

SOLOMON WOLF GOLOMB ET LES POLYOMINOS

*The Vermin only teaze and pinch
Their Foes superior by an Inch.
So, Nat'ralists observe, a Flea
Hath smaller Fleas that on him prey,
And those have smaler yet to bite 'em,
And so proceed ad infinitum.
Thus ev'ry Poet, in his Kind
Is bit by him that comes behind.*

JONATHAN SWIFT, *ON POETRY: A RAPSONY* (1733).

*« Great fleas have little fleas upon their backs to bite 'em,
And little fleas have lesser fleas, and so ad infinitum.
And the great fleas themselves, in turn, have greater fleas to go on;
While these again have greater still, and greater still, and so on. »*

AUGUSTUS DE MORGAN, *SIPHONAPTERA* (1872).

*« Big whirls have little whirls
That feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls
And so on to viscosity... »*

LEWIS F. RICHARDSON, *WEATHER PREDICTION BY NUMERICAL PROCESSES* (1922).

Solomon Wolf Golomb vit le jour à Baltimore le 30 mai 1932 d'un père rabbin originaire de Lituanie ayant dans son jeune temps réalisé des études de deuxième cycle en mathématiques, et d'une mère issue d'une grande famille russe déchue. Encouragé par son père, le jeune Solomon eut tôt fait de s'intéresser aux mathématiques. Il décrocha d'ailleurs un baccalauréat dans cette discipline à l'Université Johns Hopkins en deux fois moins de temps qu'il n'en faut habituellement. À tout juste 25 ans, il avait ajouté à sa récolte un diplôme de maîtrise ainsi qu'un de doctorat, tous deux obtenus à l'Université Harvard.

Même si, en préparant une thèse en théorie des nombres, Golomb s'attendait à faire carrière comme chercheur en mathématiques

pures, un emploi d'été en ingénierie l'incita à bifurquer vers les sciences appliquées et à se joindre au Jet Propulsion Laboratory¹, un centre de recherche (aujourd'hui sous la juridiction de la NASA) géré par l'Institut de technologie de Californie (Caltech), où il mena des recherches sur les communications militaires et spatiales. Il fit partie de l'équipe qui mit le premier satellite américain, *Explorer I*, en orbite autour de la Terre tout juste 80 jours après s'être vu confier le projet [22]. Au milieu des années 1960, Golomb développa une méthode de codage de source sans perte révolutionnaire (auquel il laissa d'ailleurs son nom) qui fut notamment mise à profit au cours de la mission d'exploration Mars Science Laboratory en 2012 alors qu'ils permirent à l'astromobile *Curiosity* d'acheminer jusqu'à la Terre des images de qualité appréciable.

En 1963, Golomb fut simultanément courtisé par Caltech, l'Université de Californie à Los Angeles (UCLA) et l'Université de Californie du Sud (USC). De façon quelque peu surprenante, il choisit sciemment de rejoindre le corps professoral de la moins prestigieuse de ces trois institutions d'enseignement supérieur, à savoir USC, parce qu'il estimait que c'est là qu'il serait en mesure de faire une plus grande différence. L'homme de science y enseigna et y réalisa des travaux de recherche pendant plus de cinq décennies².

Comme nous le verrons, en plus d'avoir été un pédagogue inspirant et un chercheur chevronné, Solomon Golomb fut, en marge de ses activités professionnelles régulières, un mathématicien remarquablement imaginatif et créatif.

Dans la seconde chronique *Mathematical Games* qu'il signa, en février 1957 [2 ; 5], Martin Gardner soumit à ses lecteurs un problème élémentaire bien connu des amateurs de problèmes de mathématiques récréatives : est-il possible de placer 31 dominos sur un échiquier auquel on a retranché deux cases situées dans des coins diagonalement opposés du plateau de sorte que les 62 cases restantes soient couvertes ? Si oui, comment ? Et sinon, pourquoi ? À la lecture de ce problème, le professeur de génie chimique Octave Levenspiel (1926-2017) écrivit

1. Laboratoire de recherche sur la propulsion par réaction.

2. Même après avoir soufflé 80 bougies, Solomon Golomb continua de diriger un séminaire destiné aux étudiants de première année du baccalauréat. Il mourut dans son sommeil au cours de la nuit du samedi 30 avril au dimanche 1^{er} mai 2016. Le vendredi précédent, il s'était rendu à son bureau comme à l'accoutumée pour travailler.

