

JOHN FORBES NASH ET L'HISTOIRE TUMULTUEUSE DU JEU DE HEX

*If you could play unerringly,
you would not play at all.
The moment the game is perfect
the game disappears.*

G. K. CHESTERTON, *TREMENDOUS TRIFLES* (1909).

*« We shall have to evolve
problem-solvers galore
since each problem we solve
creates ten problems more. »*

PIET HEIN, *THE ONLY SOLUTION* (DATE INCONNUE).

Un jeu de connexion est un type de jeu de stratégie dans lequel des joueurs s'affrontent pour former un chemin entre deux objectifs [1]. Ce type de jeu combinatoire abstrait a connu un essor extraordinaire¹ à la suite de la parution, en juillet 1957, dans les pages du magazine *Scientific American* d'un article intitulé « Concerning the Game of Hex, which May be Played on the Tiles of the Bathroom Floor » [3 ; 5]. Dans cet article – la septième chronique de Martin Gardner suivant le début de son association avec *Scientific American* –, on traite du plus célèbre des jeux de connexion et possiblement l'un de ceux ayant, par sa simplicité, la plus grande valeur esthétique : le jeu de Hex.

Règles du jeu de Hex

- Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. Chacun d'eux est représenté par une couleur (par souci de simplicité nous adopterons la même convention qu'aux échecs : le premier joueur sera le camp des *blancs* et le second joueur sera le camp des *noirs*).

1. Il existe désormais des dizaines de jeux de société qui sont, à la base, des jeux de connexion. Ceux-ci s'articulent le plus souvent autour d'un contexte appliqué comme la construction d'un réseau ferroviaire ou le développement d'un empire et incorporent parfois un élément aléatoire, un système de pointage ou des cartes.

- Le jeu se joue sur un plateau en forme de losange subdivisé en $n \times n$ cases hexagonales. Une des paires de côtés opposés du losange est peinte en blanc et l'autre est peinte en noir.
- À tour de rôle, les joueurs posent un pion de leur couleur sur la case vide de leur choix. Le tablier de jeu se remplit ainsi progressivement.
- L'objectif d'un joueur consiste à relier les deux côtés du losange symbolisés par sa couleur.

Quiconque joue une partie de Hex réalisera rapidement qu'il faut idéalement considérer simultanément l'attaque et la défense : on a avantage à chercher à réutiliser à des fins constructives toute pièce posée dans le but de contrecarrer les plans de l'adversaire.

Dans ce qui suit, nous retracerons à la suite de Gardner l'histoire du jeu de Hex. Pour ce faire, il nous faut dire un mot au sujet d'un personnage qui s'avérera jouer un rôle central : John Forbes Nash Jr. (1928–2015). À l'époque qui nous intéresse, ce dernier, originaire de Bluefield en Virginie occidentale, était un jeune étudiant arrogant et excentrique nouvellement admis au doctorat en mathématiques à l'Université de Princeton [8, prologue]. Moins d'un an et demi après son arrivée à Princeton, Nash déposerait une géniale thèse de doctorat de tout juste 27 pages qui devait transformer durablement le monde des sciences économiques et qui lui vaudrait, des décennies plus tard, le Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel.

Faisant constamment montre d'un esprit de compétition démesuré, le jeune Nash travaillait toujours en solitaire. Si aucune des personnes ayant croisé son chemin au cours de ses études universitaires ne conserve le moindre souvenir d'avoir vu Nash lire un manuel ou étudier une monographie², tous se rappellent l'avoir souvent aperçu dans la salle commune en train de jouer au *Go* ou au *Kriegspiel* (notamment avec John Tukey que nous avons rencontré dans un précédent chapitre). Peut-être était-ce donc d'une certaine façon prévisible que la première réussite mathématique notable de Nash s'articula autour d'un jeu de société.

2. Désirant stimuler sa créativité, le jeune homme cherchait à acquérir une connaissance des mathématiques en redécouvrant les résultats par lui-même plutôt qu'en étudiant ce que d'autres mathématiciens avant lui avaient découvert; une approche pour le moins périlleuse.

