

FRANK HARARY ET LE TIC-TAC-TOE ANIMALIER

*The game of draughts we know
is peculiarly calculated
to fix the attention without straining it.
There is a composure and gravity in draughts
which insensibly tranquilises the mind.*

JAMES BOSWELL, *THE LIFE OF SAMUEL JOHNSON* (DATE INCONNUE).

*« It's as simple as tit-tat-toe, three-in-a-row,
and as easy as playing hooky. I should
hope we can find a way that's a little more
complicated than that, Huck Finn. »*

MARK TWAIN, *THE ADVENTURES OF HUCKLEBERRY FINN* (1884).

Le *tic-tac-toe* (aussi appelé *morpion* et *oxo*) compte assurément parmi les jeux les plus simples qu'il soit possible d'imaginer. C'est d'ailleurs à ce haut degré de simplicité que ce jeu de réflexion se pratiquant avec papier et crayon doit sa popularité comme outil pédagogique pour enseigner la prise de décision tactique aux enfants, de même que l'esprit sportif.

Rappelons les règles de ce jeu à deux joueurs. À tour de rôle, les joueurs doivent remplir l'une des cases d'une grille 3×3 avec le symbole qui leur est attribué (par souci de simplicité, nous supposerons dans ce qui suit que le symbole du premier joueur est une croix et que celui du second joueur est un cercle). Si un joueur parvient à aligner horizontalement, verticalement ou diagonalement trois de ses symboles, il est déclaré vainqueur sur-le-champ. Si la grille est remplie sans qu'aucun joueur soit parvenu à aligner trois symboles, on dit que la partie est *nulle*.

Dès le premier siècle avant notre ère, une variante du tic-tac-toe était en vogue dans l'Empire romain, comme en fait foi le passage suivant tiré du troisième livre de l'*Ars Amatoria* du poète latin Ovide : « Il est un autre jeu, divisé en autant de cases qu'il y a de mois dans l'année ; la table contient trois pièces de chaque côté : pour gagner, il faut les ranger toutes les trois sur la même ligne. »

Dans ce jeu, appelé *terni lapilli* (ce qui signifie « trois petites pierres » en latin), chaque joueur recevait trois pierres ; celles du premier joueur étaient noires tandis que celles du second étaient blanches. À tour de rôle, les joueurs devaient placer une pierre sur le plateau. Si aucun des joueurs n'était parvenu à aligner ses trois pierres (horizontalement, verticalement ou diagonalement), chaque joueur devait – lorsque son tour était venu de jouer – déplacer une pierre sur n'importe quelle des cases adjacentes (les déplacements diagonaux étaient interdits).

Aussi simple soit-il, le jeu de tic-tac-toe porte en lui quelques problèmes mathématiques élémentaires (en ce que leur résolution n'exige pas de connaissances avancées) et néanmoins complexes (en ce qu'il est nécessaire de travailler méthodiquement pour considérer un important nombre de cas).

Considérons par exemple le problème consistant à déterminer combien il y a de parties différentes de tic-tac-toe. On peut aisément vérifier que ce nombre doit être inférieur ou égal à 362 880. En effet, il y a 9 emplacements différents où le premier symbole (c'est-à-dire la première croix) peut être inscrit ; cela laisse donc 8 cases susceptibles d'accueillir le second symbole (soit le premier cercle) ; il y a donc 7 cases possibles où mettre la troisième marque (à savoir la deuxième croix) ; en poursuivant de la sorte, on voit qu'il y a

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362\,880$$

façons de choisir l'ordre dans lesquelles seront marquées les 9 cases de la grille 3×3 . Il ne saurait donc y avoir plus de 362 880 parties de tic-tac-toe.

Or, il ne fait aucun doute que cette borne supérieure surestime grandement le nombre réel de parties différentes. Toutes les parties dans lesquelles un alignement de trois symboles identiques a été réalisé lors de l'inscription de la cinquième, de la sixième ou encore de la septième marque ont été comptabilisées plus d'une fois¹⁰.

