

## LEO MOSER ET LE NOMBRE CHROMATIQUE DU PLAN

*Suppose there's a brown calf and a big brown dog,  
and an artist is making a picture of them.  
What is the MAIN thing that artist has got to do?  
He has got to paint them so you can tell  
them apart the minute you look at them, hain't he?  
Of course. Well, then, do you want him  
to go and paint BOTH of them brown?  
Certainly you don't. He paints one of them blue,  
and then you can't make no mistake.  
It's just the same with the maps.  
That's why they make every State a different color;  
it ain't to deceive you, it's to keep you from deceiving yourself.*

MARK TWAIN, *TOM SAWYER ABROAD* (1894).

*We're right over Illinois yet.  
And you can see for yourself that  
Indiana ain't in sight...  
What's the color got to do with it?  
It's got everything to do with it.  
Illinois is green, Indiana is pink...  
I've seen it on the map, and it's pink.*

MARK TWAIN, *TOM SAWYER ABROAD* (1894).

Étant donné une carte découpée en régions connexes, est-il toujours possible de colorier celle-ci en n'utilisant que quatre couleurs différentes de sorte que deux régions limitrophes<sup>2</sup> se voient toujours attribuer des couleurs distinctes ?

---

2. On entend par *régions limitrophes* deux régions partageant une frontière de longueur strictement positive. Ainsi, le fait que deux régions aient un point de tangence, par exemple, ne suffit pas à faire en sorte qu'elles soient considérées comme limitrophes.

Cette question, connue sous le nom de *problème des quatre couleurs*<sup>3</sup>, se distingue en raison de l'important contraste entre la simplicité de son énoncé et la difficulté rencontrée dès lors que l'on tente de trouver la moindre piste vers sa résolution.

Répondre par la négative au problème des quatre couleurs nécessite d'exhiber une carte pour laquelle on peut démontrer que, quel que soit le coloriage avec au plus quatre couleurs, on pourra toujours trouver deux régions limitrophes s'étant vu attribuer la même couleur. En revanche, répondre par la positive au problème des quatre couleurs requiert de définir une procédure prescrivant comment il convient de procéder afin de produire une coloration adéquate de n'importe quelle carte avec quatre couleurs.

Dans ce qui suit, nous présenterons les péripéties qui ont marqué l'histoire rocambolesque du problème des quatre couleurs. Cette histoire – longtemps rapportée de façon factuellement inexacte jusqu'à ce que Harold Scott MacDonald Coxeter (que nous avons rencontré dans un précédent chapitre) ne rétablisse les faits au terme d'un travail d'investigation poussé [4 ; 5] – trouve son origine dans l'Angleterre victorienne. Alors qu'il s'affairait à colorier une carte des comtés de la Grande-Bretagne, Francis Guthrie<sup>4</sup> (1831-1899), un jeune étudiant de droit ayant précédemment fait des études en mathématiques et en botanique à l'University College London, remarqua d'une part qu'il était nécessaire de disposer d'au moins quatre couleurs différentes afin de parvenir à colorier chacune des régions afin d'éviter que deux régions partageant une frontière commune ne soient de la même couleur. D'autre part – et il s'agit là d'une observation considérablement plus intéressante – *quatre couleurs semblaient toujours suffire*.

---

3. En transposant le problème des quatre couleurs dans le langage de la théorie des graphes, celui-ci peut être rendu rigoureux. Les régions d'une carte donnée peuvent être représentées de manière plus abstraite par un graphe ayant un sommet pour chaque région. Deux sommets seront liés par une arête si et seulement si les régions qu'ils représentent ont une frontière commune. Un tel graphe est qualifié de *planaire*, car il a la particularité de pouvoir être représenté sur un plan sans qu'aucune arête en croise une autre. Réciproquement, tout graphe planaire peut être ainsi obtenu à partir d'une carte. Dans le langage formel de la théorie des graphes, le problème des quatre couleurs s'énonce ainsi : existe-t-il un graphe planaire pour lequel toute coloration des sommets avec au plus quatre couleurs donne lieu à deux arêtes adjacentes de même couleur ?