à Gardner afin de lui signaler qu'un certain Solomon Golomb avait fait paraître quelques années plus tôt, alors qu'il n'avait que 22 ans, un article intitulé *Checker Boards and Polyominoes* [20] dans lequel il considérait diverses variantes de ce problème de comblement d'un échiquier mutilé. Dans cet article, Golomb introduit formellement le concept de *polyomino*, à savoir une généralisation des dominos qui apparaissait de façon plus ou moins implicite dans une myriade de nouveaux problèmes de mathématiques récréatives.

Golomb définit un *polyomino*³ comme étant une figure géométrique plane d'un seul tenant et sans trou⁴ construite en joignant un nombre fini de carrés unitaires. Non content d'avoir forgé un terme sous lequel ranger toute une gamme de figures géométriques, Golomb proposa une terminologie permettant de regrouper sous un seul vocable tous les polyominoes ayant dans leur composition un même nombre de carrés unités : un *monomino* n'est rien d'autre qu'un carré unitaire ; un *domino*, sans surprise, est un rectangle obtenu en plaçant côte à côte deux carrés unitaires ; un *tromino* est l'une des deux figures (un long rectangle et une figure en forme de « L ») pouvant être formées en assemblant trois carrés unitaires ; les *tetrominoes*, au nombre de cinq, sont ce qui résulte de l'assemblage de quatre carrés unitaires ; et ainsi de suite.

Désireux d'en savoir plus au sujet de polyominoes et des principaux types de problèmes ou de puzzles mathématiques auxquels ils étaient susceptibles de donner lieu, Gardner contacta Golomb sans tarder. Ayant en commun un esprit ludique hypertrophié, les deux hommes s'entendirent à merveille et entretenirent une relation épistolaire durable. Golomb devint le premier éminent mathématicien à contribuer de façon fréquente et soutenue aux chroniques *Mathematical Games*, soit en fournissant à Gardner du grain à moudre, soit en l'aidant à décortiquer des textes mathématiques abscons.

Martin Gardner eut le plaisir de faire découvrir au grand public les polyominoes dans son texte publié dans l'édition de *Scientific American* de mai 1957 [3 ; 6]. Cette chronique connut un succès immédiat ; de nombreux mathématiciens professionnels et amateurs s'entichèrent des polyominoes et entreprirent de les étudier.

3. Le mot *polyomino* est formé, par dérivation régressive, à partir du mot *domino* en lui accolant le préfixe *poly-* provenant du grec *polus*, qui signifie « nombreux ».

4. Une configuration en forme d'anneau, par exemple, est proscrite.

Ces figures géométriques furent, au cours des années qui suivirent, au centre de nombreuses autres chroniques *Mathematical Games* [4 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12 ; 18]. Golomb, quant à lui, leur consacra une monographie dans laquelle il établit notamment toute une série de théorèmes sur les divers arrangements possibles [21]. Se serait-il donné la peine de revisiter les polyominos si Gardner n'avait pas, par ses écrits, contribué à l'avènement d'une branche florissante des mathématiques récréatives consacrée à leur étude ? Nul ne le saura avec certitude, mais il est permis d'en douter.

