

## PIET HEIN ET LE CUBE SOMA

*Humpty Dumpty sat on a wall.  
Humpty Dumpty had a great fall.  
All the king's horses and all the king's men  
Couldn't put Humpty together again.*

COMPTINE ANGLAISE D'AUTEUR INCONNU.

*« And if ever, by some unlucky chance,  
anything unpleasant should somehow happen,  
why, there's always soma to give you a holiday from the facts.  
And there's always soma to calm your anger,  
to reconcile you to your enemies,  
to make you patient and long-suffering.  
In the past you could only accomplish these things  
by making a great effort and after years of hard moral training.  
Now, you swallow two or three half-gramme tablets, and there you are.  
Anybody can be virtuous now.  
You can carry at least half your morality about in a bottle.  
Christianity without tears—that's what soma is. »*

ALDOUS HUXLEY, *BRAVE NEW WORLD* (1932).

Si l'on en croit la légende, un banquet fut organisé à Barcelone en l'honneur de Christophe Colomb pour célébrer son retour de ce qu'il croyait être les Indes orientales [1]. Lors de ce banquet, un membre particulièrement chauvin de la noblesse espagnole aurait cherché à en minimiser l'exploit de Colomb – qui, faut-il le rappeler, est né à Gênes – en affirmant que le Royaume d'Espagne ne manquait pas d'excellents navigateurs qui auraient très bien pu, eux aussi, accomplir la longue traversée. Estimant que pareille provocation (en public de surcroît) commande une réponse tout aussi cinglante, l'explorateur lança le défi à ses hôtes de faire tenir en équilibre un œuf. Aucun d'eux n'y parvint. Le navigateur génois, voulant démontrer qu'il possédait une rare capacité de pensée latérale, posa alors l'œuf sur sa pointe la plus fine et exerça une pression jusqu'à écraser légèrement la coquille. L'œuf abîmé tint alors en équilibre sur cette partie aplatie. « Une fois l'acte accompli, tous savent comment s'y prendre », lança-t-il, narquois.

Bien qu'il y ait tout lieu de croire que la légende de l'œuf de Colomb ne repose sur aucun fondement historique (des anecdotes analogues circulaient avant même que Christophe Colomb n'entreprenne sa traversée de l'Atlantique), Martin Gardner en fit mention dans sa chronique *Mathematical Games* de septembre 1965 [12; 15] à la suggestion de son ami le scientifique et poète<sup>1</sup> danois Piet Hein (1905-1996) puisqu'elle fournit un contexte permettant d'apprécier une curiosité physico-mathématique, soit le fait qu'il est possible de montrer que les corps rigides délimités par un sphéroïde<sup>2</sup> oblong, c'est-à-dire allongés sur le sens de la longueur, et de densité homogène sont instables au sens où la seule façon de les faire tenir sur l'une ou l'autre de leurs extrémités est d'appliquer l'astuce prétendument employée par Christophe Colomb [12; 15]. Dans un même élan, le chroniqueur présente une famille de solides de révolution – surnommés *super-œufs oblongs* popularisés par Piet Hein<sup>3</sup> – qui possèdent une propriété qui défie l'intuition : quel que soit leur ratio hauteur/largeur, lorsqu'on les pose sur la pointe, ils ne basculent pas !

L'intérêt de Piet Hein pour les super-œufs est né à la suite d'un problème qui lui fut soumis en 1959 par une équipe d'architectes urbains de Stockholm. La ville de Stockholm souhaitait aménager un important carrefour routier sur un terrain de forme rectangulaire délimité par deux routes parallèles orientées nord-sud et deux routes parallèles orientées est-ouest. Au centre de cet espace, on construisit un bassin de forme elliptique. La tâche confiée à Piet Hein consistait à trouver une courbe lisse s'inscrivant harmonieusement entre la forme elliptique du bassin et les quadrilatères circonscrits par les quatre routes attenantes.