4. En 1861, après avoir pratiqué le droit à Londres pendant quelques années, Guthrie partit s'établir dans la colonie du Cap, en Afrique du Sud. Il enseigna les mathématiques au Graaff-Reinet College, puis au South African College. Aucun des articles scientifiques que Francis Guthrie publia au cours de sa vie n'aborde de près ou de loin le problème des quatre couleurs.

Il semblait en effet extrêmement difficile (voire impossible) de concevoir une carte pour laquelle strictement plus de quatre couleurs étaient nécessaires afin de parvenir à colorier chacune des régions tout en évitant d'attribuer une même couleur à deux régions partageant une frontière.

Convaincu de la véracité de sa conjecture et néanmoins incapable d'en vérifier la véracité, le jeune Guthrie autorisa son frère Frederick (1833-1886), de deux ans son cadet, à la présenter à son professeur de mathématiques à l'University College London, un certain Augustus De Morgan<sup>5</sup> (1806-1871). Le jour même où Frederick Guthrie lui fit part du problème, soit le 23 octobre 1852, De Morgan écrivit à son ami [8 ; 21, ch. 18 ; 23, ch. 2], le professeur de mathématiques au Trinity College Dublin William Rowan Hamilton (1805-1865), pour lui demander son avis au sujet de la plausibilité de la conjecture de Francis Guthrie. Cette lettre de De Morgan à Hamilton constitue la première mention écrite de la conjecture des quatre couleurs [21, ch. 18 ; 23, ch. 2]. Malheureusement, le grand mathématicien et physicien irlandais – absorbé qu'il fût par ses travaux portant sur les quaternions, ces nombres dans un sens généralisé qu'il avait découverts quelques années plus tôt – se montra bien peu réceptif. Sa réponse, datée du 26 octobre 1852 [18 ; 21, ch. 18 ; 23, ch. 2], tient en une ligne : « *My dear De Morgan, I am not likely to attempt your "quaternion of colors" very soon...* »

Loin de se laisser démonter par cette réponse laconique et bien qu'il ne parvint à franchir le moindre pas vers sa résolution, De Morgan sut profiter de toutes les occasions s'offrant à lui pour faire connaître le problème des quatre couleurs, allant jusqu'à en faire mention dans une recension critique d'un traité de philosophie publiée dans les pages d'une revue littéraire et politique [9 ; 23, ch. 2]. Cette mention quelque peu insolite allait permettre au problème des quatre couleurs de traverser l'Atlantique et, grâce aux efforts du mathématicien, philosophe et logicien américain Charles Sanders Peirce (1839-1914), l'une des idoles de Gardner, d'y demeurer un champ de recherche fort actif.

La première scène du deuxième acte de l'histoire mouvementée du problème des quatre couleurs débuta le 17 juillet 1879 avec l'annonce

---

5. De Morgan est considéré comme l'un des fondateurs, avec George Boole, de la logique moderne. On lui doit notamment d'avoir formulé et démontré les identités entre propositions logiques connues sous le nom de *lois de De Morgan*.

en page 275 du volume 20 de la revue *Nature* [19 ; 23, ch. 5] qu'Alfred Bray Kempe (1849-1922), un jeune avocat londonien se livrant dans son temps libre à une intense activité mathématique par inclination profonde, était parvenu à démontrer la validité de la conjecture des quatre couleurs. La démonstration, qui parut dans *American journal of Mathematics Pure and Applied* [20 ; 23, ch. 5] quelques mois plus tard, fut accueillie avec enthousiasme par la communauté mathématique et contribua très certainement à son élection, deux ans plus tard, à la Royal Society.