10. Suivant cette façon grossière de compter le nombre de parties, on a considéré comme étant des parties distinctes toutes les configurations obtenues en poursuivant le remplissage de la grille après qu'un vainqueur avait été déclaré. Notons que les parties se soldant par une victoire du deuxième joueur lors du remplissage d'une huitième case, elles, n'ont été comptées qu'une seule fois puisqu'il n'y a qu'une seule façon de compléter la grille après la victoire du deuxième joueur, soit en inscrivant une croix dans la seule case vide.

On trouvera une borne supérieure pour le nombre de parties différentes de tic-tac-toe qui soit plus représentative de la réalité en sommant les solutions trouvées aux six sous-problèmes que voici :

- Combien y a-t-il de façons de réaliser un premier alignement de trois croix au terme de l'inscription du cinquième symbole ?
- Combien y a-t-il de façons de réaliser un premier alignement de trois cercles au terme de l'inscription du sixième symbole ?
- Combien y a-t-il de façons de réaliser un premier alignement de trois croix au terme de l'inscription du septième symbole ?
- Combien y a-t-il de façons de réaliser un premier alignement de trois cercles au terme de l'inscription du huitième symbole ?
- Combien y a-t-il de façons de réaliser un premier alignement de trois croix au terme de l'inscription du neuvième symbole (soit après avoir achevé de remplir la grille 3×3) ?
- Combien y a-t-il de façons de remplir la grille 3×3 avec cinq croix et quatre cercles tout en évitant tout alignement de trois symboles identiques ?

Répondre à ces questions n'est pas une mince affaire. Sur son blogue¹¹, le mathématicien britannique Henry Bottomley explique en détail comment procéder pour solutionner chacune de ces questions ; les réponses sont respectivement 1 440, 5 328, 47 952, 72 576, 81 792 et 46 080. De ces 255 168 parties de tic-tac-toe possibles, 131 184 ($\approx 51,4\%$) sont remportées par le premier joueur, 77 904 ($\approx 30,5\%$) le sont par le second joueur et 46 080 ($\approx 18,1\%$) ne font aucun vainqueur. Comme l'indique Bottomley, le nombre de parties ainsi obtenues demeure toute-fois encore grandement surestimé puisqu'il ne tient pas compte des symétries de la grille de jeu.

Il convient de remarquer que toute partie de tic-tac-toe donnera lieu à une description différente selon qu'elle sera décrite par un observateur positionné au sud, à l'est, au nord ou à l'ouest du plateau de jeu. En

11. Consultable au lien suivant : [<http://www.se16.info/hgb/tictactoe.htm>].

effet, chaque observateur dispose de son cadre de référence propre. Les quatre descriptions distinctes décrivent pourtant la même partie¹².

Ainsi, comme le tic-tac-toe se joue sur une grille carrée et, puisque le carré est invariant¹³ sous les rotations de 0°, 90°, 180° et 270°, il s'ensuit que la borne supérieure pour le nombre de parties de tic-tac-toe distinctes mentionnées ci-dessus doit au moins être réduite d'un facteur de quatre. Or, les rotations ne sont pas les seules symétries à considérer. Le carré est également invariant sous quatre réflexions : celle par rapport à un axe horizontal, celle par rapport à un axe vertical et celles par rapport à chacune des deux diagonales. En définitive, on parvient à la conclusion que chaque partie a été comptée huit fois¹⁴ ou, pour le dire autrement, le nombre de parties différentes de tic-tac-toe est inférieur ou égal à :

$$\frac{255\,168}{8} = 31\,896.$$

Bien que le nombre de parties se soldant par une victoire du premier joueur soit considérablement plus élevé que toute autre issue, il suffit de disputer quelques parties pour développer l'impression qu'il est nécessaire, pour qu'un joueur l'emporte, que l'adversaire commette une bourde. Or cette impression peut être confirmée par une analyse exhaustive : si chaque joueur choisit toujours son prochain coup de façon optimale, alors on fera toujours partie nulle. D'ailleurs, comme chacun le sait, quelques observations astucieuses déterminantes suffisent à faire en sorte que l'on devienne un joueur imbattable (un joueur incapable de l'emporter face à un adversaire tout aussi aguerri, certes, mais un joueur néanmoins imbattable).

