L’UTILISATION DES SYSTÈMES DE NUMÉRATION ALTERNATIFS DANS LA FORMATION INITIALE DES FUTURS ENSEIGNANTS AU PRIMAIRE ET LE DÉVELOPPEMENT D’UNE COMPRÉHENSION CONCEPTUELLE APPROFONDIE DU SENS DU NOMBRE ET DES ALGORITHMES ARITHMÉTIQUES

Mémoire présenté comme exigence partielle
de la maîtrise en éducation

Par Josiane Dussault

Juin 2025

https://r-libre.teluq.ca/3843

Sommaire

Ce mémoire explore l’utilisation des systèmes de numération alternatifs dans la formation des futurs enseignants au primaire en formation initiale au Québec, en mettant l’accent sur le développement d’une compréhension conceptuelle approfondie du sens du nombre et des algorithmes arithmétiques. De nombreuses recherches ont révélé que les futurs enseignants ont souvent une compréhension davantage procédurale que conceptuelle des mathématiques, ce qui peut limiter leur capacité à enseigner de manière efficace et à favoriser le développement du raisonnement mathématique chez leurs élèves. L’utilisation de systèmes de numération alternatifs, tels que les bases autres que dix, permet de déconstruire les automatismes et de reconceptualiser les fondements du système de numération, c’est-à-dire, le sens du nombre, le sens des opérations, la valeur de position, la notion de regroupement, etc. Cette approche pédagogique permet aussi de sensibiliser les futurs enseignants au primaire en formation initiale aux difficultés rencontrées par les élèves lors de l’apprentissage des nombres. Ce mémoire présente les pratiques pédagogiques et les retours d’expérience de quelques formateurs universitaires au Québec.

Table des matières

Remerciements

Tout d’abord, un immense merci à ma famille. À Lily-A, Damien et Samuel, merci d’avoir été si patients, compréhensifs lors de ces dernières années alors que votre maman était parfois moins disponible parce qu’occupée à rédiger durant de longues heures. À Marc-Antoine, merci d’être ce papa si extraordinaire pour nos enfants et grâce à qui l’écriture de ce mémoire n’aurait pas été possible. À mes parents, merci de m’avoir toujours soutenue dans mes études. La fierté que je vois dans votre regard me touche profondément.

Merci aussi à mes nombreux ami.e.s, qui ont été d’une grande aide dans cette aventure. Vous m’avez écoutée, encouragée et soutenue, vous avez été compréhensifs lorsque je n’étais pas disponible, mais surtout, vous avez été là pour moi lorsque j’en avais besoin.

Merci à monsieur Mario Richard, qui m’a suggéré de m’inscrire à la maîtrise après avoir complété mon programme court en efficacité de l’enseignement et des écoles. Vous m’avez donné la confiance de plonger dans cette aventure.

Finalement, un merci tout particulier à mon directeur Frédéric Morneau-Guérin pour ses conseils, son encadrement, sa collaboration et sa grande disponibilité. Tu as cru en moi et je t’en remercie infiniment.

Introduction

Le sens du nombre est un concept très important en didactique des mathématiques. Selon certains chercheurs, il s'agirait même du fondement qui soutient l'apprentissage des mathématiques. Vu l'importance accordée à l'arithmétique dans le Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ), l'enseignement des mathématiques au primaire doit reposer sur la capacité des enseignants à transmettre une compréhension profonde du sens du nombre et des algorithmes arithmétiques. Or, de nombreuses recherches ont montré que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont, au fil du temps, développé majoritairement une approche procédurale des mathématiques, souvent au détriment d'une compréhension conceptuelle plus approfondie. Cette lacune peut avoir un impact significatif sur l'apprentissage des élèves, limitant leur capacité à développer des stratégies flexibles et un raisonnement mathématique autonome.

Dans ce contexte, l'utilisation des systèmes de numération alternatifs dans la formation des futurs enseignants au primaire en formation initiale apparaît comme une approche prometteuse. En les confrontant à des bases numériques autres que la base dix, ceux-ci sont amenés à déconstruire leurs automatismes et à repenser les fondements du système de numération. Cette démarche favorise non seulement une meilleure compréhension de la valeur de position et des opérations arithmétiques, mais aussi une prise de conscience des difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage des nombres.

Ce mémoire s'intéresse à la manière dont ces systèmes de numération alternatifs sont intégrés dans la formation universitaire initiale des enseignants au primaire au Québec et à leur impact sur le développement d'une compréhension conceptuelle approfondie. À travers une analyse des pratiques pédagogiques et des retours d'expérience des formateurs, cette recherche vise à mettre en lumière les bénéfices et les défis liés à cette approche, dans le but d'enrichir la formation initiale des enseignants et d'améliorer l'enseignement des mathématiques au primaire.

1. Problématique

Au cours des dernières années, plusieurs chercheurs se sont penchés sur la compréhension qu'ont les futurs enseignants au primaire en formation initiale au primaire du système de numération décimal et de ses algorithmes arithmétiques. Entre autres, Ma (1999), Thanheiser (2009), Harshmann (2016) et Reid & Reid (2017) ont tous constaté que ceux-ci avaient une compréhension davantage procédurale que conceptuelle, ce qui pourrait avoir un impact éventuel sur la compréhension de leurs futurs élèves. En effet, des chercheurs tels que Kinach (2002), Mitchell et al. (2013), Ball et al. (2008), Kumar et al. (2017) et Wessman-Enzinger et Tobias (2020) ont démontré que les enseignants devaient nécessairement avoir une compréhension plus approfondie et qui allait au-delà des automatismes développés depuis l'enfance. Dans les études consultées lors de la rédaction de ce mémoire, un des thèmes récurrents est que, « bien que les enseignants expriment leur désir d'enseigner les nombres entiers de manière plus significative, ils n'ont pas les connaissances nécessaires pour le faire. » (Schulz, 2018) (Hawthorne et al., 2022) Les connaissances spécialisées en matière de contenu incluent une compréhension conceptuelle approfondie des concepts mathématiques à enseigner. En effet, pour bien accompagner les élèves dans le développement de stratégies variées pour effectuer des opérations sur les nombres entiers, les futurs enseignants au primaire en formation initiale doivent avoir une compréhension qui dépasse la simple procédure à appliquer.

Il est donc essentiel que la formation des futurs enseignants se dote de cours qui aient pour but de reconceptualiser leur compréhension du système de numération décimal et ainsi d'approfondir leur compréhension du sens du nombre, de la valeur de position de ce système de numération et des algorithmes arithmétiques afin qu'ils puissent favoriser chez leurs élèves une compréhension davantage conceptuelle que procédurale.

1.1 Préparation mathématique des futurs enseignants au primaire en formation initiale

1.1.1 Portrait des connaissances mathématiques

Des chercheurs tels que Ma (1999), Thanheiser (2009), Harshmann (2016), Reid & Reid (2017) sont arrivés à la conclusion que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont une connaissance davantage procédurale que conceptuelle des mathématiques. Comme mentionné précédemment, puisque les futurs enseignants au primaire en formation initiale doivent posséder une compréhension plus développée qu'une simple compréhension procédurale, la première étape pour les aider est de « [r]econnaître les conceptions que la plupart des futurs enseignants en formation initiale ont lorsqu'ils entrent dans leurs cours de mathématiques » (Thanheiser, 2018). C'est pourquoi plusieurs chercheurs se sont intéressés aux connaissances mathématiques des futurs enseignants en formation initiale, mais aussi à celle des enseignants déjà en exercice. Parmi ceux-ci, on retrouve Liping Ma qui, en 1999, a mené une recherche auprès de 72 enseignants chinois et 23 enseignants américains. Son constat est le suivant : « Nous savons très peu de choses sur la qualité et les caractéristiques de la compréhension conceptuelle des enseignants. […] Dix-sept pour cent des enseignants américains et 86 % des enseignants chinois ont démontré une compréhension conceptuelle du sujet (Traduction libre) » (Ma, 2010, p. 22). Si les participants à sa recherche savent exécuter les algorithmes arithmétiques sur des nombres à plusieurs chiffres, ils ont de la difficulté à expliquer les principes mathématiques sur lesquels reposent les algorithmes. Par exemple, elle constate que les futurs enseignants au primaire en formation initiale savent exécuter une soustraction de nombres à plusieurs chiffres, mais qu'ils peinent à expliquer le concept d'emprunt lors d'une soustraction ou encore fournissent une explication arbitraire, souvent mathématiquement fausse ou inexacte (exemple : on ne peut soustraire 6 de 3, ce qui est faux). Lorsqu'elle demande aux enseignants de diviser par une fraction, seulement 43 % des enseignants américains ont réussi à effectuer la procédure. Les connaissances procédurales reliées à cet algorithme sont très faibles et souvent confondues avec les algorithmes des autres opérations sur les fractions. De plus, aucun des enseignants américains n'a réussi à fournir une explication mathématique appropriée pour expliquer la division par une fraction. Parmi les 23 enseignants américains ayant réussi à effectuer la procédure, très peu ont réussi à trouver une représentation de la division par une fraction : un seul enseignant a fourni une représentation conceptuellement correcte, mais problématique d'un point de vue pédagogique. Lors de cet exercice, les enseignants ont affiché diverses idées fausses sur la signification de la division par des fractions.