Au cours de l'hiver 1948–49, Nash vint trouver son camarade David Gale (1921–2008), un mathématicien qui devint plus tard professeur à l'Université de Californie à Berkeley, et lui annonça avoir conçu un jeu de stratégie combinatoire abstrait pour lequel il était possible de démontrer que le premier joueur était assuré de gagner s'il jouait de façon optimale. En d'autres mots, si le second joueur l'emportait, alors cela signifiait nécessairement que le premier joueur avait commis une bourde, voire plusieurs.

L'embryon de jeu que décrit Nash se présentait sous une forme abstraite et brute (il se jouait sur un graphe) et les explications qu'il donna en appui à son raisonnement au sujet de l'existence d'une stratégie gagnante pour le premier joueur étaient fort maladroites. Mais, à force de le faire répéter et développer sa pensée, Gale finit par comprendre ce que Nash essayait de lui dire et il fut aussi ébahi ; Nash avait réellement eu une intuition inventive purement remarquable tant sur le plan mathématique que sur le plan esthétique. Il commença immédiatement à réfléchir à la manière de concevoir et de présenter ce jeu abstrait se jouant sur un graphe comme un véritable jeu de société se jouant sur un plateau, une idée qui n'avait apparemment jamais effleuré l'esprit de Nash [8, ch. 6]. Gale remarqua que le jeu décrit par Nash pouvait être joué sur différentes tailles de plateaux divisés en cases hexagonales. Si le plateau était trop vaste, cependant, les parties risquaient d'être interminables et l'analyse stratégique serait si ardue que les joueurs en seraient presque immanquablement réduits à jouer pratiquement de façon arbitraire. En revanche, si le plateau était trop petit on finirait, à l'usage, par découvrir la stratégie gagnante et cela aurait raison de l'intérêt pour le jeu. Il arriva à la conclusion qu'un plateau de 14×14 constituait un compromis raisonnable entre simplicité et profondeur. Le jour même de sa discussion avec Nash, Gale – qui était issu d'une famille de commerçants et de bricoleurs new-yorkais – s'employa à fabriquer un tel plateau.

Le jeu dépeint par Nash, qui fut surnommé *Nash* par les uns et *John* par les autres, devint très populaire chez les étudiants en mathématiques de Princeton. La légende veut même qu'il fût joué, avec des pierres de *go*, sur les carreaux hexagonaux du plancher d'une salle de bain de l'université.

Revenons maintenant sur ce qui, pour John Forbes Nash, constitue la caractéristique déterminante du jeu de Hex, à savoir la possibilité de

démontrer que le premier joueur est assuré de gagner s’il joue de façon optimale. Pour étayer son affirmation, Nash fit appel à un théorème démontré en 1912 par le mathématicien allemand Ernst Zermelo et publié l’année suivante [10]. Ce résultat stipule pour tout jeu *fini* à deux joueurs jouant au tour à tour, à *information parfaite*, sans hasard et sans possibilité de faire match nul, alors de deux choses l’une :

- Ou bien il existe une procédure de décision prescrivant au premier joueur comment jouer afin de gagner à tout coup.
- Ou bien il existe une procédure de décision prescrivant au second joueur comment donner la réplique au premier joueur afin de gagner à tout coup.

Voici maintenant l’ossature de l’*argument de vol de stratégie* tel que formulé par Nash dans une lettre de 1957 à Martin Gardner :

1. **Argument topologique** : Une partie de Hex ne peut se terminer sans avoir fait un gagnant. En effet, on peut montrer que si l’on couvre toutes les cases du plateau par des pièces noires ou blanches, alors il existe forcément soit une chaîne reliant les deux pôles noirs, soit une chaîne blanche reliant les deux pôles blancs, mais ces deux scénarios ne peuvent jamais se produire simultanément.
2. **Argument de théorie des jeux** : En vertu du théorème de Zermelo, l’un des deux joueurs dispose d’une stratégie gagnante.
3. **Argument de symétrie³** : Supposons, en vue d’obtenir une contradiction, que c’est le second joueur qui dispose d’une stratégie gagnante. Le premier joueur peut effectuer un mouvement d’ouverture de façon arbitraire et, par la suite, il lui suffit d’adopter la stratégie gagnante du deuxième joueur comme s’il était lui-même le deuxième joueur (le pion joué lors de son coup d’ouverture est un atout ; dans un jeu de connexion comme Hex, le fait de disposer d’un pion additionnel ne peut jamais se révéler être un handicap). Le premier joueur dispose donc lui aussi une stratégie gagnante. Or, il s’agit là d’une évidente contradiction. En effet, les deux joueurs ne peuvent tous deux disposer simultanément d’une stratégie gagnante. Ainsi, l’hypothèse voulant que le second