12. Considérons deux joueurs qui s'affrontent au tic-tac-toe. Le premier joueur (croix) est situé à l'ouest du plateau de jeu tandis que le second joueur (cercle) est positionné à l'est. Dans leur cadre de référence respectif, les joueurs numérotent chacune des cases (de gauche à droite, les cases les plus éloignées sont respectivement numérotées 1, 2 et 3; les cases intermédiaires sont respectivement numérotées 4, 5 et 6; enfin, les cases les plus rapprochées sont respectivement numérotées 7, 8, et 9). Du point de vue du joueur situé à l'ouest, la croix est située dans la case 2 alors que le cercle est situé dans la case 4. En revanche, du point de vue du joueur positionné à l'est la croix est située dans la case 8 tandis que le cercle est dans la case 6. Si l'on se contente de comparer les descriptions que feront chacun de ces joueurs de la partie en cours, on aura l'impression qu'il s'agit de deux parties différentes alors que tant s'en faut.

13. On entend par là que la figure résultante de cette transformation se superpose parfaitement à la figure originale.

14. Dans le langage hautement précis de la théorie des groupes, on dira que le groupe de symétrie du carré est, le groupe diédral d'ordre huit.

Martin Gardner a consacré plusieurs de ses chroniques de *Mathematical Games* à présenter ou analyser des variantes du tic-tac-toe [3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13], comme le *tic-tac-toe sauvage*¹⁵. Dans cette version du jeu, un joueur doit décider au début de chaque tour s'il préfère inscrire une croix ou un cercle ; le premier à aligner trois symboles identiques l'emporte. Une autre version alternative du tic-tac-toe abordée par Gardner est celle nommée *toe-tac-tic*¹⁶. Les règles de ce jeu sont similaires à celles de la version usuelle à une différence près : le premier joueur à aligner trois de ses symboles *perd* la partie.

Un autre proche parent du tic-tac-toe – certes moins sophistiqué que le tic-tac-toe sauvage et le toe-tac-tic, mais représentant un défi intellectuel bien plus considérable – est le *Gomoku narabe* (ce qui signifie, en japonais, « alignement des cinq pions »). Le jeu va comme suit : deux joueurs posent à tour de rôle un pion de leur couleur sur l'une des 361 intersections déterminées par 19 lignes horizontales et 19 lignes verticales. Est déclaré gagnant celui qui, le premier, parvient à aligner cinq pions de sa couleur horizontalement, verticalement ou diagonalement.

Le tic-tac-toe et le *Gomoku narabe* appartiennent tous deux à une vaste famille de jeux de plateau pour deux joueurs qu'il convient d'appeler les *jeux d'alignement de type m, n, k* . Il s'agit des jeux dans lesquels on cherche à aligner horizontalement, verticalement ou horizontalement $k \leq \min\{m, n\}$ pions de sa couleur sur une grille de dimension $m \times n$.

Un théorème démontré en 1913 par le mathématicien allemand Ernst Zermelo [19] stipule ce qui suit : considérons un jeu *fini* à deux joueurs jouant tour à tour, à *information parfaite* et sans hasard. Alors de trois choses l'une :

- Ou bien le premier joueur gagnera à tout coup s'il joue de façon optimale ;
- Ou bien le second joueur gagnera à tout coup s'il joue de façon optimale ;
- Ou bien les deux joueurs peuvent à tout coup forcer une partie nulle en jouant tous deux de façon optimale.

15. Les règles de ce jeu – qui doit son nom au mathématicien Solomon W. Golomb – auraient été proposées à Gardner par l'un de ses lecteurs, A. K. Austin de Hull en Angleterre [6; 9].

16. Ce nom aurait été proposé par Mike Shodell, un lecteur de *Scientific American* habitant à Great Neck [5].

Pour les besoins de la présente discussion, il n'est pas nécessaire de savoir ce qu'est un jeu fini ou ce qu'est un jeu à information parfaite. Il suffit de savoir que tout jeu d'alignement de type m, n, k vérifie les conditions du théorème de Zermelo.