La seconde scène de ce deuxième acte, qui se déroule 11 ans plus tard, compte assurément parmi les retournements de situation les plus dramatiques de toute l'histoire des mathématiques. Au courant de l'année 1890, Kempe fut contacté par un jeune mathématicien nommé Percy John Heawood (1861-1955). Ce dernier l'informa avoir réussi à construire une carte pour laquelle l'application de la méthode décrite dans sa soi-disant démonstration de la conjecture des quatre couleurs donnait lieu à l'application d'une même couleur à deux régions adjacentes<sup>6</sup>. Pour le dire autrement, Heawood était en mesure de démontrer que Kempe avait commis une erreur critique dans sa soi-disant démonstration de la conjecture des quatre couleurs [21, ch. 20 ; 23, ch. 5].

Après maints essais visant à colmater la brèche identifiée par Heawood, Kempe se vit dans l'obligation d'annoncer à la communauté mathématique, lors de la réunion de la London Mathematical Society du 9 avril 1891, que la démonstration qui avait assuré sa renommée comportait une faille et qu'il était inadéquat de continuer à l'appeler le *théorème des quatre couleurs* puisque, en définitive, il ne permettait que d'établir que *cinq couleurs suffisent toujours* tout en laissant entre-ouverte la possibilité que puisse être établi par d'autres moyens que quatre couleurs suffisent.

En guise d'intermède, mentionnons que la contribution de Heawood à l'histoire du problème des quatre couleurs ne se limite pas à la simple construction d'une carte invalidant les conclusions auxquelles

---

6. Il faut faire attention de ne pas faire une interprétation abusive du résultat obtenu par Heawood. Le fait que la méthode décrite par Kempe ne permette pas de colorier la carte construite par Heawood avec seulement quatre couleurs sans que deux régions limitrophes se voient attribuer la même couleur ne permet pas d'invalider la conjecture des quatre couleurs. Il n'est en effet pas exclu qu'une autre façon que celle décrite par Kempe permette de colorier la carte construite par Heawood avec quatre couleurs tout en évitant d'attribuer une même couleur à deux régions adjacentes.

Kempe était initialement parvenu. Bien que le problème des quatre couleurs émane d'une observation réalisée lors du coloriage d'une carte géographique, sa résolution demeure d'un intérêt assez limité pour les cartographes. En effet, alors qu'il tombe sous le sens, pour un cartographe, d'exiger que les exclaves territoriales (comme l'Alaska et l'oblast de Kaliningrad) se voient appliquer la même couleur que le pays auquel ils sont politiquement rattachés, l'imposition de cette contrainte supplémentaire fait en sorte qu'il puisse s'avérer nécessaire d'employer un bien plus grand nombre de couleurs que ce que prescrit la conjecture des quatre couleurs ou le théorème des cinq couleurs de Kempe. Cet état de fait suggère la question suivante : combien de couleurs suffisent pour colorier toute carte sur laquelle tous les pays sont composés de territoires disconnexes si tous les territoires appartenant à un même pays doivent recevoir la même couleur et si deux pays partageant une frontière ne doivent pas recevoir la même couleur ? Cette question est désormais connue sous le nom de *problème des  $m$ -pires*<sup>7</sup>. On vérifie sans difficulté que le cas  $m=1$  correspond au problème des quatre couleurs. En mathématiques, ce ne sont pas toujours les problèmes les plus simples à concevoir et à énoncer qui sont les plus faciles à résoudre. Le problème des  $m$ -pires est un exemple éloquent. Percy John Heawood démontra en 1890 que, pour un entier positif quelconque, la solution au problème des -pires est inférieure ou égale à  $6m$  et si  $m=2$  alors cette borne supérieure est optimale : il faut et il suffit de disposer de 12 couleurs pour colorier toute carte où chaque pays possède une et une seule colonie. La réponse au problème des 2-pires fut donc trouvée avant celle du problème des 1-pires, soit le problème des quatre couleurs de Francis Guthrie.