Nombre de polyomino d'ordre n

Ordre	Nom	Total
1	Monomino	1
2	Domino	1
3	Tromino	2
4	Tetromino	5
5	Pentomino	12
6	Hexomino	35
7	Heptomino	107
8	Octomino	363
9	Nonomino	1 248
10	Decomino	4 460
11	Undecomino	16 094
12	Dodecomino	58 937

En plus d'avoir forgé une nomenclature pour nommer et décrire les polyominos, Golomb se doit d'être considéré comme le créateur d'une grande variété de jeux impliquant ces figures géométriques. L'un des plus célèbres – nommé *Pentomino* – inspira d'ailleurs à l'ingénieur en informatique soviétique Alekseï Pajitnov le jeu *Tetris*⁵, l'un des plus grands classiques de premiers temps de l'histoire du jeu vidéo. Comme son nom l'indique, le jeu de *Pentomino* se joue avec des pentominos, qui sont, rappelons-le, au nombre de 12. Le but du jeu

5. Les pièces du jeu Tetris sont toutefois des tetrominos et non des pentominos.

consiste à paver, sans trou ni chevauchement, une grille rectangulaire de 60 unités carrées⁶ d'aire. L'auteur de science-fiction Arthur C. Clarke compta parmi les nombreux admirateurs de Gardner à développer une passion dévorante pour le jeu de *Pentomino* [1] ; ces figures sont d'ailleurs au centre d'une intrigue secondaire de son roman *Imperial Earth*.

Il va sans dire que le nombre de polyominos d'ordre n est une fonction du nombre n de carrés unitaires entrant dans leur composition. Toutefois, à ce jour, le problème de nature combinatoire consistant à établir une formule exacte donnant le nombre de polyominos en fonction de l'ordre n demeure non résolue. Pour calculer le nombre de polyominos d'ordre six ou plus, on n'a d'autre choix que de recourir à des algorithmes de décompte fort coûteux en temps de calcul. Quant au nombre de polyominos d'ordre n pour de très grandes valeurs de n , il faut donc se rabattre sur des valeurs estimées assez grossières.

Au cours des années 1960, Gardner consacra plusieurs rubriques à développer la théorie entourant divers autres types de *polyformes*, comme les *polydiamants*⁷ [10 ; 15], les *polyhexs*⁸ [13 ; 17] et les *polyabolos*⁹ [13 ; 17]. Enfin, dans sa rubrique de septembre 1972 [16 ; 19], Gardner se pencha sur la généralisation tridimensionnelle des polyominos, les *polycubes*.

Mentionnons en terminant que Solomon Golomb est l'idéateur d'une autre classe de figures géométriques que Gardner contribua à populariser, cette fois dans sa rubrique de mai 1963 [9 ; 14]. Ces figures sont nommées *rep-tiles*, un mot-valise formé par fusion de *replicating tiles*, des mots anglais qui signifient « tuiles reproduisantes ». Un *rep-tile d'ordre n* est un polygone convexe jouissant d'une surprenante propriété : il admet une décomposition en polygones plus petits qui sont des répliques exactes du polygone d'origine ; chacune de ces n répliques peut à son tour être partitionnée de la même manière en

6. Il existe quatre grilles distinctes ayant une telle aire, à savoir les grilles de dimensions 3 x 20, 4 x 15, 5 x 12, et 6 x 10.

7. Ces figures sont formées de façon analogue aux polyominos, mais en assemblant des triangles équilatéraux plutôt que des cubes unités.

8. Ces figures sont composées d'hexagones réguliers.

9. Ces figures sont constituées de triangles isocèles rectangles (des demi-carrés obtenus en coupant le long de l'une des deux diagonales. Le terme *polyabolo* est obtenu en accolant au préfixe « poly- » la fin du mot « diabolo », par allusion à la forme du diabolo (un instrument de jonglerie ayant la forme d'une gorge de poulie).

n répliques encore plus petites, et ce processus se poursuit à l'infini ; on peut également procéder à l'infini dans le sens contraire, soit en assemblant n copies du polygone d'origine afin de former une réplique plus grande, puis des répliques encore plus grandes, puis plus grandes encore, etc.

Golomb découvrit et étudia les rep-tiles en 1962. Dans une série de notes de recherche qu'il partagea ultimement avec Gardner (qui, bien entendu, en communiqua l'essentiel à ses lecteurs), il démontra notamment qu'il n'existe (à homothétie près) que deux rep-tiles d'ordre 2 : le triangle isocèle rectangle et le parallélogramme dont les paires de côtés entretiennent un rapport de 1 pour $\sqrt{2}$. Quant à la classe des rep-tiles d'ordre 4, elle contient minimalement tous les carrés, tous les rectangles, tous les parallélogrammes, tous les losanges et tous les triangles. Aussi frivole puisse-t-il sembler, le concept de rep-tile s'avère porteur. Il est en effet d'intérêt tant pour les mathématiciens étudiant les pavages du plan que pour ceux étudiant les fractales, deux notions sur lesquelles nous reviendrons dans les prochains chapitres.

