

ARTHUR HAROLD STONE ET LES FLEXAGONES

*It has been said
that a mathematician can be content
with only paper and pencil.
In fact, there are times
when one doesn't even need the pencil.*

ETHAN J. BERKOVE ET JEFFREY P. DUMONT,
IT'S OKAY TO BE SQUARE IF YOU'RE A FLEXAGON (2004).

À l'automne 1939, Arthur Harold Stone, un étudiant de mathématiques britannique de 23 ans, porta ses pénates à Princeton afin d'y entreprendre des études doctorales [11] sous la supervision de Solomon Lefschetz, un spécialiste de la topologie algébrique.

Dans les semaines suivant son arrivée en Amérique du Nord, Stone prit conscience – comme de nombreux autres voyageurs avant lui – qu'il n'existe pas de normes universelles pour le format des feuilles de papier. Les cahiers qu'il acheta aux États-Unis dépassaient en effet de ses cartables achetés en Angleterre. Plutôt que d'acheter de nouveaux cartables, Stone se servit d'un coupe-papier pour tailler ses cahiers. Ce faisant, il se retrouva avec une grande quantité de bandes de papier. Pour s'amuser, il commença à plier ces bandes de papier de diverses manières.

En pliant la bande dans un angle de 60° à différents endroits, il obtint une rangée de triangles équilatéraux. En exploitant ces plis, il parvint à former un hexagone régulier. Il fixa alors les deux extrémités de sa bande de papier et il obtint ainsi une construction origami singulière pouvant être pliée de diverses façons afin d'exposer différentes faces [11; 36; 41; 42].

À ce stade, Stone prit conscience qu'il avait mis le doigt sur une structure fort intéressante. Il ne put s'empêcher de partager sa découverte avec ses amis Louis Bryant Tuckerman III, un étudiant aux cycles supérieurs en mathématiques; John Tukey, un jeune docteur en mathématiques; et Richard Feynman, un doctorant en physique. Tous ensemble, ils mirent sur pied un *comité* chargé de percer le mystère

entourant ces objets dynamiques [11 ; 36]. Dans les jours qui suivirent, l'intérêt pour ces dynamiques se répandit au sein de la communauté universitaire princetonienne comme un mal infectieux [36].

Le comité statua que le type de structures dynamiques qu'avait découvert Stone porterait le nom de *trihexaflexagone* (*tri-* puisqu'il y avait trois faces pouvant être exhibées ; *hexa-* à cause de leur forme hexagonale ; et *flexagone* en raison de leur caractère flexible). Enfin, on appela *flexigation* l'activité consistant à manipuler un flexagone.

Au cours des mois suivants, Stone, Tuckerman, Tukey et Feynman passèrent un temps considérable à cataloguer diverses configurations réalisables. Dès 1940, les quatre jeunes hommes parvinrent à formuler une description de la manière exacte dont il faut procéder afin de réaliser chacune des configurations possibles et imaginables du hexaflexagone. Leurs travaux, qu'ils considéraient n'être que l'insignifiant produit d'une activité de divertissement, ne furent cependant jamais publiés [11 ; 15 ; 41]. Par la suite, John Tukey porta son attention sur les *tetraflexagones* (soit un type de flexagone carré). Cependant, malgré ses efforts, il ne put développer une théorie complète. Aujourd'hui encore, la dynamique des tetraflexagones – considérablement plus complexe que celle des hexaflexagones – échappe partiellement à notre compréhension [13 ; 18 ; 41].

En un sens, c'est l'attaque-surprise menée par les forces aéronavales japonaises contre la base navale américaine de Pearl Harbor qui mit un terme aux travaux du comité de flexigation [11 ; 15 ; 41]. En effet, avec l'entrée en guerre des États-Unis d'Amérique, les membres du comité de flexigation consacrèrent leurs précieuses ressources cognitives à des tâches plus pressantes et certainement plus alignées avec l'intérêt national.

La dispersion des quatre membres fondateurs du comité de flexigation aurait pu sonner le glas de l'intérêt pour les flexagones. Si cela ne fut pas le cas, c'est parce que le physicien Louis Bryant Tuckerman Jr., le père de Louis Bryant Tuckerman III, sut garder le flambeau allumé en enseignant pendant plusieurs années les rudiments de la théorie de la flexigation aux gagnants d'un concours scientifique qu'il contribuait à organiser [11 ; 15 ; 41].