L'attention du scientifique danois se porta sur une famille de courbes connue des mathématiciens sous le nom de *courbes de Lamé* en l'honneur du mathématicien et ingénieur français Gabriel Lamé (1795-1870) qui, le premier, les étudia. Il s'agit du lieu

---

1. Peu après le début de l'occupation du Danemark par l'Allemagne nazie, en 1940, Piet Hein décida de rallier le mouvement insurrectionnel. Prenant la plume plutôt que les armes, il fit paraître dans le quotidien *Politiken* – sous le pseudonyme Kumbel Kumbell – des aphorismes rimés (qu'il nomma *grooks*) visant à fortifier l'esprit et à inspirer l'âme. Grand amateur de poésie, Gardner fut particulièrement sensible à la puissance évocatrice des *grooks* de Piet Hein. Il choisit d'ailleurs l'un d'eux pour épigraphe de son autobiographie [17]. L'influence du même *grook* se reflète d'ailleurs dans le titre de l'ouvrage.

2. Un *sphéroïde* est une surface engendrée par la rotation d'une ellipse autour de l'un de ses axes.

3. Pour une raison qu'il nous a été impossible de déterminer, Piet Hein n'est jamais appelé « monsieur Hein ». Il est toujours désigné par son nom complet [10].

géométrique des points  $(x, y)$  d'un espace bidimensionnel pour lesquels la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{|x|^n}{a^n} + \frac{|y|^n}{b^n} = 1,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $n$  désignent des nombres réels strictement positifs fixés. Notons que si l'on pose  $n = 2$ , on obtient l'équation d'une ellipse. C'est pourquoi les courbes de Lamé sont parfois appelées *super-ellipses*.

Piet Hein dut déterminer pour quelle valeur de  $n$  la courbe apparaît la plus agréable à regarder. Il s'agit là d'une question relevant davantage de l'esthétique que des mathématiques. Il semble que la valeur  $n = \frac{5}{2}$  soit celle qui, plus que tout autre, donne l'impression d'être le plus harmonieux hybride entre une ellipse et un rectangle (ou encore, si  $a = b$ , entre un cercle et un carré). Cette courbe n'apparaît ni trop arrondie, ni trop anguleuse. C'est, en tout cas, la valeur de  $n$  qui fut retenue par l'équipe d'architectes urbains suédois qui aménagea la place Sergel [12 ; 15].

L'amitié entre Martin Gardner et Piet Hein émane de l'échange épistolaire qui débuta en 1957 lorsque le vulgarisateur – nouvellement chargé de sa chronique mensuelle – entreprit de retracer l'origine du jeu de société Hex. Son enquête, publiée dans le numéro de juillet 1957 de *Scientific American* [4 ; 8], lui permit de révéler au public américain que ce jeu avait été inventé par Piet Hein en 1942 et commercialisé au Danemark sous le nom de *Polygon*. Dans les 30 mois qui suivirent, Gardner consacra 3 autres chroniques *Mathematical Games* à faire connaître au grand public certaines des créations ludico-scientifique de Piet Hein. Tout d'abord, en février 1958 [5 ; 9], il aborda, dans un texte consacré au jeu de *Nim*, une version secondaire de ce jeu de stratégie ayant été popularisée au Danemark par Piet Hein sous le nom de *Bulo*<sup>4</sup>. Puis, dans sa chronique *Mathematical Games* de septembre 1958 [6 ; 11], Gardner présenta un puzzle mécanique inventé par Piet Hein au cours des années 1930. Enfin, l'édition de *Scientific American* de décembre 1959 [7 ; 13] comporte un texte de Martin Gardner initiant les lecteurs à un type de structure algébrique appelée *groupe*. Le vulgarisateur y mentionne au passage le lien unissant ce concept abstrait et le jeu *Tangloids* créé par Piet Hein.