En 2009, Eva Thanheiser mène une recherche auprès de 15 futurs enseignants en formation initiale sur leurs conceptions des nombres entiers à plusieurs chiffres en leur demandant de justifier leurs procédures d'addition et de soustraction. Elle constate que les conceptions des futurs enseignants en formation initiale des nombres à plusieurs chiffres se regroupent en quatre catégories principales, deux correctes et deux incorrectes :

Tableau 1
Explication et répartition des conceptions des futurs enseignants en formation initiale (n = 15) (Thanheiser, 2009)

20 %	Représentation fiable selon les unités de références ; c'est-à-dire que, dans le nombre 571, - le chiffre 5 représente 500 unités ou 50 dizaines, - le chiffre 7 représente 70 unités ou 7 dizaines - et le chiffre 1 représente 1 unité.
13 %	Représentation partiellement correcte des chiffres comme des groupes d'unités ; c'est-à-dire que, dans le nombre 571, - le chiffre 5 représente 500 unités, - le chiffre 7 représente 70 unités - et le chiffre 1 represénte 1 unité.
47 %	Représentation partiellement erronée des chiffres en partie comme étant des chiffres concaténés ; c'est-à-dire que, dans le nombre 571, - le chiffre 5 représente 500 unités, - le chiffre 7 représente 7 unités - et le chiffre 1 représente 1 unité.
20 %	Représentation erronée des chiffres comme étant des chiffres concaténés ; c'est-à-dire que, dans le nombre 571, - le chiffre 5 représente 5 unités, - le chiffre 7 représente 7 unités - et le chiffre 1 représente 1 unité.

On remarque qu'environ le tiers des étudiants ont une représentation correcte, une compréhension conceptuelle du système de numération décimal. Si l'étude initiale ne comportait que 15 participants, Thanheiser a reconduit cette expérimentation avec 156 autres participants. Le taux d'étudiants ayant une représentation correcte chute alors brutalement : 18 % seulement des étudiants représentent correctement les chiffres d'un nombre entier à plusieurs chiffres.

Katie Harshman affirme, dans sa thèse en 2016, que

> « Les recherches montrent que les futurs enseignants manquent de connaissances conceptuelles sur les nombres entiers, les opérations et la valeur de place dans le système de base dix. Les concepts de valeur de place sont les plus problématiques pour les enseignants en formation initiale (Southwell et Penglase, 2005 ; Thanheiser, 2012 ; Zazkis et Khoury, 1993). Dans un autre projet, près de la moitié des enseignants en formation initiale n'ont pas pu reconnaître que le chiffre 2 dans le nombre 25 représentait 20 (Ross, 2001). Plus important encore, de nombreux enseignants en formation initiale ne sont pas en mesure d'expliquer la signification des règles et des procédures qui sont enseignées aux élèves dans leurs cours de mathématiques (Ball, 1988, 1990; Ma, 1999; Thanheiser et al., 2014). Il sera difficile, voire impossible, pour ces enseignants d'expliquer les concepts derrière les mathématiques à leurs élèves. » (Harshman, 2016)

Mary Reid et Steven Reid ont publié en 2017 un article portant sur leur étude effectuée auprès de 151 futurs enseignants en formation initiale ontariens. Cette recherche illustre que, « lorsqu'ils doivent résoudre des problèmes de calcul de 6ᵉ et 7ᵉ année portant sur les pourcentages, les fractions, les décimales, l'ordre des opérations et les nombres entiers » (Reid & Reid, 2017), les futurs enseignants au primaire en formation initiale utilisent les algorithmes appris et « manquent de compréhension conceptuelle, ce qui compromet davantage le développement des connaissances requises pour enseigner les mathématiques. » (Reid & Reid, 2017)

Au Québec, le constat semble être le même puisque les enseignants du primaire étant des généralistes, ils n'ont pas de formation disciplinaire contrairement aux enseignant du secondaire. Laurent Theis et Marie-Pier Morin (2006) ont soumis 204 étudiants en début de formation en enseignement préscolaire et primaire à l'Université de Sherbrooke à un test comportant des questions mathématiques de niveau 6e année primaire. Ce test a révélé « que les étudiants obtenaient une note moyenne de 51,7 %, (écart type de 16,4 %) et que certains étudiants avaient des difficultés majeures, se traduisant par des résultats aussi bas que 11 % à la note finale » (Proulx et al., 2012). Jérôme Proulx, professeur de didactique des mathématiques au Département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM) constate deux types de compréhension parmi les futurs enseignants au primaire en formation initiale : une compréhension compressée et une compréhension instrumentale des mathématiques. Proulx définit cette dernière comme une « compréhension du “comment faire”, mais sans comprendre le “pourquoi le faire ainsi” » (Proulx et al., 2012). Il propose une reconceptualisation des savoirs mathématiques de base pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale. Louise Poirier du département de didactique de la faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal (UDM) abonde dans le même sens que Proulx et affirme que la situation est semblable.

À l'Université du Québec à Rimouski (UQAR), un examen pour évaluer la culture et les compétences mathématiques est aussi administré aux futurs enseignants en formation initiale au primaire. Les questions portent sur les contenus du programme de formation au primaire, mais aussi sur ceux du premier cycle du secondaire. Le 1er mai 2025, La Presse publiait qu'en 2021, 72 % des aspirants enseignants ont échoué à leur premier essai.

> « Dès la prochaine rentrée, l'examen sera remplacé par un cours de savoirs mathématiques de 45 heures obligatoire pour tous, qui s'ajoutera aux quatre cours de didactique des maths de la formation. L'objectif ? “Favoriser un

> rapport positif aux savoirs mathématiques et à l'importance de leur enseignement au primaire", explique Mme Martel. "On continue de soutenir très fort l'idée du développement des compétences mathématiques, mais on veut le faire autrement, [avec] un cours obligatoire, où on va asseoir des bases communes pour tous les étudiants, plutôt qu'un examen qui implique parfois des conséquences sur la diplomation", ajoute-t-elle. » (Carrier, 2022)

1.1.2 Enjeux

Le fait que les futurs enseignants au primaire en formation initiale aient une compréhension davantage procédurale que conceptuelle des mathématiques aurait des conséquences négatives. D'abord, selon Kamii et Dominick (1997), sans connaissance conceptuelle approfondie, les futurs enseignants au primaire en formation initiale risquent de ne pas amener les élèves à développer leurs propres stratégies et ceux qui auraient pu développer leurs propres stratégies pourraient peut-être même les abandonner au profit des algorithmes enseignés, mais vont aussi peiner à expliquer aux élèves pourquoi les algorithmes fonctionnent ou encore pourquoi une stratégie développée par un élève est efficace ou non. Ensuite, « cela pourrait les amener à utiliser des techniques d'enseignement centrées sur les règles et les algorithmes plutôt que des techniques qui favorisent la réflexion des élèves et l'exploration des concepts. » (Harshman & Eisenreich, 2016) Des chercheurs tels que Narode, Board, et Davenport (1993), Kamii (1994), McNeal (1995), Kamii et Dominick (1997) ont affirmé que l'apprentissage d'algorithmes sans le développement d'une compréhension conceptuelle des opérations arithmétiques nuit aux élèves et ce, pour deux raisons : les algorithmes ne tiennent pas compte de la valeur de position et empêchent les élèves d'avoir leurs propres réflexions et d'ainsi développer leur sens du nombre.

> « Dans une étude comparant les performances d'élèves à qui l'on avait enseigné des algorithmes à celles d'élèves à qui l'on n'avait pas enseigné d'algorithmes, les élèves "sans algorithmes" parvenaient plus souvent à la bonne réponse que les élèves utilisant des algorithmes […] (Kamii & Dominick, 1997). En plus d'être plus susceptibles d'obtenir la bonne réponse, les étudiants "sans algorithmes" étaient plus susceptibles d'être en mesure d'expliquer pourquoi leurs stratégies étaient efficientes. » (Fasteen, 2015)

L'apprentissage d'algorithmes n'est cependant pas complètement à éclipser de l'enseignement des opérations sur les nombres. En effet, ceux-ci « visent à réduire la charge cognitive en minimisant les demandes non seulement sur la mémoire de travail mais aussi sur les processus de raisonnement (Clarke 2005 ; Schulz & Leuders, 2015). » (Schulz, 2018) Ce qu'une compréhension conceptuelle peut apporter c'est la flexibilité qui permet de décider « d'appliquer soit un algorithme basé sur les chiffres, soit une stratégie basée sur les nombres entiers, en fonction des nombres donnés et de l'expertise personnelle ». (Schulz, 2018)

Selon Moore (2016), les procédures peuvent être enseignées de façon que les élèves développent une compréhension de la valeur de position et le sens des opérations. Par exemple, l'utilisation de matériel de manipulation aide

> « à donner vie aux concepts mathématiques et sont adaptées au développement des élèves d'âge élémentaire. Sur la base de cette étude, les résultats des élèves suggèrent fortement que le temps investi dans l'utilisation du matériel de manipulation au début de l'école élémentaire est un investissement dans leur avenir en mathématiques. En donnant aux élèves le temps et la possibilité de construire une base solide en matière de sens des nombres, on peut s'attendre à ce qu'ils renforcent leurs compétences en mathématiques pour des concepts plus difficiles auxquels ils seront confrontés plus tard dans leur éducation » (Moore, 2016).

Cependant, pour créer des situations d'apprentissage impliquant du matériel de manipulation efficaces, il est nécessaire que les futurs enseignants au primaire en formation initiale aient une compréhension conceptuelle approfondie.

1.2 Formation didactique des futurs enseignants au primaire en formation initiale

Plusieurs chercheurs, tels que Kinach (2002), Spence (2010), Mitchell et al. (2013), Ball et al. (2008), Harshman (2016), Kumar et al. (2017) et Wessman-Enzinger et Tobias (2020) insistent sur l'importance pour les enseignants d'avoir une connaissance conceptuelle approfondie des concepts et processus mathématiques qui va au-delà des automatismes développés depuis l'enfance « [L]es connaissances spécialisées en matière de contenu exigent des enseignants qu'ils raisonnent correctement sur les concepts mathématiques, qu'ils fournissent des explications et des justifications pour les solutions, qu'ils évaluent et expliquent les multiples stratégies de solution des élèves et qu'ils établissent des liens avec les algorithmes (Hill et al., 2005). » (Harshman, 2016) Il est donc essentiel de permettre aux futurs enseignants en formation initiale de développer une compréhension conceptuelle des concepts et processus mathématiques qu'ils auront à enseigner.