Le troisième et dernier acte s'amorce le 21 juin 1976 lorsque Kenneth Appel (1932-2013) et Wolfgang Haken (1928-2022), deux topologistes de l'Université de l'Illinois, annoncèrent la publication imminente d'une démonstration de la validité de la conjecture des quatre couleurs. Leur preuve, qui exploite certaines des idées développées par Kempe dans sa preuve du théorème des cinq couleurs et perfectionnées par le mathématicien américain George David Birkhoff (1884-1944), repose sur l'utilisation d'une technique aussi astucieuse que puissante développée par le mathématicien allemand Heinrich Heesch (1906-1995)

---

7. On l'aura compris, le nom attribué à ce problème était à l'origine un jeu de mots basé sur l'homophonie *-pire/empire* dans la langue de Shakespeare.

qui permet de réduire le nombre de configurations à considérer d'une infinité à un nombre certes imposant, mais fini.

Au terme d'une vérification fastidieuse nécessitant environ 1200 heures de calcul aux meilleurs ordinateurs de l'époque, Appel et Haken parvinrent à la certitude que la conjecture des quatre couleurs était valide [1 ; 2 ; 3]. Toutefois, alors que, près d'un siècle plus tôt, l'annonce de Kempe avait déclenché un concert d'éloges, celle d'Appel et Haken fut accueillie beaucoup plus timidement. Chat échaudé craint l'eau froide, pourrait-on croire. Mais là n'était pas la raison du manque d'enthousiasme à l'égard des travaux d'Appel et Haken. Leur preuve représentait la toute première démonstration assistée par ordinateur d'un problème canonique. Il était donc inévitable que cela soulève des interrogations philosophiques [22]. Du fait de sa longueur et sa complexité, il est illusoire d'espérer qu'un être humain puisse vérifier exhaustivement la preuve d'Appel et Haken dans son intégralité. Par un partage adéquat des tâches, un comité de mathématiciens pourrait y parvenir, mais il est plus raisonnable d'en confier la vérification à un autre programme informatique. Dans ces conditions, est-il convenable de considérer la conjecture des quatre couleurs comme étant démontrée ? Est-il approprié de parler du *théorème des quatre couleurs* ?

Il va sans dire que la démonstration d'Appel et Haken ne saurait être qualifiée d'élégante. Sa piètre valeur esthétique fait en sorte qu'elle apparaît, pour plusieurs, hautement insatisfaisante. Mais dans le besoin on ne peut pas choisir. Faute d'une *meilleure* preuve (et tous ne s'entendent pas nécessairement sur l'interprétation qu'il faut donner au terme « meilleure » dans ce contexte), on est contraint de se contenter de celle reposant abondamment sur l'utilisation d'un ordinateur.

En raison de leur simplicité d'énonciation et de leur profondeur insoupçonnée, le problème des quatre couleurs et sa généralisation – le problème des  $m$ -pires – ont tout pour plaire à Martin Gardner. Il leur a d'ailleurs consacré deux chroniques de *Mathematical Games* à deux décennies d'intervalle [11 ; 13 ; 15 ; 16]. En marge de la première de ces deux chroniques [11], Gardner présenta un problème apparenté (mais considérablement plus facile à résoudre) qui lui avait été soumis par

son ami et collaborateur régulier, le professeur Leo Moser<sup>8</sup>. Le mois suivant [12 ; 14], Gardner offrit, comme il en avait l'habitude, la solution au problème soumis par Moser. Il profita ensuite de l'occasion pour soumettre à ses lecteurs un problème formidable :

Leo Moser de l'Université de l'Alberta, qui a soumis le problème, écrit qu'on ne sait pas combien de couleurs sont nécessaires pour colorer le plan de sorte que deux points situés à une distance unitaire l'un de l'autre ne soient pas de la même couleur. Quatre couleurs s'avèrent nécessaires et sept sont suffisantes. L'écart entre quatre et sept est si grand que le problème semble encore loin d'être résolu. (traduction libre)

Ce bref énoncé constitue la toute première mention dans une revue scientifique du *problème du nombre chromatique du plan*, un problème qui – comme nous le verrons – connu par la suite le même genre d'engouement que connu le problème des quatre couleurs.