4. Dans le monde anglo-saxon, ce jeu est appelé *TacTix* ou *Nimbi*.

Des quatre chroniques mentionnées ci-dessous, deux se démarquent par l'ampleur de l'enthousiasme qu'elles suscitèrent. La première, celle portant sur l'histoire du jeu Hex, sera abordée en détail lorsque nous nous pencherons sur la relation entre Martin Gardner et le mathématicien et économiste John Forbes Nash. Quant à la seconde, celle traitant d'un puzzle mécanique, elle retiendra notre attention pour le reste de ce chapitre. Si la difficulté inhérente à ce problème de réassemblage d'un solide est insignifiante, nous verrons dans ce qui suit qu'il a néanmoins causé certains maux de tête à bien des amateurs de puzzles. En 1933, au cours d'un exposé donné par le physicien allemand nobélisé Werner Heisenberg, Piet Hein fut frappé d'un éclair de génie [6 ; 11]. Il n'est certes pas question ici, comme nous le verrons, du genre de moment eurêka qui bouleversa le cours de l'histoire. Mais il s'agit néanmoins de ces moments si rares et si extatiques où l'on a l'impression qu'une idée est soudainement révélée à notre conscience sous une forme aboutie sans que l'on sache d'où elle vient ou pourquoi elle surgit ainsi tout à coup.

Il semble que ce soit l'invitation à quadriller mentalement l'espace tridimensionnel en cubes de même taille qu'adressa Heisenberg à son auditoire au cours de ses explications qui fut à l'origine de l'épiphanie que connut Piet Hein. Le danois se mit à imaginer toutes les formes non convexes pouvant être obtenues en collant face à face trois ou quatre cubes unités. Il vint rapidement à la conclusion qu'il existait précisément sept telles formes non convexes. Puis, il fut habité de la certitude qu'il devait être possible d'assembler ces sept formes non convexes de manière à former un cube  $3 \times 3 \times 3$ . Au sortir de la conférence de physique, Piet Hein confectionna en toute hâte 27 cubes de papier et les colla de sorte à obtenir les 7 formes non convexes qu'il avait visualisées dans sa tête. Enfin, il put vérifier que, comme il l'avait pressenti, il était possible d'emboîter ces formes non convexes de façon à former un cube  $3 \times 3 \times 3$ .

Par quel étrange concours de circonstances les sept plus simples figures solides non convexes formées par collage de cubes unités face à face peuvent-elles être assemblées pour former un cube de plus grande taille ? Martin Gardner dirait (sans doute à raison) que cette question est vide de sens. N'empêche, il y a là un cas patent de ces petites coïncidences heureuses et esthétiquement agréables qui émeuvent les mathématiciens.

Ne voyant guère d'application pratique à sa découverte et encore moins d'incidence de nature théorique, Piet Hein estima qu'il fallait au moins exploiter son potentiel récréatif. Il présenta sa partition du cube en sept morceaux comme un casse-tête mécanique en trois dimensions. La popularité de son casse-tête ne déborda toutefois pas des frontières des pays scandinaves.

Dès septembre 1958, cependant, avec la parution dans les pages de *Scientific American* d'un texte de Martin Gardner portant sur la curieuse trouvaille de Piet Hein [6], on vit l'intérêt pour ces sept figures non convexes se propager plus vite qu'un mal infectieux. Le jeu consistant à assembler les sept pièces pour former un cube  $3 \times 3 \times 3$  obséda les pensées de certains joueurs à un point tel que c'est par milliers que s'accumulèrent dans la boîte postale de Gardner les lettres de lecteurs (mi-sérieux, mi-amusés) affirmant regretter l'époque bénie et insouciante où ils n'étaient pas sous l'emprise de ce fichu casse-tête auquel ils consacraient désormais tous leurs temps libres. Le nom que Piet Hein donna à son casse-tête (à savoir le *cube Soma*) montre que son potentiel à causer une sorte de dépendance ou à subjuguier ses utilisateurs ne lui avait pas échappé. *Soma* est en effet le nom donné à la drogue consommée par les gens vivant au sein de l'État mondial dans le roman d'anticipation dystopique *Le Meilleur des Mondes (Brave New World)* [19], l'œuvre phare d'Aldous Huxley. L'écrivain britannique, vivement intéressé par le mysticisme indien, aurait quant à lui emprunté ce nom à un breuvage consommé lors de l'exercice d'un ancien rituel védique.