Dans ses mémoires [34], Martin Gardner relate avoir été initié aux flexagones par Royal V. Heath, un courtier d'investissement new-

yorkais avec qui il partageait un intérêt pour la magie. Par un après-midi de 1956, Heath montra à Gardner comment il fallait plier et déplier un hexahexaflexagone en tissu afin d'exposer telle ou telle face. Fort heureusement pour Gardner, dont la curiosité fut éveillée, Heath avait une connaissance assez fine de la manière dont les flexagones avaient vu le jour ; il put notamment diriger un Gardner complètement subjugué vers John Tukey. Au terme d'une enquête minutieuse au cours de laquelle il put également s'entretenir avec Bryant Tuckerman, Gardner rédigea un bref article dans lequel il relata le récit de la découverte des flexagones par Stone et de leur analyse par le comité de flexigation de Princeton. Soumis au magazine de vulgarisation scientifique *Scientific American*, l'article parut dans le numéro de décembre 1956.

Voyant venir le succès retentissant qu'allait connaître l'article intitulé sobrement *Flexagons*, Gerard Piel, qui était alors l'éditeur de *Scientific American*, contacta Gardner pour sonder son intérêt à tenir une chronique mensuelle intitulée *Mathematical Games* et portant sur les mathématiques récréatives. C'est ainsi que débuta la longue et féconde association entre Gardner et *Scientific American*. En somme, c'est une rencontre s'annonçant anodine entre deux amateurs de magie qui fut le principal élément déclencheur dans la vocation de vulgarisateur scientifique de Martin Gardner. D'ailleurs, cette nouvelle carrière démarra sur les chapeaux de roues. C'est en effet par centaines que les lettres de lecteurs tombés sous le charme envoûtant des flexagones parvinrent au chroniqueur [2]. De cette abondante correspondance naquirent plusieurs relations d'amitié ainsi qu'un nombre tout aussi considérable de collaborations fructueuses sur lesquelles nous nous pencherons dans les chapitres qui suivent.

Des 297 chroniques *Mathematical Games* qui furent publiées dans les pages de *Scientific American* au fil des ans, seulement deux¹ portent sur les flexagones : celle de décembre 1956 [11], qui porte sur les hexaflexagones, et celle de mai 1958 [13] dans laquelle le chroniqueur présente la théorie des tetraflexagones. À eux seuls, ces deux textes inspirèrent des dizaines d'articles savants et semi-savants [1 ; 3 ; 6 ; 7 ; 8 ; 35 ; 37 ; 38 ; 39 ; 40 ; 43], des centaines de sites internet et des dizaines de livres (voir par exemple [41]).

1. On traite toutefois des flexagones de manière tangentielle dans quelques autres chroniques (voir par exemple [24 ; 29 ; 31]).

Dans la postface du premier de ses quinze recueils de chroniques, Gardner exprima son contentement face à l'essor rapide et soutenu que connut la théorie de la flexigation. Du même souffle, le vulgarisateur émit le souhait de voir un jour paraître une monographie dédiée à cette théorie [15]. Au cours de sa dernière année de vie, Gardner vit son souhait être réalisé avec la parution de *Serious Fun with Flexagons* [42]. Ce livre fut rédigé par Les Pook, un ingénieur mécanique britannique ayant découvert les flexagones vers la fin des années 1960 en parcourant les recueils de chroniques de *Mathematical Games* nouvellement publiés [15 ; 18].

Ayant esquissé les contours de la théorie de la flexigation, voyons maintenant ce qui advint de ses quatre pionniers. Nous verrons que, si chacun suivit un itinéraire professionnel propre, tous retrouvèrent tôt ou tard Gardner sur leur chemin.