Dans les premières publications portant sur le nombre chromatique du plan, on attribue sa paternité tantôt au géomètre suisse Hugo Hadwiger (1908-1981) [10], tantôt au vulgarisateur scientifique américain Martin Gardner (1914-2010) [24], tantôt au combinatorialiste austro-canadien Leo Moser (1921-1970) [12], tantôt au prodigieux Paul Erdős (1913-1996) [6] et tantôt au mathématicien et logicien américain Edward Nelson (1932-2014) [10 ; 17]. Jugeant inconcevable que la question de savoir le nombre minimal de couleurs requis afin de colorer le plan de sorte que deux points situés à une distance unitaire l'un de l'autre ne soient pas de la même couleur ait pu germer simultanément dans l'esprit d'autant d'individus de façon complètement indépendante, le mathématicien russo-américain Alexander Soifer ressentit le besoin d'éclaircir la question de la paternité de ce problème. Au terme d'une enquête approfondie (racontée en détail dans un ouvrage captivant

---

8. Né à Vienne le 11 avril 1921, Leo Moser immigra au Canada avec ses parents à l'âge de trois ans. Il décrocha un baccalauréat en mathématiques de l'Université du Manitoba en 1943, puis une maîtrise en mathématiques à l'Université de Toronto en 1945. Après deux années employées à enseigner, il partit s'établir à Chapel Hill, en Caroline du Nord, afin d'y mener des études de troisième cycle sous la direction de Alfred T. Brauer. Son séjour à l'Université de Caroline du Nord, qui s'acheva en 1951 avec l'obtention d'un doctorat, fut marqué par l'apparition de problèmes cardiaques dont il souffrit tout au long de sa vie et qui devaient l'emporter à l'âge beaucoup trop jeune de 48 ans, le 9 février 1970. Moser eut une courte, mais productive carrière à l'Université de l'Alberta au cours de laquelle il contribua à plus d'une centaine de publications savantes. Dans un hommage posthume rendu par son collègue Max Wyman [25], Moser est décrit comme un mathématicien caractérisé par une remarquable ingéniosité et une capacité à analyser les problèmes mathématiques les plus complexes en recourant à des arguments heuristiques intuitifs.

publié en 2009 [21, ch. 3]), Soifer est parvenu à dissiper le mystère entourant l'apparition du problème du nombre chromatique du plan.

Au cours de l'automne 1950, alors qu'il était étudiant au département de mathématiques à l'Université de Chicago, l'intérêt d'Edward Nelson<sup>9</sup> se porta sur le problème des quatre couleurs. Alors qu'il tentait de dégager (sans succès) quelques pistes de réflexion, le jeune homme en vint à se demander combien de couleurs étaient nécessaires afin de colorer tous les points du plan cartésien de sorte que deux sommets situés à une unité de distance l'un de l'autre se voient attribuer des couleurs différentes. Nelson partagea ce problème – qu'il prit l'habitude de désigner sous le vocable de *second problème des quatre couleurs* puisqu'il parvint très vite à démontrer qu'il est nécessaire, comme dans le problème posé un siècle plus tôt par Francis Guthrie, de disposer d'au moins quatre couleurs différentes – avec ses camarades de classe, dont un certain John Rolf Isbell (1930-2005). Vivement intrigué par le problème du nombre chromatique du plan, Isbell se mit en quête d'une borne supérieure pour le nombre de couleurs requis. Il ne tarda pas à réaliser que, en utilisant un pavage du plan par des hexagones de tailles et de couleurs judicieusement choisies, on pouvait se convaincre que la réponse au problème soulevé par Nelson est au plus sept [21, p. 24]. Il semble improbable que le problème du nombre chromatique du plan soit venu à l'idée de Hugo Hadwiger de façon indépendante. Hadwiger lui-même reconnaît en avoir discuté avec le mathématicien Victor LaRue Klee (1925-2007) lorsque celui-ci effectua un séjour en Europe vers la fin des années 1950 [21, p. 26]. Or, Klee compte parmi les nombreux mathématiciens à qui John Isbell présenta le problème ainsi que les bornes inférieure et supérieure que Nelson et lui avaient identifiées. Enfin, l'enquête menée par Soifer ne lui permit pas de déterminer quand et comment Leo Moser eut vent du problème du nombre chromatique du plan, mais l'hypothèse d'une découverte indépendante est désormais exclue [21, p. 24].

