}$ n'est pas une valeur propre associée à un vecteur propre strictement convexe d'aucune matrice doublement stochastique.

Approche potentielle

Observation : Si $\vec{z}$ est strictement convexe, alors $K_2, K_3, \dots$ prennent une forme simple.

Définition

Une paire de valeur/vecteur propre $(re^{i\theta}, \vec{z})$ d'une matrice doublement stochastique avec $\vec{z}$ strictement convexe est dite maximale si $(r + \varepsilon)e^{i\theta}$ n'est pas une valeur propre associée à un vecteur propre strictement convexe d'aucune matrice doublement stochastique.

Conjecture (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $(\lambda, \vec{z})$ est une paire de valeur/vecteur propre maximale, alors

$$T_2 \vec{z} := \left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}, \dots, \frac{z_{n-1} + z_n}{2}, \frac{z_n + z_1}{2} \right)$$

est aussi un vecteur propre maximal (associée à λ).

Approche potentielle

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $(\lambda, \vec{z})$ est une paire de valeur/vecteur propre maximale, alors $\rho^k T_2^k \vec{z}$ est aussi un vecteur propre maximal (associée à λ) pour tout $\rho > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Approche potentielle

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $(\lambda, \vec{z})$ est une paire de valeur/vecteur propre maximale, alors $\rho^k T_2^k \vec{z}$ est aussi un vecteur propre maximal (associée à λ) pour tout $\rho > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Conséquence : En laissant $k \rightarrow \infty$ dans le corollaire et en faisant appel à un argument de continuité, on trouve que l'on peut supposer sans perte de généralité que $\vec{z}$ satisfait

$$z_j = \alpha e^{\frac{2\pi ij}{n}} + \beta e^{\frac{-2\pi ij}{n}} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Approche potentielle

Corollaire (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si $(\lambda, \vec{z})$ est une paire de valeur/vecteur propre maximale, alors $\rho^k T_2^k \vec{z}$ est aussi un vecteur propre maximal (associée à λ) pour tout $\rho > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Conséquence : En laissant $k \rightarrow \infty$ dans le corollaire et en faisant appel à un argument de continuité, on trouve que l'on peut supposer sans perte de généralité que $\vec{z}$ satisfait

$$z_j = \alpha e^{\frac{2\pi ij}{n}} + \beta e^{\frac{-2\pi ij}{n}} \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Il suffit alors d'optimiser sur les vecteurs de cette forme pour maximiser le module de la valeur propre λ et obtenir le résultat ! □

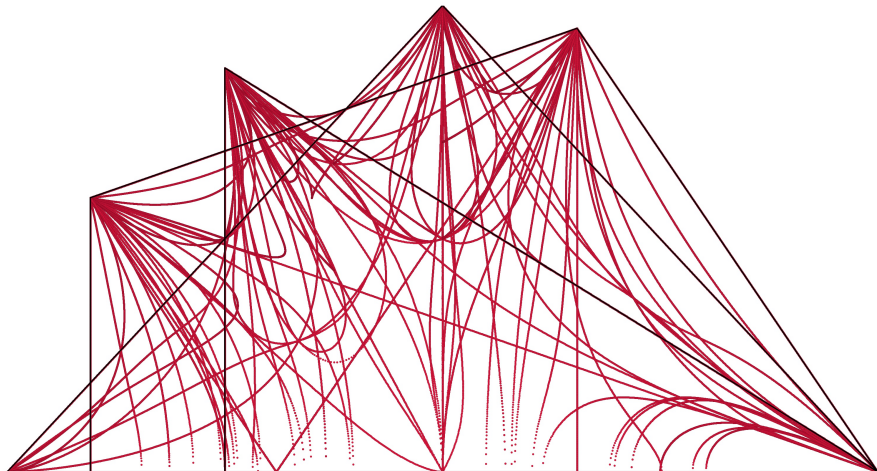
Conséquences de la conjecture pour le cas $n = 5$

Théorème (B., Mashreghi, Morneau-Guérin, 2026+)

Si on assume la conjecture valide, et si $(\lambda, \vec{z})$ est une paire de valeur/vecteur propre d'une matrice doublement stochastique d'ordre 5 qui n'appartient pas à PM_5 , alors $K_1 = \text{Conv}\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ a exactement 4 points extrêmes.