- Arthur Harold Stone (1916-2000) devint un éminent topologiste et laissa son nom à un important théorème de métrisabilité². Ce sont toutefois les travaux d'une remarquable ingéniosité qu'il avait réalisés – en collaboration avec ses camarades de classe Rowland Leonard Brooks, Cedric Austen Bardell Smith et William Thomas Tutte –, alors qu'il était encore étudiant au Trinity College de Cambridge, qui lui valurent sa seconde mention dans les écrits de Gardner. Ayant reçu de la part de William Tutte une longue lettre exposant l'histoire du *problème de la quadrature du carré*, Gardner décida de consacrer sa chronique *Mathematical Games* de novembre 1958 [14 ; 19] à ce problème dont le nom fut attribué par analogie (et, de surcroît, une analogie visant à exercer un effet humoristique) avec le proverbial problème de la quadrature du cercle. Réaliser la quadrature du carré consiste à paver un carré entier (c'est-à-dire un carré dont la longueur du côté est un entier naturel) avec des carrés entiers. En l'absence de conditions supplémentaires, il s'agit là d'une tâche ridiculement aisée : il suffit par exemple de quadriller le carré d'origine de sorte à obtenir une grille de carrés 1×1 . La variante la plus étudiée du problème de la quadrature du carré avec contrainte additionnelle est ce qu'on appelle la *quadrature parfaite du carré* : on interdit le recours à

2. Pour le dire simplement, un espace est dit métrisable si l'on peut montrer que sa structure est induite par une fonction qui formalise l'idée intuitive de distance.

deux carrés de même taille³. L'approche employée par Brooks, Smith, Stone et Tutte [5] pour résoudre le problème de la quadrature parfaite du carré est d'une remarquable ingéniosité. En substance, ils assimilent le pavage du carré à un circuit électrique et appliquent les lois de Kirchhoff à ce circuit.

- Louis Bryant Tuckerman (1915-2002) fit carrière comme chercheur au centre de recherche de IBM à Yorktown Heights [15]. Des quatre théoriciens de la flexigation, Tuckerman fut le premier à voir son nom apparaître dans une chronique *Mathematical Games*. Certains de ses travaux en topologie, d'importance plutôt secondaire, furent en effet mentionnés dans le numéro de *Scientific American* de juin 1957 [12, 16]. Enfin, Tuckerman vit sa plus importante réalisation mathématique en carrière – soit la découverte, en 1971, du 24^e nombre de Mersenne premier⁴ – être soulignée par Gardner dans un addendum à sa chronique de mars 1964 publiée dans le recueil *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from scientific american* [23] qui parut en 1971.
- John Wilder Tukey (1915-2000) devint l'un des plus influents et prolifiques statisticiens américains de sa génération. Notons cependant que l'empreinte qu'il laissa dans l'histoire scientifique déborde considérablement des limites de la statistique. Mentionnons, à titre d'exemple, qu'il mit au point en 1959 des techniques mathématiques permettant de repérer les essais nucléaires souterrains à partir de données sismologiques et qu'il contribua, en 1965, au développement de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide, qui est abondamment utilisé en traitement numérique du signal. Dans sa chronique d'avril 1959 [17 ; 20], Gardner exposa à ses lecteurs les grandes lignes d'un étonnant théorème énoncé et démontré par Tukey conjointement avec Arthur Stone, le père de la flexigation, à savoir une généralisation d'un résultat mathématique

3. Dans sa chronique de septembre 1966 [22 ; 26], Gardner traite à nouveau de la quadrature du carré. Il aborde cette fois un problème connu sous le nom de *problème du quilt de madame Perkins* (il s'agit d'un nom forgé par le concepteur britannique de puzzles Henry Ernest Dudeney, qui puisa une partie de son inspiration chez son compétiteur américain Sam Loyd). Il s'agit cette fois de réaliser la quadrature du carré avec la contrainte additionnelle suivante : les longueurs des différents carrés doivent être copremières.

4. Un *nombre premier* est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs entiers positifs, à savoir 1 et lui-même. Un *nombre de Mersenne* est un nombre de la forme $2^n - 1$, où désigne un entier naturel non nul. Ces nombres doivent leur nom au religieux français Marinus Mersennius (1588-1648) qui les étudia. Un *nombre de Mersenne premier* est un nombre de Mersenne qui est également un nombre premier (par exemple, $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$ et $31 = 2^5 - 1$). Le nombre de Mersenne premier identifié par Tuckerman est $2^{19937} - 1$. Au moment de la publication, 51 nombres de Mersenne premiers étaient connus, le plus grand étant $2^{82589933} - 1$.