Références

- [1] Clarke, A. C. (1975, 14 septembre). «Could you solve Pentominoes?». *Sunday Telegraph Magazine*.
- [2] Gardner, M. (1957, février). «Mathematical Games: An assortment of maddening puzzles. Warning: The Solutions will not be given until March». *Scientific American*, 196 (2), 152-158. [www.jstor.org/stable/24941903]
- [3] Gardner, M. (1957, mai). «Mathematical Games: About the remarkable similarity between the Icosian Game and the Tower of Hanoi». *Scientific American*, 196 (5), 150-157. [www.jstor.org/stable/249400862]
- [4] Gardner, M. (1957, décembre). «Mathematical Games: More about complex dominoes, plus the answers to last month's puzzles». *Scientific American*, 197 (6), 126-142. [www.jstor.org/stable/24942002]
- [5] Gardner, M. (1959). «Nine problems». Ch. 3 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [6] Gardner, M. (1959). «The Icosian Game and the Tower of Hanoi». Ch. 6 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [7] Gardner, M. (1959). «Polyominoes». Ch. 13 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [8] Gardner, M. (1960, novembre). «Mathematical Games: More about the shapes that can be made with complex dominoes». *Scientific American*, 203 (5), 186-201. [www.jstor.org/stable/24940703]
- [9] Gardner, M. (1963, mai). «Mathematical Games: On "rep-tiles", polygons that can make larger and smaller copies of themselves». *Scientific American*, 208 (5), 154-166. [www.jstor.org/stable/24936155]
- [10] Gardner, M. (1964, décembre). «Mathematical Games: On polyiamonds: shapes that are made out of equilateral triangles». *Scientific American*, 211 (6), 124-133. [www.jstor.org/stable/24931733]
- [11] Gardner, M. (1965, octobre). «Mathematical Games: Pentominoes and polyominoes: five game and a sampling of problems». *Scientific American*, 213 (4), 95-105. [www.jstor.org/stable/24931159]
- [12] Gardner, M. (1966). «Polyominoes and Fault-Free Rectangles». Ch. 13 dans *New Mathematical Diversions from scientific american*. Simon & Schuster.
- [13] Gardner, M. (1967, juin). «Mathematical Games: The polyhex and the polyabolo, polygonal jigsaw puzzle pieces». *Scientific American*, 216 (6), 124-134. [www.jstor.org/stable/24926033]

- [14] Gardner, M. (1969). «Rep-Tiles: Replicating Figures on the Plane». Ch. 19 dans *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*.
- [15] Gardner, M. (1971). «Polyiamonds». Ch. 18 dans *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from scientific american*.
- [16] Gardner, M. (1972, septembre). «Mathematical Games: Pleasurable problems with polycubes, and the winning strategy for Slither». *Scientific American*, 227 (3), 176-184. [www.jstor.org/stable/24927437]
- [17] Gardner, M. (1977). «Polyhexes and Polyaboloes». Ch. 11 dans *Mathematical Magic Show*. Knopf.
- [18] Gardner, M. (1977). «Polyominoes and Rectification». Ch. 13 dans *Mathematical Magic Show*. Knopf.
- [19] Gardner, M. (1986). «Polycubes». Ch. 3 dans *Knotted Doughnut and Other Mathematical Entertainments*. W. H. Freeman & Co.
- [20] Golomb, S. W. (1954). «Checker boards and polyominoes». *The American Mathematical Monthly*, 61 (10), 675-682.
- [21] Golomb, S. W. (1965). *Polyominoes*. Scribner.
- [22] Golomb, S. W., et Liu, A. (2021). *Solomon Golomb's course on undergraduate combinatorics*. Springer International Publishing.