Notons que le théorème de Zermelo est un *résultat d'existence non constructif*; il nous assure qu'une (et une seule) de ces trois possibilités se réalise, mais il ne donne aucune information permettant de déduire laquelle. Ce théorème, soit dit en passant, s'applique également au jeu d'échecs : soit il existe une stratégie dictant au joueur blanc comment donner la réplique au joueur noir dans n'importe quel cas de figure et permettant au joueur blanc de gagner à tout coup, soit il existe une stratégie dictant au joueur noir comment donner la réplique au joueur blanc dans n'importe quelle éventualité et permettant au joueur noir de gagner chaque partie, soit il existe une stratégie prescrivant aux deux joueurs comment forcer un match nul. Laquelle de ces trois possibilités mutuellement exclusives s'avère correspondre à la réalité ? Personne n'en a la moindre idée et, même si nous le savions, cela ne nous rapprocherait pas le moins du monde d'une identification concrète et explicite de cette stratégie gagnante.

Pour ce qui est des jeux d'alignement de type m, n, k , cependant, on peut démontrer – en employant un argument de *vol de stratégie* (à ce sujet, voir le chapitre portant sur John Forbes Nash et le jeu de Hex) – qu'il est impossible que ce soit le second joueur qui possède une stratégie gagnante. Ainsi, dans tous les jeux d'alignement de type m, n, k , soit le premier joueur possède une stratégie gagnante, soit il existe une stratégie prescrivant comment forcer une nulle¹⁷. Une fois de plus, il est légitime de se demander laquelle de ces deux possibilités mutuellement exclusives s'avère correspondre à la réalité. On a désormais acquis la certitude que la réponse à cette question dépend des valeurs m, n et k . On peut en effet montrer que les deux joueurs peuvent forcer une partie nulle dans tout jeu d'alignement de type $m, n, 3$ avec $m < 3$ ou $n < 3$. En revanche, le premier joueur possède une stratégie gagnante si $m \geq 3$ et $n \geq 4$ ou si $m \geq 4$ et $n \geq 3$. Les jeux d'alignement de type m, n, k avec $k = 4, 5, 6$ ont eux aussi été

¹⁷ Mentionnons, à titre indicatif, qu'il est possible de démontrer que l'argument de vol de stratégie ne s'applique pas au jeu d'échecs en raison de l'existence d'une classe de coups contraints appelés *Zugzwang* (soit des situations où il n'y a qu'un seul coup jouable et où le joueur est obligé de jouer ce coup qui lui est défavorable, car « passer son tour » est proscrit).

considérablement étudiés et il en a découlé une pléthore de résultats fragmentaires.

Dans sa chronique *Mathematical Games* d'avril 1979 [10], Gardner retrace le cheminement mental ayant mené le mathématicien américain Frank Harary (1921-2005) – un homme qui, comme nous le verrons, était doté d'une rare habileté à *ludifier* les idées et les concepts mathématiques les plus abstraits – à élaboré, en mars 1977, une autre façon de généraliser le tic-tac-toe [10 ; 13].

Résumons : afin de remporter une partie d'un des jeux d'alignement de type m, n, k , il faut parvenir à aligner k de nos symboles sur une grille $m \times n$ avant que l'autre joueur n'arrive à faire de même avec son propre symbole. Or, les alignements en cours de préparation sont plutôt faciles à déceler. Pourquoi ne pas fixer comme objectif la réalisation d'une figure plus complexe qu'un alignement ? Par cette simple question, Harary venait d'ouvrir de vastes nouvelles voies de recherche : l'étude des *jeux de concrétisation et d'évitement*¹⁸.

Harary ne se contenta pas de simplement poser des questions intéressantes et de soulever de nouveaux problèmes. Il chercha également à populariser, avec le concours de Martin Gardner [4], un jeu de son cru appelé *tic-tac-toe animalier*. Il s'agit d'un jeu de concrétisation où deux joueurs rivalisent de vitesse pour réaliser un polyomino¹⁹ prédéterminé (des figures que Harary – qui usait constamment d'astuces pour chasser l'impression d'austérité qui entoure trop souvent les mathématiques – se plaisait à appeler des *animaux*) sur une grille de taille prédéfinie (voire de taille arbitrairement grande). Notons que toute rotation ou symétrie de l'animal prescrit est également acceptée.