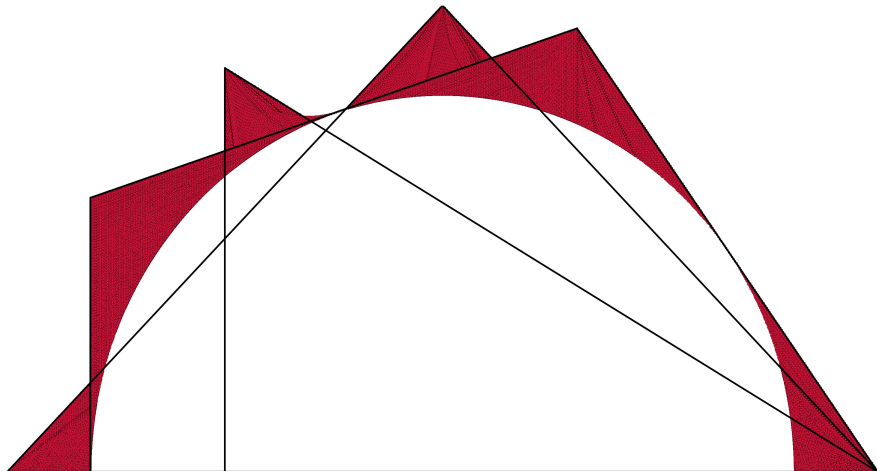
Références I

Quelques jolies figures



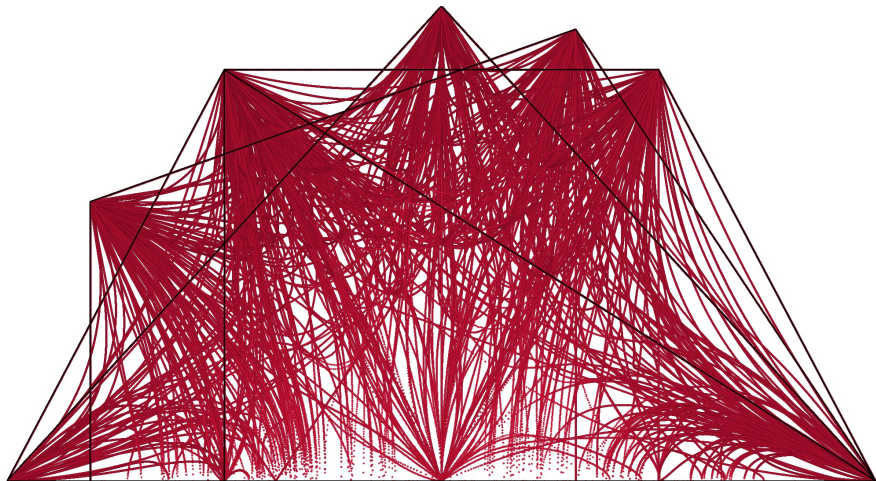
Valeurs propres des combinaisons convexes de paires de matrices de permutations pour $n = 5$.

Quelques jolies figures



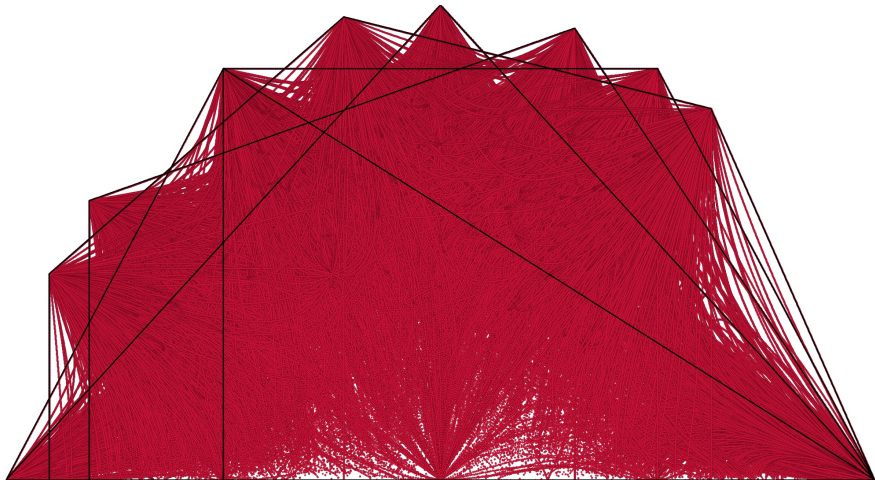
Valeurs propres des combinaisons convexes de triplets de matrices de permutations pour $n = 5$; le cercle inscrit a été omit.

Quelques jolies figures



Valeurs propres des combinaisons convexes de paires de matrices de permutations pour $n = 6$.

Quelques jolies figures



Valeurs propres des combinaisons convexes de paires de matrices de permutations pour $n = 7$.

Conjectures de Harlev, Johnson et Lim

Conjecture (Harlev–Johnson–Lim, 2022)

$\omega_n = PM_n$ pour $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

Conjectures de Harlev, Johnson et Lim

Conjecture (Harlev–Johnson–Lim, 2022)

$\omega_n = PM_n$ pour $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

Conjecture (Conjecture de la frontière, 2022)

Pour $n \geq 1$, les paires de matrices de permutation déterminent la frontière de ω_n . C'est-à-dire, chaque point de $\partial\omega_n$ est une valeur propre d'une combinaison convexe d'au plus deux matrices de permutation.