3. Cet argument présuppose que le plateau de jeu est symétrique. Si la partie est disputée sur un tableau asymétrique – comme sur un plateau de taille par exemple –, alors le joueur devant parcourir la distance la plus courte est toujours en mesure de remporter la partie, et ce, même si c’est son adversaire qui joue le premier coup.

joueur ait une stratégie gagnante est insoutenable et doit donc, par voie de conséquence, être rejetée. Il s'ensuit forcément que c'est le premier joueur – et lui seul – qui dispose d'une stratégie gagnante ; en jouant de façon optimale, il l'emportera toujours sur son adversaire.

Notons que le théorème de Zermelo est un *résultat d'existence non constructif* ; il nous assure qu'une (et une seule) de ces trois possibilités se réalise, mais il ne donne aucune information permettant de déduire laquelle. Ce théorème, soit dit en passant, s'applique également au jeu d'échecs. Soit il existe une stratégie prescrivant au joueur blanc comment donner la réplique au joueur noir dans n'importe quel cas de figure et permettant au joueur blanc de gagner à tout coup ; soit il existe plutôt une stratégie dictant au joueur noir comment forcer un match nul⁴. Laquelle de ces deux possibilités mutuellement exclusives s'avère correspondre à la réalité ? Personne n'en a la moindre idée et même si nous le savions, cela ne nous rapprocherait pas le moins du monde d'une identification concrète et explicite de cette stratégie gagnante. L'argument de vol de stratégie formulé par Nash constitue un second exemple de résultat d'existence non constructif. Il nous assure de l'existence, quelle que soit la taille du plateau de jeu, d'une procédure de décision prescrivant au premier joueur comment jouer afin de gagner à tout coup. Mais il ne donne pas le moindre indice au sujet de cette stratégie gagnante ni sur la façon dont on peut la trouver.

Il est de pratique courante [1 ; 7] dans les jeux de stratégie combinatoires abstraits, comme Hex, où est reconnu un avantage au premier joueur de tenter d'équilibrer les chances en adoptant la règle facultative suivante :

Règle de l'échange

- Le premier joueur joue son coup d'ouverture en plaçant un premier pion blanc sur le tablier de jeu.
- Le second joueur doit alors choisir l'une des deux options suivantes :
 - Poursuivre le jeu normalement en plaçant un premier pion noir sur le tablier de jeu.

4. L'argument du vol de stratégie formulé par Nash s'applique aussi au jeu d'échecs et exclut la possibilité que le joueur noir puisse posséder une stratégie gagnante.

- Échanger les rôles et les couleurs. L'ancien premier joueur, maintenant devenu second joueur, place un premier pion noir sur le tablier. La partie se poursuit ensuite normalement.

Si ce n'avait été de Martin Gardner, le jeu de Hex – qui avait été brièvement commercialisé par Parker Brothers à partir de 1952 avant d'être retiré du marché en raison de ventes décevantes et qui, autrement, n'avait captivé l'attention que d'un faible nombre d'universitaires gravitant autour du noyau de Princeton – aurait probablement sombré tôt ou tard dans l'oubli.

On ignore précisément quand et comment Gardner entendit parler de Hex, mais sa correspondance révèle qu'à partir de janvier 1957 (soit dès le début de son association avec le magazine *Scientific American*), il entreprit de rassembler le plus d'informations possible au sujet de ce jeu [7]. Lorsqu'il contacta la société Parker Brothers pour s'enquérir de l'origine du jeu, celle-ci l'informa qu'il avait développé non pas par Nash, mais plutôt par un certain Piet Hein !

Fermement décidé à remonter à la source, Gardner écrivit à ce mystérieux scientifique danois pour lui demander s'il était bel et bien l'inventeur de Hex ou s'il s'agissait plutôt d'un jeu ancien d'origine inconnue qu'il s'était contenté de porter à la connaissance de Parker Brothers. Par souci de transparence, Gardner informa Piet Hein que, en parallèle à cette prise de contact, il suivait également une autre piste qui lui avait été signalée par un physicien : une rumeur circulait disant que Hex ait pu être inventé à l'Université de Princeton par un groupe de mathématiciens. Ceux-ci, semblait-il, y jouaient sur le plancher d'une salle de bain.