portant le nom insolite de *théorème du sandwich au jambon*. Avant de décrire en quoi consiste l'apport de Stone et de Tukey, il convient d'éclaircir le lien unissant les mathématiques et les sandwiches au jambon. Le mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945) démontra en 1938 [4] que, tout comme il est toujours possible de couper d'un seul coup de couteau les trois éléments qui entrent dans la composition d'un sandwich au jambon (en l'occurrence les deux tranches de pain et le morceau de jambon) en deux morceaux d'égal volume, il est toujours possible – étant donné trois solides quelconques – de trouver un plan qui réalise une bissection simultanée de chacun de ces solides. Le théorème qu'établirent Stone et Tukey [44] stipule que pour tout entier positif $n \geq 2$ et toute collection de n objets n -dimensionnels, il est toujours possible de trouver un hyperplan affiné qui réalise une bissection simultanée de chacun de ces objets.

- Richard Phillips Feynman (1918-1988) fut impliqué dans le projet de recherche qui culmina par la production de la bombe nucléaire. Il devint par la suite l'un des plus grands physiciens de la seconde moitié du 20^e siècle. Ses travaux en électrodynamique quantique lui valurent le prix Nobel de physique de 1965 pour son approche spatio-temporelle de la mécanique quantique dans laquelle les antiparticules sont vues comme des particules qui remontent momentanément le temps⁵. Au soir de sa vie, alors qu'il se savait atteint du cancer qui devait ultimement l'emporter, il prit part à la commission présidentielle sur l'accident de la navette spatiale *Challenger*. En raison de son indépendance d'esprit (frôlant parfois l'insubordination), de sa ténacité, de sa curiosité et de sa vivacité, Feynman joua un rôle décisif au sein de cette commission en exposant au grand jour, au cours d'une audience télévisée, d'importantes failles de sécurité dans le fonctionnement du programme spatial américain liées notamment à de graves lacunes de communication entre les gestionnaires de haut niveau de la NASA et les ingénieurs œuvrant au sein du programme spatial américain. Farceur incorrigible et inarrêtable, Feynman fit paraître deux ouvrages qui connurent un

5. Gardner fit d'ailleurs mention de cette interprétation originale de l'antimatière dans sa chronique de mai 1974 portant sur la question de la faisabilité du voyage dans le temps [25; 30] ainsi que dans celle de mars 1979 sur l'altération du temps [28; 33]. L'utilisation que fit Feynman dans ses travaux du contre-intuitif concept de *probabilité négative* fut quant à lui mentionné dans la chronique *Mathematical Games* de juin 1977 [27; 32].

remarquable succès commercial et dans lesquels il raconta certaines de ses plus savoureuses aventures [9 ; 10]. Curieusement, il n'est nulle part fait mention des flexagones dans ses recueils de mémoire. Pourtant, de nombreuses autres expériences insolites auxquelles Feynman et ses acolytes se livrèrent au cours de leurs années d'études à Princeton y sont mentionnées⁶. Cette omission est d'autant plus étonnante que les diagrammes conçus par Feynman en vue de décrire la structure des hexaflexagones et de simplifier l'analyse de leur comportement dynamique constituent un apport non négligeable à la théorie de la flexigation [36]. Leslie Philip Pook considère même ces diagrammes comme étant des précurseurs des célèbres diagrammes inventés par Feynman en 1948, alors qu'il était professeur à l'Université Cornell, pour représenter simplement des équations mathématiques abscones décrivant les interactions des particules subatomiques dans le cadre de la théorie quantique des champs [41]. S'il n'a pas été donné à Gardner, en 1956, de rencontrer Feynman afin d'entendre de sa bouche sa version du récit des balbutiements de la théorie de la flexigation, le chroniqueur eut plus tard l'opportunité de compenser pour ce rendez-vous manqué. Il s'établit en effet une relation épistolaire entre lui et le formidable physicien et celle-ci s'inscrivit dans la durée. Gardner fit d'ailleurs appel à Feynman comme lecteur critique du manuscrit qui devint ultimement *The Ambidextrous Universe* [21], un ouvrage remarquable portant sur divers aspects de la symétrie et de l'asymétrie dans les cultures humaines et dans la nature. L'essai culmine d'ailleurs par une discussion au sujet de la supposée *loi de conservation de la parité* qui stipule que le monde physique et un monde obtenu en prenant l'image miroir du monde qui nous entoure se comportent exactement de la même façon à tous les points de vue. Notons qu'une expérience imaginée⁷ par les physiciens Tsung-Dao Lee et Chen-Ning Yang et réalisée par la physicienne Chien-Shiung Wu en 1956 invalida cette supposée loi de la nature. Cette découverte aussi renversante qu'inattendue valut aux deux théoriciens le