Mais comment faire pour développer efficacement une conception conceptuelle plus approfondie des mathématiques chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale ? D'abord, selon Thanheiser (2009, 2015), il faudrait connaître les conceptions initiales des futurs enseignants et les utiliser afin de créer des situations d'enseignement-apprentissage avec des activités riches qui : susciteraient leur engagement, favoriseraient la réflexion et le développement d'une compréhension conceptuelle approfondie d'un système de numération positionnel et de ses algorithmes arithmétiques tout en étant cognitivement assez complexes pour s'assurer d'un apprentissage durable. En effet, pour que les futurs enseignants au primaire en formation initiale soient ouverts à l'apprentissage, ils doivent ressentir un certain besoin intellectuel et, pour ce faire, les tâches proposées doivent « constituer un véritable problème pour les étudiants. Les contextes nouveaux ou inhabituels, tels que les bases alternatives, fournissent une tactique pour provoquer un besoin intellectuel (McClain, 2003 ; Yackel, Underwood, & Elias, 2007). » (Fasteen, 2015) Il pourrait donc être nécessaire de créer un conflit cognitif afin de susciter le besoin d'aller chercher des explications. En effet, « [l]a recherche a montré que pour briser ces schémas cognitifs, les futurs enseignants doivent être placés dans des situations où leurs croyances sont remises en question. Cela les amènera à construire de nouvelles structures conceptuelles (von Glasersfeld, 1983). » (Harshman, 2016)

Pour créer une dissonance cognitive et ainsi renforcer la compréhension du système de numération décimal, le recours à un système de numérotation alternatif, dans une base autre que dix, est fréquemment utilisé dans la formation universitaire des futurs enseignants au primaire. En effet, selon (Cady et al., 2014 ; Fasteen, 2015 ; Hopkins & Cady, 2007; Price, 2011) et Thanheiser (2009), ceux-ci étant déjà très familiers avec le système de numération décimal, l'utilisation d'un système de numération alternatif permet de créer un conflit cognitif puisqu'ils ne peuvent plus compter sur les algorithmes déjà appris. Cela permet aussi d'explorer davantage les concepts reliés au sens du nombre, à la valeur de position et des algorithmes arithmétiques tout en provoquant une charge cognitive qui se rapproche de celle vécue par un élève du primaire lors de l'apprentissage du système décimal.

> « La base alternative sert à mettre en évidence le rôle de la valeur de place et du regroupement en modifiant les valeurs des places (plus de dizaines, de centaines, etc.) et la quantité nécessaire pour regrouper. En étudiant les bases alternatives, les futurs enseignants ont la possibilité de considérer la base dix comme un exemple de la structure plus générale des systèmes de valeurs de place (Vygotsky, 1962). Les études sur les bases alternatives ont été utilisées pour mettre en évidence les conceptions erronées des futurs enseignants (Khoury et Zazkis, 1994 ; Thanheiser et Rhoads, 2009 ; Zazkis et Khoury, 1993) et pour fournir des stratégies d'amélioration des connaissances (McClain, 2003 ; Roy, 2014 ; Thanheiser, 2014 ; Yackel et al., 2007). » (Fasteen, 2015)

L'utilisation de systèmes de numération alternatifs permet aussi aux futurs enseignants en formation initiale de réfléchir sur leurs propres processus d'apprentissage et d'identifier les principales difficultés auxquelles leurs élèves pourraient avoir à faire face. En effet, tel que présenté dans la section 2.2.2, de nombreux chercheurs ont utilisé des systèmes de numération alternatifs pour créer une dissonance cognitive chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale afin que ceux-ci se retrouvent dans une situation d'apprentissage similaire à celles vécues par les élèves en classe. Plusieurs systèmes de numération alternatifs ont alors été utilisés, particulièrement les bases 5 et 8, parfois avec une nouvelle comptine de nombres ou encore avec de nouveaux symboles. Ces différentes variantes peuvent avoir un impact sur la charge cognitive des futurs enseignants en formation initiale. Pour que l'apprentissage soit pertinent, s'il est souhaitable de créer une dissonance cognitive comme mentionné précédemment, il faut cependant éviter de créer une surcharge cognitive qui pourrait nuire à l'apprentissage.

1.3 Objet de la recherche

Actuellement, au Québec, il n'y a pas de données spécifiques sur la façon dont l'utilisation des systèmes de numération autre qu'en base 10 se déploie. En effet, on ne sait pas s'ils sont employés dans la plupart des universités ou seulement dans quelques-unes et dans le cas où ils le sont, comment cela se passe dans les salles de classe. De plus, on ne connaît pas les appuis théoriques sur lesquelles se basent les professeurs pour les employer dans la formation universitaire des futurs enseignants en formation initiale au primaire et l'évaluation que les professeurs font de leur impact sur le développement de la compréhension des futurs enseignants en formation initiale. Cette recherche vise la participation des professeurs des différentes universités québécoises francophones qui interviennent dans la formation mathématique des futurs enseignants en formation initiale au primaire, dans le domaine de l'arithmétique. L'objectif est de faire la lumière sur la situation québécoise en lien avec l'état des connaissances conceptuelles et procédurales des futurs enseignants en formation initiale du système de numération décimal et des algorithmes arithmétiques, sur l'impact de l'utilisation de systèmes de numération alternatifs sur le développement d'une compréhension conceptuelle approfondie des futurs enseignants en formation initiale, de la façon dont ils sont employés dans la formation des futurs enseignants au primaire dans les universités québécoises.

Ces données recueillies auprès des acteurs principaux de la formation universitaire des futurs enseignants en formation initiale seront ensuite analysées afin d'obtenir un portrait réaliste de la situation au Québec. Des hypothèses pourraient aussi être émises à la suite de cette analyse et, dans le cadre d'un futur projet de recherche, certaines d'entre elles pourrait être testées et validées. Par exemple, il pourrait être intéressant de comparer l'efficacité de différentes bases (inférieure ou supérieure à 10) sur la compréhension conceptuelle approfondie du système de numération décimal et des algorithmes arithmétiques, mais aussi de mesurer l'impact sur la charge cognitive du choix d'une base.

Étant donné que ce projet de recherche impliquera la participation d'êtres humains, sa description sera présentée au Comité d'étude de la recherche de la TÉLUQ afin de s'assurer qu'il respecte les règles de base de l'éthique et de ses principes directeurs.

1.4 Pertinence des travaux

La raison pour laquelle ce mémoire porte, entre autres, sur la compréhension qu'ont les futurs enseignants au primaire en formation initiale au primaire du système de numération décimal et de ses algorithmes arithmétiques, c'est d'abord parce que les concepts et processus arithmétiques « constituent des éléments de base en mathématique, puisqu'ils sont réinvestis dans tous les autres champs de la discipline » (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009), mais aussi parce que l'enseignant se doit d'avoir une formation solide sur laquelle s'appuyer, puisque ce dernier a un impact majeur sur le développement du sens du nombre chez l'élève. À ce sujet, Poirier (2021) a d'ailleurs souligné l'« importance des mathématiques et plus particulièrement du concept de nombre dès le préscolaire pour la suite des études des mathématiques et de l'impact des connaissances et de l'attitude des enseignantes sur la performance des élèves ». La méta-analyse « School Readiness and Later Achievement (Duncan et al, 2007) montre le rôle central que tient la maîtrise du nombre dans l'apprentissage des mathématiques. […] Leurs analyses concluent qu'une bonne maîtrise du nombre par les élèves de maternelle est le meilleur prédicteur de réussite au primaire non seulement en mathématiques, mais aussi dans les autres matières scolaires. » (Poirier, 2021)

Récemment, le Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations (CIRANO) et le Centre de recherches mathématiques (CRM) ont créé « En avant math ! », « une initiative d'envergure nationale pour promouvoir les mathématiques et accroître la numératie » (De Marcellis-Warin et al., 2023). Dans leur rapport de projets Améliorer les compétences en mathématiques au Québec : Cinq recommandations tirées d'En avant math !, ils ont identifié la formation en mathématique des enseignantes et enseignants comme étant un enjeu stratégique et recommandent de s'assurer « que les futurs enseignants et enseignantes du primaire possèdent les connaissances nécessaires pour l'enseignement des mathématiques au préscolaire et au primaire et développent une attitude positive envers les mathématiques ». (De Marcellis-Warin et al., 2023) De plus, comme mentionné dans la problématique, il n'y a pas de données concernant les approches pédagogiques utilisées dans les universités québécoises dans la formation des futurs enseignants au primaire lorsque le système de numération décimal et ses algorithmes arithmétiques sont abordés. Les recherches qui seront effectuées dans le cadre de ce mémoire permettront donc aussi de mettre en lumière la situation actuelle au Québec dans certaines universités québécoises.

2. Cadres théoriques

Comme mentionné précédemment, ce mémoire de maîtrise porte sur le système de numération décimal et des algorithmes arithmétiques, les connaissances conceptuelles et procédurales des futurs enseignants en formation initiale et l'utilisation de systèmes de numération alternatifs dans leur formation universitaire, particulièrement sur la façon dont ils sont employés, mais aussi sur la complexité cognitive des tâches proposées.