Cette lettre de Gardner fut à l'origine d'un long échange épistolaire avec Piet Hein qui s'étira sur plusieurs années [7]. Voici un résumé de ce qui ressort de leurs échanges au sujet du jeu de Hex :

Piet Hein (l'inventeur du cube Soma dont nous avons parlé dans un précédent chapitre) témoigna d'abord de sa fascination pour les jeux et mentionna ses efforts soutenus et continus pour en concevoir de nouveaux. Il soutint que le jeu de Hex marquait l'aboutissement d'une longue réflexion née du désir de concevoir un jeu dans lequel deux armées s'affrontent sur un champ de bataille formant un quadrilatère. Au départ, chacune des armées est répartie en deux ailes situées sur les côtés opposés du quadrilatère (une armée occupe les côtés *nord*

et *sud*, tandis que l'autre occupe les côtés *est* et *ouest*). Les deux armées doivent s'aventurer sur le champ de bataille. Sera déclarée gagnante la première armée qui réussira à connecter ses deux ailes. Cet embryon de jeu reposait sur la propriété topologique suivante : *considérons un quadrilatère et un segment de droite reliant une paire de côtés opposés, alors tout segment de droite relie l'autre paire de côtés opposés croquera inévitablement le premier segment de droite* [7]. Piet Hein fit toutefois face à un épineux problème : sur une grille carrée ou rectangulaire, chacune des armées pouvait entièrement bloquer la progression de l'autre. Autrement dit, l'affrontement entre deux joueurs aguerris risquait de pratiquement toujours résulter en un match nul.

Le jeu demeura donc sous forme inachevée dans l'esprit de Piet Hein pendant quelques années jusqu'à ce que, vers la fin de l'été 1942, il fut soudainement frappé d'un éclair de génie : il suffisait de modifier la forme de tablier de jeu ! Si celui-ci était divisé en cases hexagonales plutôt qu'en cases rectangulaires ou carrées, il devenait impossible de se retrouver pris dans une impasse ou, pour le dire autrement, toute partie devait faire un gagnant.

Avant d'entreprendre de coûteuses démarches de commercialisation, Piet Hein, qui n'était pas un joueur particulièrement perspicace, jugea plus sage de soumettre son jeu à un panel de joueurs aguerris pour en vérifier la valeur ludique. C'est ainsi qu'il fit imprimer, à l'automne 1942, quelques dizaines de grilles de jeu qu'il distribua parmi les étudiants de diverses universités de Copenhague. Parmi ceux qui furent ainsi initiés au jeu *Polygon* figure le jeune physicien Aage Bohr, fils du grand Niels Bohr.

Conforté par le succès que connut son jeu au sein de son groupe témoin, Piet Hein mit en œuvre son plan de commercialisation. Il déposa une demande de brevet et signa un contrat avec le quotidien *Politiken*, qu'il s'engagea à alimenter en chroniques au sujet de son jeu, en échange de quoi le journal recevrait une part des profits de la vente des calepins de jeu [7].

Un article intitulé « Vil de laere Polygon ? » (Souhaitez-vous apprendre à jouer à Polygon ?) parut en page 4 de l'édition de *Politiken* du samedi 26 décembre 1942 [7]. Puis, le 15 janvier 1943, des calepins de jeu firent leur apparition dans les rayons des commerces et des librairies danoises. Au cours des mois qui suivirent, plus de 50 000 calepins de jeu trouvèrent preneur dans ce pays qui comptait

alors moins de 4 000 000 d'habitants [7]. Il n'est donc pas exagéré de dire que Polygon connut un véritable succès commercial. Le succès fut cependant d'une courte durée. Les chroniques portant sur le jeu prirent brusquement fin au mois d'août 1943 lorsque Piet Hein et sa famille⁵ durent s'exiler pour échapper à la rafle menée par les nazis. Polygon tomba dans l'oubli.