Présenter le tic-tac-toe animalier comme une généralisation du tic-tac-toe classique est en quelque sorte un abus de langage. Puisque le jeu de tic-tac-toe animalier obtenu en sélectionnant l'animal longiligne de trois cases diffère du tic-tac-toe en ceci que seuls les alignements horizontaux et verticaux permettent de remporter la victoire, il serait

18. Le tic-tac-toe classique et le *Gomoku narabe* sont des jeux de concrétisation puisque l'objectif est de réaliser une certaine configuration (soit un alignement horizontal, vertical ou diagonal). Le toe-tac-tic, quant à lui, est un jeu d'évitement puisqu'il faut éviter de réaliser une certaine configuration (soit, encore une fois, un alignement horizontal, vertical ou diagonal). Il est possible d'imaginer un jeu où l'objectif serait de réaliser avant l'adversaire tel ou tel motif tout en évitant à tout prix de réaliser tel ou tel autre motif.

19. Rappelons qu'il s'agit d'une réunion connexe de carrés. À ce sujet, voir le chapitre sur Solomon W. Golomb.

plus exact de parler du jeu conçu par Harary comme d'une généralisation d'une variante du tic-tac-toe où les alignements diagonaux ne sont pas pris en compte.

Si l'on joue au tic-tac-toe animalier avec un animal de quatre ou de cinq cases, on obtient un jeu de réflexion se pratiquant avec papier et crayon susceptible d'amuser deux joueurs amateurs pendant un certain temps. Mais ce n'est pas là que réside l'intérêt du jeu imaginé par Frank Harary. L'étude du tic-tac-toe animalier acquiert un parfum caractéristique de la *théorie de Ramsey* (à ce sujet, voir le chapitre sur Ronald Graham) dès lors que l'on s'intéresse à déterminer, pour un animal donné, quel est l'entier n minimal pour lequel le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante sur une grille de jeu de taille $n \times n$.

Si l'on considère l'unique animal d'une case, le problème est si simple à résoudre qu'il en est insignifiant : $n = 1$. Il en va de même pour les deux animaux de deux cases : on montre sans grande difficulté que $n = 2$. Les choses commencent à se corser lorsque l'on tourne notre attention vers les animaux de trois cases. Au terme d'une analyse un peu plus poussée, on parvient à se convaincre que $n = 3$ pour l'animal en forme de L, tandis qu'on a plutôt $n = 4$ pour l'animal longiligne.

Avec les animaux de quatre cases, les choses prennent une tangente imprévue. Andreas Raphael Blass, un collègue de Frank Harary, a montré que – quelle que soit la taille de la grille de jeu – le second joueur peut toujours forcer la partie nulle si l'animal prescrit est le carré 2×2 . De même, le second joueur sera toujours en mesure de prévenir la formation de tout animal de plus de quatre cases contenant un carré 2×2 .

La découverte réalisée par Andreas Raphael Blass signifie qu'il existe des *animaux avantageux* (au sens où, si la grille de jeu est suffisamment grande, le premier joueur disposera d'une stratégie gagnante) et des *animaux désavantageux* (c'est-à-dire des animaux pour lesquels une performance optimale du second joueur fera en sorte que la partie se soldera par une nulle).

Il va sans dire que la résolution de telle ou telle question spécifique liée au tic-tac-toe animalier n'est pas en soi d'une grande importance. C'est plutôt en raison de leur propension à produire des étincelles de génie que ce genre de problèmes à saveur combinatoire méritent

qu'on s'y intéresse. Les théorèmes les plus novateurs, les techniques de preuves les plus puissantes se présentent rarement à l'esprit de ceux qui les découvrent sous une forme pleinement aboutie ; ils mûrissent et se polissent graduellement au contact de problèmes intrigants et souvent banals en apparence.