Deux cadres théoriques supportent ce projet de recherche : le cadre arithmétique et le cadre didactique. On retrouve d'abord, dans le cadre arithmétique, les trois volets de l'arithmétique tels que définis dans le PFÉQ : le sens et l'écriture des nombres, le sens des opérations sur des nombres et les opérations sur des nombres. Puis, la dernière section porte sur l'enseignant et le développement du sens du nombre chez l'élève.

Quant au cadre didactique, celui-ci présente les connaissances mathématiques pour l'enseignement, une revue de littérature sur la place des systèmes de numérations alternatifs dans la formation des futurs enseignants en formation initiale, les notions de compréhension conceptuelle et procédurale. La théorie de la charge cognitive et les « Desirables difficulties » y sont aussi présentées, puisque la complexité cognitive des tâches proposées dans la formation universitaire des futurs enseignants en formation initiale seront analysées.

2.1 Cadre arithmétique

> « D'abord limitée, en vue de leurs applications pratiques, à des procédés de calcul combinant des entiers naturels par des opérations élémentaires (addition, soustraction et multiplication ; puis division ; et, beaucoup plus tard, élévations au carré et au cube), l'arithmétique s'est ensuite donné pour but l'étude des relations des nombres rationnels entre eux et avec des opérations. Un tel développement devint possible par l'adoption d'un bon système de numération de position, plus particulièrement celui, à base décimale, avec le zéro, de l'Occident. Il vit son efficacité accrue par l'introduction du calcul littéral qui devait ouvrir la voie aux méthodes algébriques. » (Bouvier & George, 1979)

L'apprentissage de l'arithmétique débute, dès la petite enfance, avec la comptine numérique (soit la suite ordonnée de nombres naturels 1, 2, 3…), puis se poursuit avec l'étude des propriétés et des règles qui régissent les opérations (addition, soustraction, multiplication et division) sur ces nombres. Éventuellement, une transition sera effectuée vers les opérations sur les nombres entiers relatifs, c'est-à-dire l'ensemble de nombres comportant les entiers négatifs et positifs. L'arithmétique occupe une place centrale dans le Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) de l'école primaire. En effet, « [l] es concepts et les processus à acquérir et à maîtriser dans le champ de l'arithmétique constituent des éléments de base en mathématique, puisqu'ils sont réinvestis dans tous les autres champs de la discipline » (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009).

2.1.1 Sens et écriture du nombre

> « Selon Jordan (2010), le sens du nombre est le fondement qui soutient l'apprentissage de notions mathématiques complexes associées au calcul mental ainsi qu'à la résolution de problèmes. Van Luit et Schopman (2000) précisent aussi que les difficultés précoces par rapport au sens du nombre ont un impact sur les apprentissages mathématiques ultérieurs. Le sens du nombre est un concept important en didactique des mathématiques. Pour Devlin (2017), un mathématicien britannique, il s'agit même du concept mathématique le plus important du 21e siècle. Gersten et Chard (1999) le comparent à la conscience phonologique, un prédicteur puissant de la réussite

> en lecture, puisque le sens du nombre est un des piliers de la réussite en mathématiques. » (Bisaillon, 2021)

Si pour certains psychologues, spécialistes des sciences de l'apprentissage et spécialistes en sciences cognitives (Dehaene, 2001, 2003 ; Jordan & Levine, 2009 ; Starkey & Cooper, 1980 ; Wynn, 1992 b, 1992a) le sens du nombre est une aptitude présente dès la petite enfance, pour d'autres, le sens du nombre se développe. « Le sens des nombres n'est pas une entité finie que l'élève possède ou ne possède pas, mais plutôt un processus qui se développe et mûrit avec l'expérience et la connaissance. » (B. J. Reys, 1994)

Selon Reys & Yang (1998), le sens du nombre peut être défini comme étant la compréhension qu'une personne a des nombres et des opérations ainsi que l'utilisation flexible qu'elle en fait afin de développer différentes stratégies efficaces pour manipuler les nombres. Parmi les caractéristiques associées au sens du nombre, ils identifient l'utilisation de représentations multiples des nombres, la reconnaissance des grandeurs relatives et absolues des nombres, la sélection et l'utilisation de points de repère, la décomposition et la recomposition des nombres, la compréhension des effets relatifs des opérations sur les nombres, et l'exécution souple et appropriée de calculs mentaux et d'estimations.

« Il ne s'agit pas de la simple application d'algorithmes ou de procédés techniques, ni de la mémorisation de définitions (Greeno, 1991 Howden, 1989 ; McIntosh et Dole, 2000). C'est plutôt une forme de raisonnement, une capacité de réflexion sur les nombres qui se manifeste par une flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres et dans le choix des stratégies opératoires. » (Bisaillon, 2021)

Si ces « algorithmes […] constituent, il va sans dire, une partie substantielle de l'apprentissage de l'arithmétique au primaire » (Hodgson, 2016), Kamii et Dominick (1997) avancent que l'apprentissage d'algorithmes nuit au développement du sens du nombre de l'élève. « Par exemple, les enfants ont tendance à penser aux nombres de gauche à droite, en traitant d'abord les chiffres les plus grands, mais la plupart des algorithmes vont de droite à gauche et traitent chaque chiffre comme s'il représentait des uns. » (Kamii & Dominick, 1997)

2.1.1.1 Valeur de position

> « Pour développer le sens du nombre, […] l'enfant doit apprendre à conjuguer à la fois avec l'abstraction relative au recours à des symboles (ou plus généralement au symbolisme) pour représenter les nombres, ainsi qu'avec les caractéristiques de notre système de numération en base dix, qui repose à la fois sur l'idée de groupements […] et sur l'idée de valeur positionnelle du chiffre dans le nombre. » (Côté & Martin, 2017)

Le système de numération décimal est dit positionnel, c'est-à-dire que la valeur des chiffres qui le composent est définie par la position occupée par ces derniers dans le nombre. Par exemple, dans le nombre 4 672, le 4 occupe la position des milliers, sa valeur est donc de 4000 (4×1000), le 6, la position des centaines, il vaut donc 600 (6×100), le 7 la position des dizaines, donc 70 (7×10) et finalement le 2 est à la position des unités, il vaut donc 2 (2×1).

« Les connaissances sur la valeur de position […] sont précisément ce que les enfants doivent construire s'ils veulent développer une compréhension adéquate du système de numération positionnelle (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). » (Cady et al., 2014)

Ross (1990) a identifié 5 étapes dans le développement de la compréhension de la valeur de position chez l'enfant :

1. Il associe les chiffres et les nombres à la quantité qu'ils représentent. Par exemple, le nombre 18 est vu comme collection de 18 objets. Les chiffres qui le composent n'ont pas de valeur individuelle.
2. Il utilise le nom des positions (dix, cent, etc.), mais sans nécessairement comprendre que, par exemple, le nombre 18 (dix-huit) représente 1 groupe de dix et 8 unités.
3. Il reconnaît que le chiffre des dizaines ne représente pas la même quantité que le chiffre des unités, mais pas que le chiffre des dizaines représente un multiple de dix. Par exemple, il sait que dans le nombre 22 (vingt-deux), les deux chiffres 2 ne représentent pas la même quantité.
4. Il reconnaît que le chiffre des dizaines représente un multiple de 10 et le chiffre des unités, le nombre d'unités restants. Par exemple, le nombre 27 (vingt-sept) représente 2 groupes de dix et 7 unités, mais cette connaissance n'est pas encore consolidée

5. Il sait qu'un nombre à deux chiffres représente une quantité totale exprimée en termes de dizaines et d'unités, par exemple, le nombre 85 (vingt-sept) représente 8 groupes de dix et 5 unités.

Cette compréhension de la valeur de position est essentielle, selon Thanheiser (2009), puisque, dans les algorithmes standards d'addition ou de soustraction, par exemple, les colonnes sont traitées individuellement et chaque chiffre est considéré comme s'il était des « uns ».

> « Pour comprendre pourquoi les chiffres peuvent être traités de cette manière, il faut comprendre que les chiffres des différentes colonnes représentent différents types d'unités, mais qu'à l'intérieur de chaque colonne, nous opérons sur le même type d'unité et que, par conséquent, nous pouvons traiter les chiffres comme s'ils représentaient des uns. » (Thanheiser, 2009)

2.1.2 Sens des opérations sur des nombres

> « Pour se donner une bonne compréhension des opérations et de leurs divers sens dans des contextes variés, l'élève doit connaître les relations entre les données et entre les opérations, choisir les bonnes opérations et les effectuer en tenant compte des propriétés et des priorités des opérations. Il doit également se donner une idée de l'ordre de grandeur du résultat. » (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009)

Le sens des opérations sur des nombres se reflétera dans la capacité de l'élève de mathématiser des situations et de les résoudre, c'est-à-dire reconnaître la ou les opérations à effectuer et mobiliser les structures additives (addition et soustraction) et multiplicatives (multiplication et division) appropriées. (Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, 2009) Pour développer son sens des opérations, l'élève sera soumis à plusieurs types de problèmes qui lui permettront d'exploiter différents sens de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division pour traduire des situations. Il devra aussi « établir des équivalences numériques à l'aide de relations entre les opérations (les 4 opérations), la commutativité de l'addition et de la multiplication, l'associativité et la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction » (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009).