Flairant une occasion d'affaires, Parker Brothers, une société américaine spécialisée dans les jouets et les jeux de société, commercialisa le casse-tête développé par Piet Hein. Pour intensifier et prolonger le plaisir de ses clients, Parker Brothers fit accompagner les pièces du cube Soma d'un livret présentant diverses configurations (un château, un serpent, une chaise, un mur, etc.) que les joueurs étaient invités à reproduire. Allez savoir pourquoi, des 36 configurations retenues par l'éditeur de jeux, 3 sont impossibles à réaliser [11]. En faisant preuve d'ingéniosité, on peut en effet formuler un argument combinatoire démontrant positivement l'impossibilité d'assembler les sept pièces du jeu de sorte à obtenir la configuration illustrée.

Le véritable succès commercial que connut le cube Soma n'est certainement pas uniquement attribuable à la notoriété quasi instantanée

que Martin Gardner lui permit d'obtenir dans le monde anglo-saxon en lui consacrant l'une de ses chroniques dans *Scientific American*. Car, après tout, dès l'époque victorienne, d'autres jeux du même type avaient su susciter un engouement populaire [14 ; 16]. Toutefois, le fait que certaines des premières publications savantes sur le cube Soma soient signées de la main de mathématiciens figurant parmi ses plus proches collaborateurs et amis de Gardner [2] étayent la thèse voulant que la popularité du cube Soma comme objet de recherche mathématique [3 ; 18 ; 20 ; 21], elle, soit en partie redevable à son important travail de valorisation et de diffusion.

Du point de vue des mathématiques, on peut considérer le cube Soma comme un problème entièrement résolu. En effet, John H. Conway et Michael J. T. Guy de l'Université de Cambridge ont déterminé qu'il existe – à rotations et réflexions près – 240 façons d'assembler les 7 pièces conçues par Piet Hein pour former un cube  $3 \times 3 \times 3$ . Toutefois, contrairement à ce qui est indiqué dans le livret accompagnant le cube Soma commercialisé par Parker Brothers, Conway et Guy ne se sont pas servis d'un ordinateur pour obtenir les 240 solutions au cube Soma. Pour un puzzle d'ampleur modérée, soutient Conway, c'eût été « un aveu d'échec que d'utiliser un ordinateur. Si on trouve la bonne façon d'organiser le matériel, cela devrait prendre moins de temps pour tout faire à la main » [14 ; 16] que pour écrire le code du programme informatique. C'est en menant des raisonnements combinatoires, lors d'un après-midi pluvieux de 1961 au cours duquel ils n'étaient pas retenus par des tâches plus pressantes, que Conway et Guy triomphèrent du cube Soma.

Dans le quatrième tome [2] de *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, un ouvrage phare portant sur les jeux combinatoires qu'il coécrivit avec Elwyn Berkelamp et Richard K. Guy<sup>5</sup>, John H. Conway présenta toutes les solutions au cube Soma sous forme de graphe. Dans ce graphe – que Conway, un éternel plaisantin, appela *Somap* (il s'agit d'une contraction des mots *Soma* et de *Map*) – chaque solution est représentée par un sommet et deux sommets sont liés par une arête si un nombre très restreint de manipulations permet de passer de l'une à l'autre de ces configurations.