Il serait regrettable de clore ce chapitre sans ajouter quelques mots au sujet de Frank Harary. Né à New York en 1921, Harary est l'aîné d'une famille d'immigrants juifs d'origine syrienne et russe. Après avoir décroché un doctorat à l'Université de Californie à Berkeley en 1948, il amorça sa carrière à l'Université du Michigan. À l'âge de 65 ans, il prit sa retraite pour mieux rebondir en acceptant un poste de professeur au département d'informatique à l'Université d'État du Nouveau-Mexique, un poste qu'il occupa jusqu'à son décès survenu en 2005.

Par son travail de pionnier, Harary a contribué à standardiser la terminologie employée en théorie des graphes, de même qu'à élargir la portée ; cela lui valut d'ailleurs d'être surnommé par ses confrères *Monsieur théorie des graphes* [10 ; 13]. Harary a contribué à faire ressortir les innombrables applications pratiques de la théorie des graphes – soit la discipline mathématique située à l'interface de la combinatoire et de la topologie, et qui s'intéresse à la donnée d'un ensemble de *sommets* et d'un ensemble d'*arêtes* entre ces sommets – et à mettre en valeur sa pertinence dans tous les domaines où la modélisation des relations s'avère d'intérêt (par exemple lorsqu'il est question de réseaux de neurones, de réseaux informatiques, de réseaux électriques, de réseaux sociaux, de réseaux hydrauliques, de réseaux routiers, de modélisation, de structures chimiques, etc.). Enfin, pour la petite histoire, les téléspectateurs du film américain à succès *Good Will Hunting* (1997) les plus attentifs aux détails auront pu apercevoir certaines des formules établies par Harary et portant sur l'énumération d'un type de graphes appelés *arbres* en raison de leur forme qui évoque effectivement la ramification des branches de ces plantes ligneuses [17].

Harary compte parmi les plus prolifiques mathématiciens solutionneurs de problèmes du dernier siècle. En effet, les quelque 575 articles scientifiques que publia Harary au cours de sa vie suffisent amplement à lui assurer une place aux côtés de géants comme Paul Erdős

(≈ 1400), Saharon Shelah (≈ 1100), Drumi Bainov (≈ 800), Leonard Carlitz (≈ 750), Béla Bollobás (≈ 500) et Ron Graham (≈ 350).

Au fil de leurs échanges épistolaires, Martin Gardner et Frank Harary en vinrent à développer une véritable relation d'amitié [15]. Les deux hommes entamèrent également une collaboration professionnelle qui culmina par la publication d'un article savant dans les pages de la revue *Eureka* en 1988 [14 ; 16]. Les auteurs y expliquent comment les graphes orientés (c'est-à-dire des graphes dans lesquels chaque arête se voit attribuer un sens de parcours) peuvent servir à schématiser, à étudier et à résoudre certains problèmes de calcul propositionnel. Sans doute un peu moins sobre et épurée que la représentation diagrammatique introduite par le logicien britannique John Venn en 1880, l'approche décrite par Gardner et Harary (qui affine une méthode initialement développée par Gardner dans les années 1950) est exempte de certaines des lacunes des diagrammes de Venn (comme la difficulté de rectifier un diagramme dans lequel une région a été ombrée par erreur). Dans une entrevue accordée à Don Albers en 2005 [1], Martin Gardner affirma qu'au moment où il contribua à développer une nouvelle représentation diagrammatique, il put goûter à l'intense plaisir (une sorte de céleste ivresse de l'âme) que de nombreux mathématiciens lui avaient confié avoir éprouvé lorsqu'ils eurent établi un nouveau théorème.