Mary, Theis et Martin ont aussi souligné l'importance de développer le sens des opérations :

> « Notamment, nous nous intéressons au passage d'une pensée additive à une pensée multiplicative qui mène éventuellement au raisonnement proportionnel, raisonnement essentiel pour divers domaines des mathématiques. Par exemple, Cobb (1999 [4]) identifie ce passage comme crucial pour la pensée statistique au premier cycle du secondaire. Nous nous intéressons aussi et surtout au passage d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique, […] pensée qui sous-tend un bon sens des opérations. »(Mary et al., 2018)

2.1.3 Opérations sur des nombres

> « Au fur et à mesure qu'il développe son sens du nombre et des opérations, l'élève sera appelé à construire des processus personnels et à utiliser des processus conventionnels pour effectuer diverses opérations. Il sera amené à comprendre l'équivalence entre ces différents processus et à acquérir certains automatismes. Il apprendra aussi, à partir de ces processus et des propriétés des opérations, à faire des approximations de résultats et à déterminer des résultats exacts, mentalement ou par écrit. » (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009)

De nombreux chercheurs soulignent l'importance pour les élèves de développer leurs propres processus ou stratégies de calcul. Selon Woodward (2006), mettre l'accent sur les stratégies peut aider les élèves à organiser leurs connaissances dans un réseau de connaissances cohérent, ce qui favoriserait l'organisation en mémoire à long terme et favoriserait le rappel[1].

Selon Kamii et al. (1993), il y a de nombreux avantages pour l'élève de développer ses propres processus ou algorithmes. Cela lui permet de ne pas renoncer à ses instincts, de renforcer sa compréhension de la valeur de position et de développer efficacement son sens du nombre.

En effet, « lorsque les enfants sont autorisés à inventer des stratégies d'addition et de soustraction, ils renforcent leurs liens mathématiques entre la valeur de place, l'estimation, le sens du nombre et les propriétés des opérations (Beishuizen, 1993 ; Carroll & Porter, 1998 ; Huinker, Freckman, & Steinmeyer, 2003 ; Kamii, Livingston, & Lewis, 1993 ; Madell, 1985 ; Selter, 2002 ; Thompson, 1994). » (Roy, 2014)

> « Les recherches démontrent systématiquement que l'enseignement aux enfants de stratégies fondées sur le raisonnement est plus efficace que l'exercice pour faciliter l'apprentissage de faits étendus et pour comprendre les nombres et les opérations (Baroody, 1985 ; Woodward, 2006). Slavit (1998), se référant à Resnick (1992), souligne que les enfants ne raisonnent pas seulement sur les nombres en tant qu'objets mathématiques, mais aussi sur les opérations qui agissent sur les nombres en tant qu'objets mathématiques à part entière. En outre, l'utilisation de stratégies de calcul favorise une meilleure compréhension de la structure des nombres ainsi que de leurs propriétés (Anghileri, 2008; Mulligan&Watson, 1998; Sherin&Fuson, 2005) et place les élèves en bonne position pour apprendre, par exemple, les fractions et l'algèbre (Ambrose, Baek, & Carpenter, 2003; Harel & Confrey, 1994; Lamon, 2006; Star & Seifert, 2006; Vermeule, Olivier, & Human, 1996). » (Schulz, 2018)

[1] Voir section 2.2.4 Théorie de la charge cognitive

2.1.4 L'enseignant et le développement du sens du nombre

> « Reys (1994) a souligné que l'enseignement visant à développer le sens des nombres exige un effort conscient et coordonné de la part de l'enseignant pour créer des liens et des significations. Les enseignants jouent un rôle important dans le développement du sens du nombre grâce à l'environnement qu'ils créent, aux pratiques pédagogiques qu'ils emploient et aux activités qu'ils sélectionnent ». (Tsao & Lin, 2011)

De nombreuses recherches (Andreasen, 2006; Bisaillon, 2021 ; Cady et al., 2014 ; Cobb et al., 2003; Fasteen et al., 2015; Hopkins & Cady, 2007; Kamii et al., 1993; Kamii & Dominick, 1997; McClain, 2003 ; Moore, 2016 ; R. E. Reys & Yang, 1998; Roy, 2008, 2014 ; Safi, 2009 ; Tsao & Lin, 2011) se sont intéressées à l'enseignement des mathématiques au primaire, mais particulièrement sur la compréhension de la valeur de position et le développement d'algorithmes arithmétiques. Parmi ceux-ci, McClain (2003), insiste sur

> *« l'importance d'aider les élèves à développer une compréhension conceptuelle de la valeur de place et de l'addition et de la soustraction à plusieurs chiffres. […] Cela implique de comprendre et d'étudier les relations entre des idées, telles que la quantification d'ensembles d'objets par groupes de 10 et le traitement des groupes comme des unités composites, la compréhension de la préservation de la quantité lorsque l'on décompose des nombres à plusieurs chiffres en différents groupes, et la composition des quantités. »* (McClain, 2003)

Bisaillon (2021) souligne l'importance pour l'élève d'avoir une bonne compréhension de chacune des caractéristiques du système de numération en base 10 afin que ce dernier développe une souplesse dans ses manipulations et ses opérations sur les nombres entiers. « Ces manifestations de la compréhension de la numération sont des indicateurs d'un bon sens du nombre comme entendu par Reys (1994). » (Bisaillon, 2021)

Russell (2000) abonde dans le même sens et souligne l'importance d'une base mathématique bien construite qui repose sur une compréhension des opérations sur les nombres et de leurs relations mutuelles, sur une connaissance d'un grand nombre de relations entre les nombres et sur une compréhension approfondie du système de numération en base dix.

Cobb et al. (2003) affirme que c'est sur les connaissances sur la valeur de position, souvent surestimées, que les enseignants doivent insister pour que les élèves développent une bonne compréhension du système positionnel en base 10. Pour ce faire, *Tsao & Lin (2011)* recommandent l'utilisation de matériel de manipulation, tel que des blocs de bases 10. Pour *(Fuson & Briars, 1990)* l'utilisation de « matériel physique qui incarne la taille relative des chiffres en base dix et démontre la nature positionnelle des marques écrites à plusieurs chiffres », favorise la compréhension conceptuelle des algorithmes arithmétiques.

> « Les procédures peuvent être enseignées avec du sens en utilisant du matériel de manipulation, car elles aident à donner vie aux concepts mathématiques et sont adaptées au développement des élèves d'âge élémentaire. Sur la base de cette étude, les résultats des élèves suggèrent fortement que le temps investi dans l'utilisation du matériel de manipulation au début de l'école élémentaire est un investissement dans leur avenir en mathématiques. Le fait de donner aux élèves le temps et la possibilité de construire une base solide sur le sens des nombres renforcera probablement leurs compétences mathématiques pour des concepts plus difficiles auxquels ils seront confrontés plus tard dans leur éducation » (Moore, 2016).

Parmi les stratégies à favoriser, Reys (1994), mentionne le questionnement de l'élève par l'enseignant sur le processus, l'utilisation de travaux d'écriture, de méthodes inventées par les élèves et d'outils de calculs appropriés, le développement de la capacité d’estimation et la promotion du questionnement interne chez les élèves. Cependant, pour que cela ait lieu, selon Roy (2014), il est essentiel que les futurs enseignants au primaire en formation initiale possèdent des connaissances complexes et variées, et surtout une compréhension conceptuelle développée.

2.2 Cadre didactique

2.2.1 Les connaissances mathématiques pour l’enseignement

De nombreux futurs enseignants en formation initiale ont la conviction « que les mathématiques sont un ensemble fixe de règles et de procédures, ainsi que [la] conviction que les enfants et les adultes apprennent les mathématiques en montrant comment résoudre des problèmes de manière prescrite, étape par étape. » (Philipp et al., 2007). À ce sujet, Harshman (2016) affirme que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont « un bagage mathématique traditionnel dans lequel ils ont appris des règles et des algorithmes. Il peut être difficile de leur faire comprendre l’intérêt d’apprendre les mathématiques d’une manière conceptuelle, car ils ont l’impression de déjà comprendre comment les mathématiques fonctionnent. (Harshman, 2016) Cela est en contradiction avec une approche conceptuelle de l’enseignement du système de numération décimal ainsi que des opérations sur les entiers. De plus, « certains futurs enseignants pensent que s’ils ne connaissent pas déjà un concept mathématique élémentaire et qu’ils sont à l’université, les enfants qu’ils instruisent ne sont pas censés le connaître (Phillip et al., 2007). Ces croyances négligent les connaissances spécialisées nécessaires pour enseigner les mathématiques avec succès (Hill, Schilling et Ball, 2004 ; Ma, 2009). » (Roy, 2014)

Une étude menée par Moore (2016) suggère « la nécessité pour les éducateurs d'élargir leur connaissance des concepts qu'ils enseignent, afin qu'ils ne s'appuient pas sur des procédures d'enseignement qu'ils ne comprennent pas eux-mêmes sur le plan conceptuel. » (Moore, 2016) Fasteen (2000) abonde dans le même sens et affirme que les enseignants doivent détenir des connaissances mathématiques qui vont au-delà des procédures afin d'être capable d'expliquer la raison pour laquelle une action est posée et ce, dans le but de soutenir les élèves dans le développement du sens du nombre. « L'enseignant du primaire doit avoir atteint un niveau de compétence tel en mathématiques qu'il se sente en pleine possession de l'outil mathématique avec lequel il va travailler, en un mot qu'il se sente *autonome* sur le plan mathématique » (Hodgson, 2016).

Selon (Hill et al., 2005), on doit s'attendre des enseignants « qu'ils raisonnent correctement sur les concepts mathématiques, qu'ils fournissent des explications et des justifications pour les solutions, qu'ils évaluent et expliquent les multiples stratégies de solution des élèves et qu'ils établissent des liens avec les algorithmes » (Harshman, 2016)

À ce sujet,

> « Ball, Hill et Bass (2005) ont développé le concept de connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) pour faire référence aux connaissances spécialisées que les enseignants de mathématiques devraient posséder. […] Les chercheurs ont montré que les CME des enseignants influencent leur capacité à soutenir l'apprentissage des élèves et que de nombreux enseignants ne disposent pas de CME suffisante (Ball, 1990b; Ball et al., 2005; Ma, 1999). » (Fasteen, 2015)

Le contenu commun est le contenu que tout adulte, non seulement les enseignants, devraient connaître. Le contenu spécialisé c'est ce qui est propre à l'enseignement des mathématiques, seulement ce que les enseignants doivent savoir. L'horizon mathématique fait référence aux liens entre l'ensemble des mathématiques du programme d'études. La connaissance du contenu et des élèves aide les enseignants à anticiper les erreurs que les élèves vont faire et la connaissance du contenu et de l'enseignement, de créer des séquences d'apprentissages réfléchies et efficaces pour les élèves. La connaissance du programme d'études permet d'avoir une vision globale de la répartition des concepts entre les différentes années.

