Association
mathématique
du Québec

Lu pour vous

Discrete and Computational Geometry, 2nd Edition

Frédéric Morneau-Guérin
Département Éducation, Université TÉLUQ
Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

La géométrie classique est morte et sa dépouille s'est fossilisée. Telle était l'opinion largement partagée au cours la majeure partie du XX$^{\text{e}}$ siècle. Qualifié de miraculeux, l'étonnant théorème du trisecteur, obtenu par le mathématicien anglo-américain Frank Morley en 1899, faisait figure d'ultime sursaut d'orgueil avant l'agonie. Le regard déjà porté vers d'autres horizons, le mathématicien professionnel type, ce chasseur de trésors, n'avait guère besoin d'être convaincu pour qu'il envisage la possibilité de céder la géométrie classique aux architectes, aux arpenteurs, aux charpentiers, aux ingénieurs, aux opticiens et aux urbanistes. En somme, considéré comme pleinement explorée, ce champ du savoir avait décidément perdu son prestige des temps passés.

C'est en tout cas l'impression qui se dégage des propos tenus par Eric Temple Bell (1883-1960), ce mathématicien écossais qui connut un certain succès populaire lorsqu'il s'adonna à la chronique sur l'histoire des mathématiques, dans *The Development of Mathematics* :

> *The geometers of the 20th century have long since piously removed all these treasures to the museum of geometry where the dust of history quickly dimmed their luster* [Les géomètres du XX$^{\text{e}}$ siècle ont depuis longtemps pieusement transféré tous ces trésors au musée de la géométrie, où la poussière de l'histoire a rapidement terni leur éclat].

Le topologiste juif allemand Hans Freudenthal (1905-1990) pointait sensiblement dans la même direction lorsqu'il affirma ce qui suit dans un texte intitulé *Geometry Between the Devil an the Deep Sea* :

> *For long times mathematics has been synonymous with geometry. In fact, there existed other branches, too, algebra, trigonometry, calculus, which, however, were not much more than collections of haphazard, badly founded rules, whereas geometry was a perfect logical system, where everything rigorously followed from definitions and axioms. You know that things have changed ; today mathematicians are prone to*

> *reject traditional geometry, because it is not a rigorously deductive system.* [Pendant longtemps, les mathématiques ont été synonymes de géométrie. En réalité, il existait d'autres branches, telles que l'algèbre, la trigonométrie et le calcul, qui n'étaient toutefois guère plus que des recueils de règles aléatoires et mal fondées, alors que la géométrie était un système logique parfait, où tout découlait rigoureusement de définitions et d'axiomes. Vous savez que les choses ont changé ; aujourd'hui, les mathématiciens ont tendance à rejeter la géométrie traditionnelle, car elle n'est pas un système rigoureusement déductif.].

Et que dire de la formule-choc assénée par Jean Dieudonné (1906-1992) – le grand mathématicien lillois comptant parmi les membres fondateurs, mais aussi parmi les plus prolifiques, de l'influent groupe Bourbaki qui s'était positionné comme fer de lance du formalisme et de la hiérarchisation des structures abstraites – lors d'un séminaire, en 1969 : « À bas Euclide ! Mort aux triangles ! »

Sous l'impulsion imprimée par Bourbaki, la géométrie – déjà en voie de se dissoudre dans l'algèbre et l'analyse – était en train de se redéfinir en une discipline sans diagrammes ni représentations visuelles, où tous les résultats ne devaient être obtenus que par le raisonnement. Indigne de confiance, car elle nous abandonnait à la subjectivité et à l'erreur, la perception visuelle du réel devait être expurgée des mathématiques.

Fort heureusement, il s'en trouva – comme Harold Scott MacDonald Coxeter – pour s'opposer à cet effort de raréfaction de l'atmosphère dans laquelle s'effectuent les mathématiques et pour tenter de réhabiliter l'indispensable imagerie interne dans un premier temps, puis l'utilisation de supports visuels pour favoriser, sinon la compréhension, du moins l'apprentissage, dans un deuxième temps.

Satyan L. Devadoss et Joseph O'Rourke, respectivement professeurs au Williams College et au Smith College, appartiennent au courant alimenté par Coxeter. Ils nous proposent, dans la seconde édition de *Discrete and Comptutational Geometry*, publiée aux presses de l'Université Princeton, un remarquable ouvrage d'introduction à une branche relativement récente des mathématiques dont les racines puisent à des sources remontant à l'Antiquité grecque et dont les fruits sont résolument ancrés dans le XXI^e siècle.

On ne sera pas surpris de voir les adjectifs *discret* et *computationnel* être associés, par une conjonction dans le titre de l'ouvrage, et par entrelacement de concepts et d'idées dans chacune de ses pages, car la géométrie doit être discrétisée en vue des calculs.

Le livre se situe au confluent de deux traditions : les recherches théoriques en mathématiques pures et les applications pratiques qui émergent en informatique. L'accent étant mis sur la géométrie, les nombreux algorithmes présentés dans cet ouvrage sont fortement ancrés dans l'intuition et la compréhension géométriques. Il n'y a donc ni code ni pseudo-code, de sorte à pouvoir rejoindre et servir un auditoire composé de quiconque possède un socle minimal de connaissances en mathématiques discrètes élémentaires. Dans le but d'explorer certains résultats plus ambitieux sans la préparation minutieuse qu'exigerait une démonstration complète, les auteurs recourent parfois à des preuves esquissées (indiquées comme telles) permettant de saisir l'essentiel du raisonnement sans détourner l'attention vers des considérations trop techniques.