Le nom de Leo Moser continue néanmoins, à juste titre, d'être intimement lié au problème du nombre chromatique du plan en raison du rôle clé qu'il joua dans sa popularisation. C'est en effet, nous l'avons

---

9. En 1955, Joseph Edward Nelson soutint une thèse de doctorat intitulée *On the Operator Theory of Markoff Processes*. Il fut membre de l'Institute for Advanced Study de 1956 à 1959, année au cours de laquelle il se joignit à l'Université Princeton, où il demeura jusqu'à sa retraite en 2013. Ses principaux travaux portèrent sur la logique mathématique et la physique mathématique. Aucune de ses publications scientifiques ne traite du problème du nombre chromatique du plan.

vu, Leo Moser qui porta le problème du nombre chromatique du plan à l'attention de son ami Martin Gardner. Doté d'un flair exceptionnel pour reconnaître les questions aussi profondes qu'intéressantes, Gardner s'assura de faire connaître le problème du nombre chromatique du plan au plus grand nombre en y faisant référence, comme nous l'avons vu, dans sa chronique de *Mathematical Games* d'octobre 1960 [12 ; 14]. C'est encore Leo Moser qui fit connaître le problème du nombre chromatique du plan au polymathe errant hongrois Paul Erdős. Qu'un aussi génial solutionneur de problème que Paul Erdős n'ait pu réaliser le moindre progrès vers la résolution du problème soulevé par Nelson en dit long sur sa difficulté. En revanche, Erdős formula – comme font les mathématiciens lorsqu'ils se cassent les dents sur un problème – plusieurs problèmes connexes dans l'espoir de trouver un nouvel angle d'attaque. Ce faisant, Erdős contribua à ouvrir de nouveaux fronts, si bien que de nos jours, les articles dans lesquels des idées issues de la topologie, de la théorie des graphes, de la théorie de la mesure, de la géométrie combinatoire, de l'algèbre abstraite sont utilisées afin de résoudre diverses questions inspirées du problème du nombre chromatique du plan se comptent par dizaines.

Alors que l'histoire du problème des quatre couleurs semble enfin avoir trouvé son dénouement, le problème du nombre chromatique du plan, lui, demeure – plus de 70 ans après avoir été posé – toujours en suspens. Le seul progrès réalisé depuis la découverte, respectivement par Edward Nelson et John Isbell, que quatre couleurs soient nécessaires et que sept couleurs suffisent fut la construction, par l'informaticien Aubrey de Grey en avril 2018 [7], d'un graphe comportant plusieurs milliers de sommets et pour lequel cinq couleurs sont nécessaires. Il est donc désormais acquis que le nombre chromatique du plan est cinq, six ou sept. Il n'y aura donc jamais de *second théorème des quatre couleurs*.