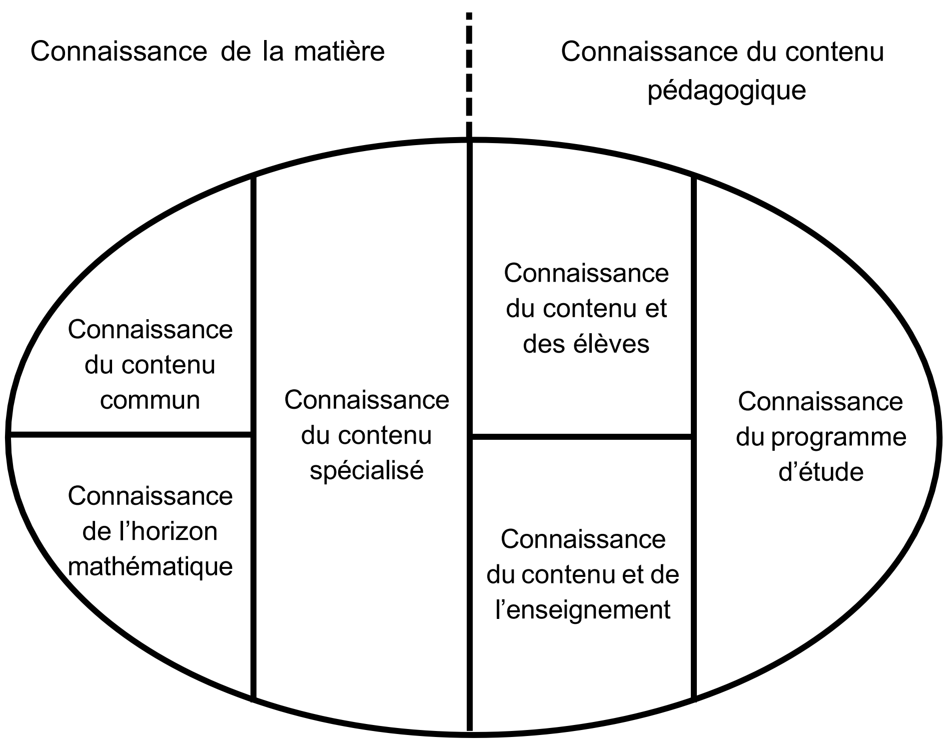

Figure 1— Six domaines de connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Hill & al.)

Tableau 2
Les connaissances mathématiques essentielles que les enseignants doivent posséder (Ball et al., 2018)

Connaissances	**Description**
Connaissances conceptuelles profondes	Comprendre les concepts mathématiques fondamentaux de manière approfondie et précise.
Connexion entre les concepts	Être capable de faire des liens entre différents concepts mathématiques et de montrer comment ils s'interconnectent
Méthodologies d'enseignement efficaces	Savoir comment enseigner efficacement les concepts mathématiques, en utilisant des méthodes qui favorisent la compréhension et l'apprentissage des élèves.
Diagnostic des erreurs	Être capable de diagnostiquer et de corriger les erreurs courantes que les élèves peuvent commettre en mathématiques.
Connaissance du curriculum	Avoir une compréhension claire du programme d'études de mathématiques et des objectifs d'apprentissage correspondants à chaque niveau scolaire.
Apprentissage des élèves	Comprendre les différents styles d'apprentissage des élèves en mathématiques et être capable d'adapter son enseignement en conséquence.
Résolution de problèmes	Être capable de résoudre des problèmes mathématiques complexes et de guider les élèves dans ce processus.

Ma (1999) parle quant à elle d'une compréhension approfondie des mathématiques élémentaires (CAME). Pour elle, une CAME va bien au-delà des capacités des enseignants à calculer adéquatement avec les algorithmes ou même de les justifier « Un enseignant ayant une compréhension approfondie des mathématiques fondamentales est non seulement conscient de la structure conceptuelle et des attitudes de base des mathématiques inhérentes aux mathématiques élémentaires, mais il est également capable de les enseigner aux élèves. » (Ma, 1999)

> « La raison pour laquelle une compréhension approfondie des mathématiques élémentaires est possible est tout d'abord que les mathématiques élémentaires sont un domaine de profondeur, d'étendue et d'exhaustivité. Les enseignants qui ont cette compréhension profonde, vaste et approfondie n'inventent pas de liens entre et parmi les idées mathématiques, mais les

révèlent et les représentent en termes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Cet enseignement et cet apprentissage ont tendance à présenter les quatre propriétés suivantes : » (Ma, 1999)

Tableau 3
Quatre propriétés présentes chez les enseignants dotés d'une CAME (Ma, 1999)

Propriétés	Description
La connectivité	Un enseignant doté d'une CAME a l'intention générale d'établir des liens entre les concepts et les procédures mathématiques, qu'il s'agisse de liens simples et superficiels entre des éléments de connaissance individuels ou de liens complexes et sous-jacents entre différentes opérations et sous-domaines mathématiques. Lorsqu'elle se reflète dans l'enseignement, cette intention empêche la fragmentation de l'apprentissage des élèves. Au lieu d'apprendre des sujets isolés, les élèves apprendront un ensemble unifié de connaissances.
Perspectives multiples	Les personnes qui ont atteint la CAME apprécient les différentes facettes d'une idée et les diverses approches d'une solution, ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients. En outre, ils sont capables de fournir des explications mathématiques de ces différentes facettes et approches. De cette manière, les enseignants peuvent amener leurs élèves à une compréhension flexible de la discipline.
Idées de base	Les enseignants dotés d'une CAME affichent des attitudes mathématiques et sont particulièrement conscients des « concepts et principes de base simples mais puissants des mathématiques » (par exemple, l'idée d'une équation). Ils ont tendance à revenir sur ces idées de base et à les renforcer. En se concentrant sur ces idées de base, les élèves ne sont pas simplement encouragés à aborder les problèmes, mais sont guidés pour mener une véritable activité mathématique.
Cohérence longitudinale	Les enseignants titulaires d'une CAME ne sont pas limités aux connaissances qui devraient être enseignées dans une certaine classe ; ils ont plutôt acquis une compréhension fondamentale de l'ensemble du programme de mathématiques de l'enseignement élémentaire. Avec la CAME, les enseignants sont prêts à tout moment à exploiter une opportunité de revoir des concepts cruciaux que les élèves ont étudiés précédemment. Ils savent également ce que les élèves vont apprendre plus tard et saisissent les occasions de poser les bases appropriées.
Ces quatre propriétés sont interdépendantes. Alors que la première propriété, la connexité, est une caractéristique générale de l'enseignement des mathématiques d'une personne dotée d'une CAME, les trois autres — perspectives multiples, idées fondamentales et cohérence longitudinale — sont les types de connexions qui conduisent à différents aspects d'une compréhension significative des mathématiques — étendue, profondeur et exhaustivité.	

2.2.2 La place des systèmes de numération alternatifs dans la formation des futurs enseignants en formation initiale au primaire

2.2.2.1 Revue de littérature

En 1999, McClain a mené une expérience pédagogique auprès de 24 étudiants de 3e et 4e année de formation en enseignement primaire afin de déterminer si « [l]es résultats des recherches menées dans les classes de mathématiques du primaire peuvent […] guider le développement de la compréhension conceptuelle de ces mêmes concepts par les enseignants en formation initiale du primaire » (McClain, 2003). Elle a donc utilisé une séquence d'enseignement initialement conçue pour les élèves du primaire pour qu'ils développent une compréhension plus approfondie et développent des algorithmes arithmétiques efficaces, puis elle l'a adaptée pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale. Cette séquence, appelé Candy factory, présente une fabrique de bonbons dans laquelle chaque rouleau contient 10 bonbons et chaque boîte contient 10 rouleaux. Les élèves doivent alors manipuler les boîtes et les rouleaux pour d'abord représenter de façon flexible différentes quantités de bonbons et ensuite effectuer des transactions (addition et soustraction).

McClain a donc modifié cette séquence pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale afin qu'elle se déroule en base 8. Dans cette version, les bonbons sont regroupés en rouleaux de 8 bonbons et en boîtes de 8 rouleaux. Les futurs enseignants devaient alors inventer des algorithmes d'addition et de soustraction à 3 chiffres pour les différentes transactions, c'est-à-dire les achats et les ventes, de la fabrique. Celle-ci s'est déroulée en cinq périodes de 50 minutes étalées sur 3 semaines. Pour cette séquence, McClain a utilisé les mêmes mots-nombres que pour le système de numération décimal (one, two, three, four, five, six, seven) et un symbolisme représentant le nombre de pièces, de rouleaux et de boîtes (ex. : deux boîtes, trois rouleaux et 6 pièces s'expriment 2B3R6P). La séquence d'apprentissage comprenait 4 phases : quantifier des collections de bonbons en les regroupant en rouleaux et en boîtes, exprimer une même quantité de bonbons sous différentes représentations de rouleaux et de boîtes, transformer différentes quantités en emballant des unités et des rouleaux ou en déballant des boîtes et des rouleaux et, finalement, additionner et soustraire des arrangements de bonbons en boîtes, rouleaux et unités. Lors de cette expérimentation, McClain tentait d'aider les futurs enseignants au primaire en formation initiale à comprendre la valeur de position ainsi que les algorithmes d'addition et de soustraction à plusieurs chiffres, mais aussi de les faire réfléchir sur leurs processus d'apprentissage et ce, à l'aide d'une séquence d'enseignement-apprentissage.