Il appert que l'intérêt de Gardner pour les diagrammes logiques est largement antérieur à sa rencontre et sa collaboration ponctuelle avec *Monsieur théorie des graphes*. De fait, cet intérêt précède même son association avec le magazine *Scientific American* à titre de chroniqueur régulier. En effet, il avait fait paraître dès mars 1952 [2] un article retraçant l'histoire des machines et des diagrammes logiques. Cet article servit d'ailleurs de bougie d'allumage et de motivation d'un effort de recherche et d'investigation historique plus poussé qui avait culminé par la publication d'un livre intitulé *Logic Machines and Diagrams* [4]. De manière quelque peu inattendue, c'est également l'entrain et l'enthousiasme qu'il mit à répertorier tous les écrits portant sur la logique symbolique et les représentations du calcul propositionnel qui lui valurent de redécouvrir l'œuvre littéraire du romancier victorien Lewis Carroll à laquelle, comme nous l'avons vu, il consacrerait plusieurs ouvrages. Il confia en effet au professeur de littérature anglaise Jan Susina [18] s'être replongé dans *Les Aventures d'Alice au Pays des merveilles* à l'âge adulte

(et y avoir découvert des perles qui lui avaient échappé lors de ses précédentes lectures à un beaucoup plus jeune âge) après être tombé sur les traités de logique symbolique que le mathématicien et logicien Charles Lutwidge Dodgson avait étonnamment fait paraître sous le même nom de plume avec lequel il avait signé quelques décennies plus tôt ses romans déjantés.

Références

- [1] Albers, D., et Gardner, M. (2005). « "Mathematical Games" and Beyond: Part II of an Interview with Martin Gardner ». *The College Mathematics journal*, 36 (4), 301-314.
- [2] Gardner, M. (1952, mars). « Logic Machines ». *Scientific American*, 186 (3), 68-74. [www.jstor.org/stable/24950629]
- [3] Gardner, M. (1957, mars). « Mathematical Games: Some old and new versions of ticktacktoe, plus the answers to last month's puzzles ». *Scientific American*, 196 (3), 160-168. [www.jstor.org/stable/24940785]
- [4] Gardner, M. (1958). *Logic machines and diagrams*. McGraw-Hill.
- [5] Gardner, M. (1959). « TickTackToe ». Ch. 4 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. University of Chicago Press.
- [6] Gardner, M. (1964, juin). « Mathematical Games: A collection of short problems and more talk of prime numbers ». *Scientific American*, 210 (6), 114-121. [www.jstor.org/stable/24931532]
- [7] Gardner, M. (1967, février). « Mathematical Games: Mathematical strategies for two-person contests ». *Scientific American*, 216 (2), 116-121. [www.jstor.org/stable/24931410]
- [8] Gardner, M. (1971, août). « Mathematical Games: Ticktacktoe and its complications, and answers to the quickie puzzles ». *Scientific American*, 225 (2), 102-105. [www.jstor.org/stable/24922805]
- [9] Gardner, M. (1971). « The Trip Around the Moon and Seven Other Problems ». Ch. 12 dans *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical games from Scientific American*. W. H. Freeman Company
- [10] Gardner, M. (1979, avril). « Mathematical Games: In which players of ticktacktoe are taught to hunt bigger game ». *Scientific American*, 240 (4), 18-36. [www.jstor.org/stable/24965167]
- [11] Gardner, M. (1975). « Jam, Hot and Other Games ». Ch. 16 dans *Mathematical Carnival*. Knopf
- [12] Gardner, M. (1983). « TickTackToe Games ». Ch. 9 dans *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. W. H. Freeman and Company
- [13] Gardner, M. (1992). « Generalized TickTackToe ». Ch. 13 dans *Fractal Music, Hypercards and More...: Mathematical Recreations from Scientific American Magazine*. W. H. Freeman Company
- [14] Gardner, M. (2001). « The propositional Calculus with Directed Graphs ». Ch. 4 dans *A Gardner's workout. Training the mind and entertaining the spirit*. A. K. Peters, Ltd.
- [15] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus. The autobiography of Martin Gardner*. Princeton University Press.
- [16] Gardner, M., et Harary, F. (1988). « The propositional calculus with directed graphs ». *Eureka*, 48, 34-40.
- [17] Lee-Chua, Q. N. (2001, 13 octobre). « The Father of Modern Graph Theory », *Philippine Daily Inquirer*.
- [18] Susina, J. (2000). « Conversation with Martin Gardner : the annotator of Wonderland ». *The Five Owls*, 14 (3), 62-64.
- [19] Zermelo, E. (1913). « Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels ». Dans *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* (Vol. 2, 501-504). Cambridge University Press.