6. Dans *What Do You Care What Other People Think?* [10], Feynman raconte avoir cherché à vérifier si le jell-o parvient à coaguler si on le place dans un congélateur, mais qu'on le remue constamment. Tukey et lui auraient également rivalisé d'astuces pour parvenir à lire ou à parler à voix haute tout en énumérant, sans broncher, les nombres naturels dans leur tête.

7. Selon son biographe James Gleick, Richard Feynman joua en quelque sorte le rôle de bougie d'allumage du programme de recherche qui permit ultimement d'invalider la supposée loi de conservation de la parité [36, p. 332-333]

prix Nobel de physique 1957. Quant à l'expérimentaliste, elle fut récompensée du prix Wolf 1978.

Références

- [1] Anderson, T., McLean, T. B., Pajoohesh, H., et Smith, C. (2010). «The combinatorics of all regular flexagons». *European journal of Combinatorics*, 31 (1), 72-80.
- [2] Bernhart, F. R. (2016). «My Correspondence With Martin Gardner». [https://www.researchgate.net/profile/Frank-Bernhart/publication/305293454_My_Correspondence_With_Martin_Gardner/links/]
- [3] Berkove, E. J., et Dumont, J. p. (2004). «It's Okay to Be Square If You're a Flexagon». *Mathematics Magazine*, 77 (5), 335-348.
- [4] Beyer, W. A., et Zardecki, A. (2004). «The early history of the ham sandwich theorem». *The American Mathematical Monthly*, 111 (1), 58-61.
- [5] Brooks, R. L., Smith, C. A., Stone, A. H., et Tutte, W. T. (1940). «The dissection of rectangles into squares». *Duke Mathematical Journal*, 7 (1), 312-340.
- [6] Callan, D. (2012). «Flexagons lead to a Catalan number identity». *The American Mathematical Monthly*, 119 (5), 415-419.
- [7] Chapman, P. B. (1961). «Square flexagons». *The Mathematical Gazette*, 192-194.
- [8] Conrad, A. S., et Hartline, D. K. (1962). *Flexagons*. RIAS.
- [9] Feynman, R. P. (1985). Ralph Leighton (dir.). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!: Adventures of a Curious Character*. W.W. Norton & Co.
- [10] Feynman, R. P. (1988). Ralph Leighton (ed.) *What Do You Care What Other People Think: Further Adventures of a Curious Character*. W.W. Norton & Co.
- [11] Gardner, M. (1956, décembre). «Flexagons». *Scientific American*, 195 (6), 162-168. [www.jstor.org/stable/24941843]
- [12] Gardner, M. (1957, juin). «Mathematical Games: Curious figures descended from the Moebius band, which has only one side and one edge». *Scientific American*, 196 (6), 166-173. [www.jstor.org/stable/24940872]
- [13] Gardner, M. (1958, mai). «Mathematical Games: About tetraflexagons and tetraflexigation». *Scientific American*, 198 (5), 122-129. [www.jstor.org/stable/24941006]
- [14] Gardner, M. (1958, novembre). «Mathematical Games: How rectangles, including squares, can be divided into squares of unequal size». *Scientific American*, 199 (5), 136-144. [www.jstor.org/stable/24944827]
- [15] Gardner, M. (1959). «Hexaflexagons». Ch. 1 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [16] Gardner, M. (1959). «Curious Topological Models». Ch. 7 dans *The scientific american Book of Mathematical Puzzles and Games*. Simon & Schuster.
- [17] Gardner, M. (1959, avril). «Mathematical Games: The mathematical diversions of a fictitious carnival man». *Scientific American*, 200 (4), 160-170. [www.jstor.org/stable/26172036]
- [18] Gardner, M. (1961). «Tetraflexagons». Ch. 2 dans *The 2nd Scientific American book of mathematical puzzles & diversions*. Simon & Schuster.
- [19] Gardner, M. (1961). «Squaring the Square». Ch. 13 dans *The 2nd Scientific American book of mathematical puzzles & diversions*. Simon & Schuster.
- [20] Gardner, M. (1961). «James Hugh Riley Shows, Inc.». Ch. 17 dans *The 2nd Scientific American book of mathematical puzzles & diversions*. Simon & Schuster.
- [21] Gardner, M. (1964). *The Ambidextrous Universe: Left, Right, and the Fall of Parity*. Basic Books.
- [22] Gardner, M. (1966, septembre). «Mathematical Games: The problems of Mrs. Perkins' quilt, and answers to last month's puzzles». *Scientific American*, 215 (3), 264-276. [www.jstor.org/stable/24931059]
- [23] Gardner, M. (1971). «Patterns and Primes». Ch. 9 dans *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from scientific american*, W. H. Freeman & Co.
- [24] Gardner, M. (1971, mai). «Mathematical Games: The combinatorial richness of folding a piece of paper». *Scientific American*, 224 (5), 110-117. [www.jstor.org/stable/24927800]