Les données recueillies lors de l'étude proviennent d'enregistrements vidéo de chacune des sessions de cours, des copies des travaux des participants et des notes, dont un journal de réflexion quotidien et des notes de terrain détaillées, de McClain et de son assistant de recherche. Elle a ensuite testé les conjectures initiales, et en a fait émerger d'autres, en analysant les vidéos et les notes. Le faible nombre de participants à cette expérimentation, l'absence d'un groupe témoin pour comparer les effets observés et la construction du test chronométré à la fin de l'étude qui ne permettait pas de vérifier efficacement la compréhension des étudiants sont parmi les limitations dont il faut tenir compte.

McClain conclu que « [m]ême s'ils n'ont pas apprécié les subtilités de la pédagogie, ils ont tiré une leçon plus importante : ils ont compris l'importance d'enseigner les mathématiques d'une manière conceptuelle, et qu'ils ne seraient pas en mesure d'enseigner pour la compréhension conceptuelle s'ils n'avaient pas eux-mêmes une telle compréhension du contenu » (McClain, 2003).

Janet Andreasen a publié en 2006, une étude qui relate l'expérience pédagogique qu'elle a menée auprès de 16 futurs enseignants en formation initiale au primaire, qui avait pour but d'analyser l'impact des différents aspects sociaux qui soutiennent le développement d'une compréhension conceptuelle de la valeur de position et des algorithmes des opérations arithmétiques sur les nombres entiers sur les apprentissages de ces derniers. Ces aspects sociaux regroupaient : les normes sociales (les attentes concernant les explications et les justifications, la compréhension des solutions des autres participants et les questions à poser pour y arriver), les normes sociomathématiques (les critères pour lesquels une explication est jugée adéquate) et les pratiques mathématiques en classe (en base 8 : le dénombrement d'objets, la représentation flexible de différentes quantités et les opérations sur les nombres).

Andreasen explique que, selon elle, les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont une compréhension davantage procédurale que conceptuelle des mathématiques qu'ils auront à enseigner. C'est la raison pour laquelle elle a décidé d'utiliser un système de numération alternatif, en base 8, afin de développer, chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale, leur compréhension initiale de la valeur de position et des algorithmes arithmétiques. La séquence s'est déroulée en 5 séances d'une durée de 3 heures et 10 minutes chacune. Au départ, Andreasen a utilisé des outils tels que le « *double ten frame* » et la droite numérique pour familiariser les étudiants avec le vocabulaire associé avec la base 8. Puis, le scénario pédagogique *Candy Factory*, une séquence d'apprentissage en base 8, a été introduit. Les futurs enseignants au primaire en formation initiale devaient déployer différentes stratégies pour effectuer des opérations arithmétiques sur des nombres à 3 chiffres, mais surtout discuter entre eux à propos de celles-ci afin de développer une compréhension conceptuelle plus approfondie de la valeur de position et des algorithmes arithmétiques.

Les mots-nombres utilisés étaient les suivants : one, two, three, four, five, six, seven, one-ee-zero (10), one-ee-one (11), one-ee-two (12)… two-ee (20), two-ee-one (21)… one-hundree (100), etc. Les données recueillies lors de cette étude provenaient d'enregistrements vidéo et audio, de leurs transcriptions, de journaux et de notes de terrain.

Malgré certaines modifications apportées à sa trajectoire hypothétique d'apprentissage initiale, Andreasen affirme que son expérimentation a soutenu le développement d'une compréhension conceptuelle du système de numération en base 8 et, conséquemment, de celui en base 10. Cependant, il faut mentionner les limites de cette étude qui rendent les conclusions moins convaincantes. D'abord, seulement 16 personnes ont participé à cette recherche et aucun groupe-témoin en fait partie. De plus, comme le mentionne Andreasen elle-même, le caractère qualitatif de cette étude fait en sorte que les résultats sont plus difficiles à généraliser. De plus, la recherche ayant mis l'accent sur l'apprentissage collectif, celui que l'étudiant réalise individuellement est mis de côté. Finalement, le caractère subjectif de cette étude a fait en sorte que plusieurs interprétations sont possibles et qu'il est donc difficile d'arriver à des conclusions satisfaisantes.

C'est en 2007 que Yackel & al. publient *Mathematical tasks designed to foster a reconceptualized view of early arithmetic*. Cet article relate l'expérimentation d'une séquence pédagogique en base huit, qui a eu lieu pendant six semaines, auprès de 45 étudiants inscrits au programme de formation en enseignement primaire. Cette expérience avait pour but d'amener les futurs enseignants au primaire en formation initiale à développer une compréhension davantage conceptuelle que procédurale du système de numération, mais aussi qu'ils réfléchissent sur la façon, pour leurs futurs élèves, d'atteindre un tel objectif. Pour ce faire, l'approche privilégiée par Yackel & al. met l'accent sur le sens du nombre, les relations entre les nombres, les stratégies de regroupement et les représentations flexibles des nombres. L'intention des chercheuses était de mettre les futurs enseignants au primaire en formation initiale dans un contexte semblable à celui des élèves qui sont en contact pour la première fois avec le système décimal.

La séquence pédagogique utilisée regroupait des activités telles que « *double one-e-frame* », « la balance », « *overhead transformation* » et « les transactions ». Ces deux dernières activités se sont déroulées en lien avec la séquence pédagogique *Candy factory*. Les mots-nombres utilisés étaient les suivants : one, two, three, four, five, six, seven, one-e-zero (10), one-e-one (11), one-e-two (12)… two-e (20), two-e-one°(21)°… Les données recueillies lors de cette étude provenaient d'enregistrements vidéo et des copies des étudiants que les chercheurs ont conservés. Une grande attention a été portée sur les discussions entre les étudiants lors desquelles ceux-ci expliquaient et justifiaient leur raisonnement tout en remettant en question celui d'autres étudiants de la classe.

Yackel et al. affirment que la séquence pédagogique utilisée était efficace pour développer, chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale, une compréhension conceptuelle approfondie d'un système de numération positionnel et des algorithmes arithmétiques. Selon elles, le fait que les solutions proposées par les futurs enseignants au primaire en formation initiale se rapprochaient de ceux des élèves montre qu'ils ont développé des stratégies qui ont été bénéfiques pour eux. Cependant, le caractère qualitatif de cette étude, basée principalement sur des observations et sur des commentaires des futurs enseignants en formation initiale, rend les conclusions moins concluantes. De plus, la présence d'un groupe témoin qui aurait pu permettre une comparaison entre une séquence d'enseignement en base 8 et une autre dans le système de numération décimal aurait été pertinente pour tirer des conclusions.

Au semestre du printemps, en 2007, George Roy a mené une étude auprès de 32 étudiantes inscrites à un cours de mathématiques pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale. Il suppose qu'en utilisant une séquence d'enseignement utilisant un système de numération en base 8 et en insistant sur les concepts et les opérations sur les nombres entiers, les futurs enseignants au primaire en formation initiale développeront une compréhension conceptuelle, nécessaire pour enseigner, plus approfondie.

L'expérimentation s'est déroulée pendant 10 séances de 110 minutes à raison de deux séances par semaine. Tout comme (Andreasen, 2006), Roy s'est intéressé aux aspects sociaux, tels que les normes sociales, les normes sociomathématiques et les pratiques mathématiques en classe. Parmi ces dernières, on retrouve le développement de relations entre les nombres, de stratégies de regroupement, les représentations flexibles de nombres et de stratégies d'addition et de soustractions. Puisque l'objectif principal de Roy était de développer la compréhension des futurs enseignants en formation initiale du sens du nombre et des opérations sur les nombres entiers. Pour ce faire, il a débuté la séquence d'apprentissage avec des tâches qui avaient pour but de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et le dénombrement en base huit, puis il a poursuivi avec la séquence pédagogique *Candy factory*. La comptine numérique utilisée est la suivante : one, two, three, four, five, six, seven, oneee-zero (10), oneee-one (11), oneee-two (12)… one-hundrees (100), etc.

Les données recueillies lors de cette étude provenaient essentiellement d'enregistrements vidéo des dialogues entre les étudiants et de leurs transcriptions, mais aussi des travaux des étudiants ainsi que des notes de terrain de l'équipe de recherche. À cela s'ajoutent les résultats des étudiants lors de l'administration d'items « de la base de données *Content Knowledge for Teaching Mathematics* qui a eu lieu avant et après la séquence d'enseignement en base 8 (Hill, Schilling, & Ball, 2005). » (Roy, 2008) Les résultats tendent à montrer que la séquence d'apprentissage en base 8 avait aidé les futurs enseignants au primaire en formation initiale à reconceptualiser leur compréhension du sens du nombre et des opérations sur les nombres entiers et à transférer leurs apprentissages vers la base 10. Cependant, étant donné que les items administrés aux étudiants avant et après l'expérimentation ont été les mêmes, cela peut avoir une influence sur les résultats, puisqu'une partie de la réussite peut être attribuée à l'habitude des étudiants de traiter ces items. De plus, le petit nombre de participants et l'absence d'un groupe témoin dans lequel la base 10 aurait été utilisée ne permettent pas de comparer et de tirer des conclusions convaincantes.