Au terme de l'enquête qu'il mena pour retracer l'histoire du jeu de Hex, Gardner s'estima raisonnablement convaincu – à la lumière des informations que lui fournirent Piet Hein, David Gale et John Forbes Nash – que la réapparition de ce jeu sur le campus de l'Université de Princeton à l'hiver 1948-1949 ne découlait pas d'une réinvention entièrement indépendante.

Dans sa chronique de *Mathematical Games* publiée en juillet 1957 [3 ; 5] – soit celle qui permit enfin au jeu de Hex d'accéder à la notoriété –, Gardner attribua à Piet Hein l'invention du jeu Polygon et soutint que ce jeu fut probablement introduit en Amérique par le physicien Aage Bohr lors de séjours dans les universités de la côte est américaine. Le chroniqueur souligna ensuite le rôle que joua la communauté mathématique de Princeton dans la popularisation des jeux de connexion. Enfin, il attribua à Nash la paternité de la démonstration de l'existence d'une stratégie gagnante pour le premier joueur.

Suivant la publication de l'article, Nash fit savoir à Gardner que son texte l'avait blessé puisqu'il le faisait indûment passer pour un menteur auprès de ses collègues et amis. Ceux-ci allaient maintenant croire qu'il s'était attribué à tort, pendant des années, les mérites d'une découverte réalisée par autrui alors que la réalité était tout autre : s'il reconnaissait avoir discuté de jeu danois Polygon 11×11 avec Aage Bohr lors de sa visite à Princeton, sa réinvention et son analyse du jeu de même que la fabrication par David Gale d'un tablier de jeu 14×14 furent réalisés antérieurement à la visite du physicien danois⁶.

Même s'il n'y avait aucune façon pour Nash de démontrer la véracité de ses dires, Gardner et l'éditeur de *Scientific American* décidèrent de lui accorder le bénéfice du doute. La version de l'histoire de celui qui

5. L'épouse de Piet Hein, Neta, était juive.

6. David Gale semble corroborer la version de Nash.

comptait alors parmi les plus éminents spécialistes de la théorie des jeux⁷ – une version qui, de toute façon, ne remettait pas en question l’antériorité de l’invention de Piet Hein – avait après tout un certain degré de plausibilité. On fit donc paraître dans le numéro d’octobre la mention suivante :

Dans la discussion à propos du jeu de Hex auquel nous nous sommes consacrés en juillet, il n’a pas été fait mention que le jeu a été inventé indépendamment en 1948 par John Nash, qui était alors étudiant à l’Université Princeton. La popularité du jeu parmi les étudiants de Princeton résulte de cette version qui a été développée et analysée de manière approfondie avant que les nouvelles de la précédente invention danoise n’atteignent Princeton. (traduction libre) [4]

Cette fois, c’est Piet Hein qui se montra offensé. L’affirmation voulant que son jeu ait pu être redécouvert de façon complètement indépendante précisément au moment où Aage Bohr – l’un des grands amateurs du jeu – était de passage en ville provoqua chez lui l’incrédulité [7]. Gardner dut faire preuve de diplomatie pour convaincre Piet Hein d’épargner à Nash une inutile humiliation publique puisque David Gale et lui semblaient de bonne foi lorsqu’ils racontaient leur vérité, c’est-à-dire les faits tels qu’ils les avaient perçus ou tels qu’ils les avaient conservés en mémoire.

En définitive, que l’invention de Hex par Nash ait été totalement indépendante de celle de Piet Hein ou non importe peu⁸. Un fait demeure : bien que l’existence d’une stratégie gagnante pour le premier joueur ait été pressentie par Piet Hein et par de nombreux autres *Hexperts*, c’est bel et bien John Forbes Nash qui, le premier, en formula une démonstration mathématique rigoureuse⁹.

7. La thèse de doctorat de Nash, soutenue avec succès en 1950 et qui ne compte que 28 pages, porte sur la théorie des jeux. Elle lui valut, bien des années plus tard, de remporter le Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d’Alfred Nobel (1994).

8. D’aucuns pourraient voir dans la forme inaboutie dans laquelle le jeu de Hex fut présenté par John Forbes Nash Jr. à David Gale un argument étayant l’hypothèse d’une découverte indépendante.