Plus d'une décennie s'étant écoulée depuis la parution de la première édition de cet ouvrage, les auteurs ont cru bon de tenir compte de l'évolution des centres d'intérêts du domaine de la géométrie discrète et computationnelle s'étant produite au cours de cette période. Cette seconde édition a donc fait l'objet d'une importante réorganisation, mais aussi de nombreux ajouts, voire de retranchements, afin de privilégier les thèmes les plus au cœur d'un champ encore en plein essor. De plus, la collection de problèmes ouverts a été entièrement mise à jour. L'apport le plus intéressant réside dans l'ajout de 70 suggestions de sujets (soit 10 par chapitre) pouvant faire l'objet d'un projet de fin d'études de premier cycle.

Le livre débute avec l'étude des polygones, figures certes élémentaires, mais d'une richesse combinatoire inépuisable. Dès les premières pages, les auteurs rappellent la variété des problèmes qui naissent de la simple observation d'un polygone : compter ses diagonales, comprendre les conditions de convexité, analyser les possibilités de partition en figures plus simples comme les triangles, suivant un processus – la triangulation – que les auteurs décrivent comme l'équivalent géométrique de ce qu'est la décomposition en produit de facteurs premiers pour la théorie des nombres (à la différence importante près qu'il n'y a pas, en géométrie, unicité de la décomposition). Ce chapitre met aussi en lumière une différence surprenante entre les triangulations en deux dimensions et les tétraédralisations en trois dimensions.

De cette base, le livre passe à un objet fondateur de la géométrie computationnelle : l'enveloppe convexe. Elle est définie comme le plus petit ensemble convexe contenant un nuage de points, et constitue une sorte d'empreinte géométrique de l'ensemble étudié. L'exposé se partage entre propriétés combinatoires (nombre maximal de sommets ou d'arêtes selon la dimension) et techniques de calcul effectives. Les auteurs présentent plusieurs méthodes classiques de construction, tout en insistant sur la question de la complexité, cœur battant de la géométrie computationnelle.

Le troisième chapitre approfondit le thème de la triangulation, cette fois non plus seulement comme découpage d'un polygone, mais comme division d'un ensemble de points sans structure. On y aborde notamment un type de graphes décrivant comment passer d'une triangulation à une autre par modifications locales, et on examine des critères d'optimalité tels que la minimisation de la longueur totale des arêtes ou la maximisation de certains angles. Cette étude révèle un équilibre subtil entre combinatoire et optimisation, et prépare la rencontre avec une construction plus riche encore : les triangulations de Delaunay.

Le quatrième chapitre, plutôt court, est quant à lui consacré à aux diagrammes de Voronoi, dont les propriétés structurelles sont exposées avec clarté. La dualité avec la triangulation de Delaunay, qu'on présente brièvement, donne à la fois un outil conceptuel et un cadre algorithmique puissant. Par le biais d'applications, qu'on devine innombrables, on montre comment un concept géométrique assez intuitif devient un instrument fondamental en informatique et en sciences appliquées.

Dans le cinquième chapitre, on explore la question de la reconstruction de formes à partir de données ponctuelles. Ce champ, qui se situe à l'interface de la géométrie discrète et de la topologie algorithmique, illustre l'importance grandissante des méthodes discrètes pour comprendre des objets continus, notamment en modélisation 3D.

Le sixième chapitre traite des chaînes polygonales, c'est-à-dire des suites de segments reliés bout à bout. Derrière leur apparente simplicité se cache un riche ensemble de questions : une chaîne donnée peut-elle être dépliée sans croisement ? Une fois articulée, peut-elle se retrouver « verrouillée » dans une position irréversible ? On l'aura compris, on touche ici à la fois à la mécanique, à la robotique et à la topologie plane. Ce chapitre reflète bien l'originalité du livre, qui conjugue rigueur géométrique et regard appliqué vers les structures mobiles.

Le septième et dernier chapitre, qui est de loin le plus volumineux, élargit l'horizon vers les polyèdres et les espaces de configuration. Ce chapitre représente une sorte de point d'orgue où se rencontrent les thématiques développées tout au long du livre : discrétisation, algorithmie, combinatoire et mouvement. On y revisite quelques résultats classiques sur les polytopes convexes comme le théorème d'Euler liant sommets, arêtes et faces, les dualités entre polyèdres et graphes planaires, et les propriétés combinatoires générales. Mais on va aussi beaucoup plus loin en introduisant les espaces de configuration qui décrivent l'ensemble des positions possibles d'un système géométrique soumis à des contraintes. Ces espaces, qui mêlent géométrie, topologie et algorithmique, jouent un rôle essentiel dans des domaines allant de la conception assistée par ordinateur à la robotique.

Pris ensemble, les sept chapitres composent une progression cohérente qui mène le lecteur de la géométrie plane, à la portée immédiate de l'entendement (on pourrait être tenté de dire *la plus élémentaire* si ce n'était pas du fait que la page 1 du livre aborde le théorème de Jordan qui, pour intuitif qu'il puisse sembler, est tout sauf évident à démontrer !), jusqu'aux horizons modernes de la géométrie discrète et computationnelle.

Tapissé de centaines de figures en couleur de haute qualité (y compris quelques superbes représentations en 3D), l'ouvrage conserve tout au long un équilibre entre accessibilité et profondeur, ce qui en fait une voie d'accès tout indiquée pour l'étudiant désireux de se familiariser avec un pan des mathématiques qui demeure peu couvert dans le cheminement type au premier cycle universitaire, et ce, malgré ses innombrables applications dans des domaines où évoluent professionnellement bon nombre de personnes titulaires d'un grade de premier cycle en mathématiques.