## Références

- [1] Appel, K., et Haken, W. (1977). «The Solution of the Four-Color-Map Problem». *Scientific American*, 237 (4), 108–121. [<http://www.jstor.org/stable/24953967>]
- [2] Appel, K., Haken, W., et Koch, J. (1977). «Every planar map is four colorable. Part I: Discharging». *Illinois Journal of Mathematics*, 21, 429–490.
- [3] Appel, K., Haken, W., et Koch, J. (1977). «Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility». *Illinois Journal of Mathematics*, 21, 491–567.
- [4] Coxeter, H. S. M. (1957). «Map-coloring problems». *Scripta Math*, 23, 11–25.
- [5] Coxeter, H. S. M. (1959). «The four-color map problem, 1840–1890». *The Mathematics Teacher*, 52 (4), 283–289.

- [6] Croft, H. T. (1967). «Incidence incidents». *Eureka*, 30, 22-26.
- [7] De Grey, A. D. (2018). «The chromatic number of the plane is at least 5». *arXiv preprint arXiv:1804.02385*.
- [8] De Morgan, A. (1852). *Letter to W. R. Hamilton dated October 23*; TCD MS 1493, 668; Trinity College Dublin Library, Manuscripts Department.
- [9] De Morgan, A. (1860). «Review of "On The Philosophy Of Discovery"». *The Athenæum* 1694. 501–503
- [10] Erdős, P. (1980). «Some combinational problems in geometry». *Geometry and Differential Geometry*, 46-53. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [11] Gardner, M. (1960, septembre). «Mathematical Games: The celebrated four-color map problem of topology». *Scientific American*, 203 (3), 218-230. [[www.jstor.org/stable/24940625](http://www.jstor.org/stable/24940625)]
- [12] Gardner, M. (1960, octobre). «Mathematical Games: A new collection of "brain-teasers"». *Scientific American*, 203 (4), 172-184. [[www.jstor.org/stable/24940666](http://www.jstor.org/stable/24940666)]
- [13] Gardner, M. (1966). «The Four-Color Map Theorem». Ch. 10 dans *New Mathematical Diversions from scientific american*. Simon & Schuster.
- [14] Gardner, M. (1966). «Nine problems». Ch. 12 dans *New Mathematical Diversions from scientific american*. Simon & Schuster.
- [15] Gardner, M. (1980, février). «Mathematical Games: The coloring of unusual maps leads into uncharted territory». *Scientific American*, 242 (2), 14-23. [[www.jstor.org/stable/24966248](http://www.jstor.org/stable/24966248)]
- [16] Gardner, M. (1997). «M-Pire Maps». Ch. 6 dans *The Last Recreations: Hydras, Eggs, and Others Mathematical Mystifications*. Copernicus Books/Springer-Verlag New York.
- [17] Hadwiger, H. (1961). «Ungelöste Probleme». *Elemente der Mathematik*, 16, 30-31.
- [18] Hamilton, W. R. (1852). Letter to A. De Morgan dated October 26; TCD MS 1493, 669; Trinity College Dublin Library, Manuscripts Department.
- [19] Kempe, A. B. (1879, 17 juillet), «How to colour a map with four colours». *Nature*, 20, 275.
- [20] Kempe, A. B. (1879). «On the geographical problem of the four colours». *American journal of mathematics*, 2 (3), 193-200.
- [21] Soifer, A. (2009). *The mathematical coloring book: Mathematics of coloring and the colorful life of its creators*. Springer Science & Business Media.
- [22] Tymoczko, T. (1979). «The four-color problem and its philosophical significance». *The journal of Philosophy*, 76 (2), 57-83.
- [23] Wilson, R. (2013). *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved-Revised Color Edition* (Vol. 30). Princeton University Press.
- [24] Woodall, D. R. (1973). «Distances realized by sets covering the plane». *journal of Combinatorial Theory, Series A*, 14 (2), 187-200.
- [25] Wyman, M. (1971). «Biographical Sketch: Leo Moser». *The Rocky Mountain journal of Mathematics*, 1 (2), 255-257. [<http://www.jstor.org/stable/44236191>]