9. Il importe néanmoins de préciser que Nash ne publia jamais sa démonstration de l’argument de vol de stratégie. Cet argument appartient à un folklore mathématique jusqu’à ce qu’il apparaisse explicitement dans un article de Alfred W. Hales et Robert I. Jewett [6], puis dans un article de David Gale consacré au jeu de Hex [2] et à ses incidences en mathématiques. Précisons que Nash rédigea un rapport pour le compte de la RAND Corporation (une institution de recherche et développement conseillant l’armée américaine) dans lequel il traite du jeu de Hex [9], mais celui-ci fut classifié.

Une fois que l'histoire de l'invention du jeu de Hex eut été partiellement éclaircie, les échanges entre Martin Gardner et John Forbes Nash prirent définitivement fin. D'ailleurs, au début de 1959, quelques mois seulement après avoir obtenu un poste permanent au Massachusetts Institute of Technology, Nash – qui avait complètement délaissé la théorie des jeux au début des années 1950 – dut remettre sa démission après avoir présenté des symptômes s'apparentant à la schizophrénie paranoïde. Son long combat contre la maladie mentale et son lent rétablissement loin des regards furent racontés par la biographie de Sylvia Nasar dans le livre *A Beautiful Mind* [8], qui inspira le film du même nom (2001).

À partir de 1970, l'état de santé de Nash commença à s'améliorer significativement, mais il continua à déambuler dans les couloirs de l'université et à gribouiller des symboles incompréhensibles sur les tableaux tel un spectre hantant les lieux. Il ne put reprendre une participation réelle (quoique tout aussi solitaire) à la vie universitaire qu'au milieu des années 1980 ; entre-temps, son nom avait commencé à apparaître – associé à la branche de la théorie des jeux qui puisait ses racines dans sa thèse doctorale – dans les manuels d'économie et les revues de mathématiques, mais aussi dans des articles en biologie évolutive et en sciences politiques [8]. L'interruption de sa carrière aura presque exactement coïncidé avec la collaboration de Martin Gardner au magazine *Scientific American*. Si les deux hommes n'entretinrent jamais une relation de proximité, les avancées réalisées par Nash en théorie des jeux, elles, imprégnèrent l'œuvre de Gardner en irriguant l'esprit de bon nombre de ses collaborateurs.

À bien des égards, la vie de John Forbes Nash revêt un caractère tragique. En 2015, il devint le premier récipiendaire du Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel (1994) à se voir également attribuer le Prix Abel¹⁰ par le roi de Norvège. Lui qui avait une soif insatiable de reconnaissance, il n'eut cependant guère le temps de célébrer cet exploit puisque son épouse et lui trouvèrent la mort lorsque le taxi dans lequel ils étaient montés pour rentrer à la maison, à leur retour de voyage, fut impliqué dans un accident de la route.

10. Le Prix Abel (remis annuellement pour récompenser l'œuvre d'une vie) et la médaille Fields (attribuée sur une base quadriennale à quatre mathématiciens de moins de 40 ans s'étant distingués par leurs travaux exceptionnels) sont considérés comme étant les deux plus prestigieuses récompenses qu'un mathématicien puisse recevoir.

Références

- [1] Browne, C. (2018). *Connection games: variations on a theme*. CRC Press.
- [2] Gale, D. (1979). «The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem». *The American mathematical monthly*, 86 (10), 818-827.
- [3] Gardner, M. (1957, juillet). «Mathematical Games: Concerning the game of Hex, which may be played on the tiles of the bathroom floor». *Scientific American*, 197 (1), 145-151. [www.jstor.org/stable/24940891]
- [4] Gardner, M. (1957, octobre). «Mathematical Games: How to remember numbers by mnemonic devices such as cuff links and red zebras». *Scientific American*, 197 (4), 130-140. [www.jstor.org/stable/24941949]
- [5] Gardner, M. (1959). «The Game of Hex». Ch. 8 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [6] Hales, A. W., et Jewett, R. I. (1963). «Regularity and Positional Games». *Transactions of the American Mathematical Society*, 106 (2), 222-229.
- [7] Hayward, R. B., et Toft, B. (2019). *Hex: The Full Story*. CRC Press.
- [8] Nasar, S. (1998). *A Beautiful Mind*. Simon & Schuster.
- [9] Nash, J. (1952). «Some games and machines for playing them». *Rand Corp. Tech. Rpt. D-1164*.
- [10] Zermelo, E. (1913). «Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels». Dans *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, 2, 501-504. Cambridge University Press.