- [25] Gardner, M. (1974, mai). «Mathematical Games: On the contradictions of time travel, and answers to last month's problems». *Scientific American*, 230 (5), 120-125. [www.jstor.org/stable/24950081]
- [26] Gardner, M. (1975). «Mrs. Perkins' Quilt and Other Square-Packing Problems». Ch. 11 dans *Mathematical Carnival*. Knopf.
- [27] Gardner, M. (1977, juin). «Mathematical Games: The concept of negative numbers and the difficulty of grasping it». *Scientific American*, 236 (6), 131-135. [www.jstor.org/stable/24954076]
- [28] Gardner, M. (1979, mars). «Mathematical Games: On altering the past, delaying the future and other ways of tampering with time». *Scientific American*, 240 (3), 21-31. [www.jstor.org/stable/24965144]
- [29] Gardner, M. (1983). «The Combinatorics of Paper Folding». Ch. 7 dans *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. W. H. Freeman & Co.
- [30] Gardner, M. (1988). «Time Travel». Ch. 1 dans *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman & Co.
- [31] Gardner, M. (1988). «Catalan Numbers». Ch. 20 dans *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W. H. Freeman & Co.
- [32] Gardner, M. (1988). «Negative Numbers». Ch. 11 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... And the Return of Dr. Matrix*. W. H. Freeman & Co.
- [33] Gardner, M. (1992). «Does Time Ever Stop? Can the Past Be Altered?». Ch. 12 dans *Fractal Music, Hypercards, and More... Mathematical Recreation from Scientific American Magazine*. W. H. Freeman & Co.
- [34] Gardner, M. (2013). *Undiluted Hocus-Pocus*. Princeton University Press.
- [35] Gilpin, M. (1976). «Symmetries of the Trihexaflexagon». *Mathematics Magazine*, 49 (4), 189-192.
- [36] Gleick, J. (1993). *Genius: The life and science of Richard Feynman*. Vintage.
- [37] Hilton, P., Pedersen, J., et Walsler, H. (1997). «The Faces of the Tri-hexaflexagon». *Mathematics Magazine*, 70 (4), 243-251.
- [38] Iacob, I. E., McLean, T. B., et Wang, H. (2012). «The V-flex, Triangle Orientation, and Catalan Numbers in Hexaflexagons». *The College Mathematics Journal*, 43 (1), 6-10.
- [39] McLean, T. B. (1979). «V-flexing the hexahexaflexagon». *The American Mathematical Monthly*, 86 (6), 457-466.
- [40] Oakley, C. O., et Wisner, R. J. (1957). «Flexagons». *The American Mathematical Monthly*, 64 (3), 143-154.
- [41] Pook, L. P. (2003). *Flexagons inside out*. Cambridge University Press.
- [42] Pook, L. P. (2009). *Serious Fun with Flexagons: A Compendium and Guide* (Vol. 164). Springer Science & Business Media.
- [43] Pook, L. P. (2012). «From Hexaflexagons to Edge Flexagons to Point Flexagons». *The College Mathematics Journal*, 43 (1), 11-14.
- [44] Stone, A. H., et Tukey, J. W. (1942). «Generalized "sandwich" theorems». *Duke Mathematical Journal*, 9 (2), 356-359.