---

5. Richard K. Guy est le père de Michael J. T. Guy.

Enfin, quelque temps après la parution dans les pages de *Scientific American* du texte de Gardner portant sur le cube Soma, un jeune mathématicien américain nommé David A. Klarner lui fit acheminer un coffret de bois contenant des pièces d'un casse-tête mécanique inédit s'inspirant de ce cube. Impatient d'examiner de plus près le contenu du coffret, Gardner vida celui-ci sur sa table de travail. Erreur ! Aussi féru de puzzles fût-il, le grand vulgarisateur scientifique ne parvint jamais à réassembler les pièces pour les ranger dans le coffre [14 ; 16]. Klarner fit savoir à Gardner qu'il avait également conçu d'autres casse-têtes encore plus complexes. Il se garda cependant d'en envoyer des exemplaires à Gardner. Connaissant trop bien le pouvoir addictif de ces satanés jeux, Gardner lui en sut gré [14 ; 16].

## Références

- [1] Benzoni, G. (1965). *La Historia del Mondo Nuovo*.
- [2] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., et Guy, R. K. (2004). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Vol. 4. AK Peters
- [3] Brunvoll, J., Cyvin, B., Cyvin, E., Cyvin, S., Paus, A., Stølevik, M., et Stølevik, R. (1986). « The computerized SOMA cube ». *Symmetry: Unifying Human Understanding*, 10, 113-121.
- [4] Gardner, M. (1957, juillet). « Mathematical Games: Concerning the game of Hex, which may be played on the tiles of the bathroom floor ». *Scientific American*, 197 (1), 145-151. [www.jstor.org/stable/24940891]
- [5] Gardner, M. (1958, février). « Mathematical Games: Concerning the game of nim and its mathematical analysis ». *Scientific American*, 198 (2), 104-111. [www.jstor.org/stable/24942066]
- [6] Gardner, M. (1958, septembre). « Mathematical Games: A game in which standard pieces composed of cubes are assembled into larger forms ». *Scientific American*, 199 (3), 182-196. [www.jstor.org/stable/24941116]
- [7] Gardner, M. (1959, décembre). « Mathematical Games: Diversions that clarify group theory, particularly by the weaving of braids ». *Scientific American*, 201 (6), 166-178. [www.jstor.org/stable/24941191]
- [8] Gardner, M. (1959). « The Game of Hex ». Ch. 8 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [9] Gardner, M. (1959). « Nim and Tac Tix ». Ch. 15 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [10] Gardner, M. (1959). « Afterwords ». Dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [11] Gardner, M. (1961). « The Soma Cube ». Ch. 6 dans *The 2<sup>nd</sup> scientific american Book of Mathematical Puzzles & Diversions*. Simon & Schuster.
- [12] Gardner, M. (1965, septembre). « Mathematical Games: The "superellipse": a curve that lies between the ellipse and the rectangle ». *Scientific American*, 213 (3), 222-238. [www.jstor.org/stable/24931123]
- [13] Gardner, M. (1966). « Group Theory and Braids ». Ch. 2 dans *New Mathematical Diversions from scientific american*. Simon & Schuster.
- [14] Gardner, M. (1972, septembre). « Mathematical Games: Pleasurable problems with polycubes, and the winning strategy for Slither ». *Scientific American*, 227 (3), 176-184. [www.jstor.org/stable/24927437]
- [15] Gardner, M. (1975). « Piet Hein's superellipse ». Ch. 18 dans *Mathematical Carnival*. Knopf.
- [16] Gardner, M. (1986). « Polycubes ». Ch. 3 dans *Knotted Doughnut and Other Mathematical Entertainments*. W. H. Freeman & Co.
- [17] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus. The autobiography of Martin Gardner*. Princeton University Press.

- [18] Gronau, H. D., et Larisch, H. H. (1981). «On the SOMA-cube-puzzle». *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 72, 93-95.
- [19] Huxley, A. (1932). *Brave New World*. Harper & Brothers.
- [20] Mickus, A. L. (2016). «Using Soma Cube Puzzles to Master Common Core State Standards». *Ohio Journal of School Mathematics*, 74.
- [21] Peter-Orth, C. (1985). «All solutions of the Soma cube puzzle». *Discrete mathematics*, 57 (1-2), 105-121.