C'est au printemps 2007 que Safi a mené une expérimentation auprès de 32 futures enseignantes inscrites à un cours de contenu de mathématiques de premier cycle. Parmi celles-ci, Safi a réalisé une étude de cas auprès de quatre participantes, choisies selon leurs expériences antérieures en mathématiques, afin d'explorer plus en détail le développement de leur compréhension conceptuelle tout au long de l'expérimentation. En fait, Safi suppose que la participation de futurs enseignants en formation initiale à une séquence d'enseignement en base 8 aura pour effet de rehausser leur compréhension et, par conséquent, d'améliorer la compréhension et la réussite de leurs futurs élèves. L'expérimentation s'est déroulée pendant 10 séances de 110 minutes à raison de deux séances par semaine pendant lesquelles Safi s'est particulièrement intéressé à la compréhension conceptuelle des nombres entiers et des opérations arithmétiques développée par les futures enseignantes, mais aussi sur la façon dont cette compréhension conceptuelle se développe.

En 2009, contrairement à (Andreasen, 2006) et (Roy, 2008), Safi a voulu analyser la compréhension des futurs enseignants en formation initiale du sens du nombre et des opérations sur les nombres entiers, mais selon une perspective davantage individuelle que collective. Il a d'abord débuté la séquence d'apprentissage avec des tâches, telles que « *double 10-frames* » ou encore l'utilisation d'une « open number line » qui avaient pour but de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et le dénombrement en base huit. Ensuite, il a poursuivi avec la séquence pédagogique *Candy factory*. La comptine numérique utilisée est la suivante : one, two, three, four, five, six, seven, one-ee-zero (10), one-ee-one (11), one-ee-two (12)… one-hundree (100), etc. Les futures enseignantes sont amenées à explorer la représentation flexible de nombres en base 8, mais aussi les algorithmes d'addition et de soustraction. Par le biais du scénario « *broken machine* », celles-ci doivent développer leurs propres stratégies de multiplication. Celles-ci seront alors réinvesties dans la séquence « *Egg carton scenario* ».

Les données recueillies lors de cette étude provenaient d'enregistrements vidéo, et de leurs transcriptions écrites, de l'ensemble de la classe, de discussions parmi les sous-groupes, d'entrevues à la fois individuelles ou de groupe, mais aussi de notes de terrain de l'équipe de recherche. De plus, les données proviennent des items de la base de données *Content Knowledge for Teaching—Mathematics* (CKT — M) que Safi a administrés, avant et après la séquence d'enseignement en base 8. L'équipe de recherche a aussi pu compter sur les déclarations personnelles des futures enseignantes concernant leurs expériences mathématiques, les notes prises par ces dernières et leurs travaux.

Safi a observé une compréhension conceptuelle plus approfondie chez les futures enseignantes du sens du nombre et des opérations sur les nombres entiers et à transférer leurs apprentissages vers la base 10. Cependant, cette conclusion pourrait être remise en question étant donné certaines limites de cette étude. D'abord, les résultats des futures enseignantes au test CKT-M ne permettaient pas d'établir une distinction claire entre les participantes. Ensuite, le petit nombre de participants à l'étude et l'absence d'un groupe témoin peuvent aussi rendre les conclusions difficilement généralisables. Safi affirme aussi qu'il est difficile d'identifier le ou les moments où les futures enseignantes ont approfondi leur compréhension conceptuelle et comment cela s'est produit. Selon lui, il serait important d'insérer des points de contrôle avec des instruments de mesure qui pourraient permettre de vérifier ces points tout au long de l'étude.

C'est à l'été 2010 que Jamie H. Price a mené une étude de cas sur l'utilisation d'un système de numération inventé en base 5, appelé Orpda auprès de 13 enseignants inscrits à un cours de deuxième cycle en enseignement des mathématiques. Price fait alors le postulat que l'utilisation de ce système pourrait aider les enseignants à développer une compréhension plus approfondie de la valeur de position dans un système de numération, mais aussi à transférer ces nouveaux apprentissages dans le cadre de leur enseignement. L'étude s'est déroulée sur une période de 5 semaines à raison d'un cours de 90 minutes chaque jour.

Le système de numération Orpda a été introduit et utilisé que pendant la première semaine. Au départ, les enseignants ont été introduits à la comptine numérique et aux différents symboles utilisés pour représenter des quantités (Tableau 4). Ils ont ensuite abordé le dénombrement à l'aide des activités « How Many in All? », « Fill the Flub Frames » et « How Many Ways ». Puis, l'accent a été mis sur la compréhension des re-groupements et la représentation flexible des nombres en présentant des activités telles que « Counting Bags » et « Race for a Flat » aux enseignants. Le centre d'intérêt a ensuite été mis sur l'addition et la soustraction, mais aussi sur l'invention d'algorithmes arithmé-tiques.

Tableau 4

Charte @skoobrat (Orpda)

star *	at **@**	pound **#**	caret **^**	flub ***~**
doozle **	sholt ***@**	pouflube ***#**	carflube ***^**	atty **@~**
atty-star **@***	atty-at **@@**	atty-pound **@#**	atty-caret **@^**	poundy **#~**
poundy-star **#***	poundy-at **#@**	poundy-pound **##**	poundy-caret **#^**	carety **^~**

Les données recueillies lors de l'étude proviennent d'abord des cartes conceptuelles que les enseignants ont réalisées avant et après la séquence d'apprentissage, de leurs réponses écrites, sur un forum de discussion, à des questions soumises à la fin de chaque cours. Sur ce même forum, des discussions entre sous-groupes ont aussi été analysées. Les données ont aussi été recueillies à l'aide d'un questionnaire, d'un journal de réflexion que devaient compléter les participants, des notes de terrain de l'équipe de recherche et des entrevues entre l'instructeur et l'équipe de recherche.

Price conclu qu'

> « (a) Orpda a attiré l'attention des enseignants sur l'importance de l'unitisation des valeurs de position, (b) Orpda a encouragé les enseignants à réfléchir en profondeur sur leur réflexion, (c) les cartes conceptuelles sont prometteuses pour révéler et documenter les changements dans la compréhension conceptuelle et (d) Orpda a attiré l'attention des enseignants sur l'importance des modèles dans la compréhension de la valeur de position. » (Price, 2011)

Cependant, ces conclusions doivent être nuancées par les limitations de cette étude. D'abord, le nombre de participants (13 futurs enseignants en formation initiale) et l'absence d'un groupe témoin pour comparer les effets d'Orpda à une séquence d'enseignement dans une autre base rendent les conclusions difficiles à généraliser. Ensuite, comme l'affirme Price, la courte durée de l'expérimentation n'était pas optimale pour le développement d'une compréhension conceptuelle approfondie et qu'une étude longitudinale serait à privilégier.

Fasteen a publié, en 2015, une dissertation portant sur une expérimentation qu'elle a dirigé, à l'été et à l'automne 2014, auprès de futurs enseignants au primaire en formation initiale au premier trimestre d'une séquence de trois sur le contenu des mathématiques. Elle supposait alors que l'utilisation de systèmes de numération alternatifs dans la formation des futurs enseignants en formation initiale les aiderait à développer une compréhension conceptuelle plus approfondie du sens du nombre, de la valeur de position et de la multiplication. Particulièrement,

> « qu'en séquençant les tâches de multiplication d'un chiffre à deux chiffres ou plus et en incluant un accent spécifique sur la multiplication par la base (10_{five}), les [futurs enseignants en formation initiale] réinventeraient des stratégies de multiplication qui s'appuient sur la division des problèmes en produits partiels basés sur les lignes de valeur de place. Je prévoyais qu'une stratégie de produits partiels émergerait initialement pour des problèmes spécifiques et que ce modèle situé de produits partiels pourrait être généralisé en un algorithme pour multiplier n'importe quelle paire de nombres en base cinq. » (Fasteen, 2015)

Au départ, les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont effectué des tâches dans différents systèmes de numération ; historiques (romains, maya, égyptiens et babyloniens) et modernes (base 5). La séquence d'apprentissage proposée utilisait un système de numération en base 5 et les mots-nombres utilisés étaient : One, two, three, four, long ($5^1 = 5$), …, flat= ($5^2 = 25$). En ce qui concerne le symbolisme, 123_{cinq} se lisait : 1 flat 2 longs 3 ones. Cette séquence avait une progression du simple au complexe ; d'abord la multiplication vue comme une addition répétée, la multiplication par 10_{cinq}, mesurer un rectangle en base 5 et, finalement, créer une stratégie générale de multiplication de nombres afin de pouvoir déterminer l'aire de rectangles en base 5.

Les données recueillies proviennent des enregistrements vidéo des cours, de leur transcription, des travaux des étudiants qui ont été numérisés, des réflexions et des notes de Fasteen prises pendant l'analyse des vidéos.

Parmi ses conclusions, Fasteen affirme que l'utilisation de systèmes de numérations alternatifs dans la formation des futurs enseignants en formation initiale peut les amener à la réinvention d'un algorithme de multiplication, d'avoir une compréhension conceptuelle plus approfondie du système de numération décimale et de réfléchir sur leurs propres processus d'apprentissage et ceux de leurs futurs élèves. Cependant, les données recueillies étant qualitatives (analyse des travaux des futurs enseignants en formation initiale), un bémol peut être mis sur les ces conclusions.

L'expérimentation d'Harshman en 2016 avait pour but de montrer qu'une séquence d'enseignement en base 8 aurait un impact sur la compréhension des futurs enseignants en formation initiale en lien avec les contenus mathématiques communs et spécifiques, mais plus particulièrement sur les opérations arithmétiques sur les nombres entiers. Celle-ci a eu lieu lors d'un cours de mathématiques pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale au primaire, qui portait sur les concepts et les opérations sur les nombres et dans lequel une séquence d'enseignement en base 8, *Candy factory*, était utilisée. Lors de celle-ci, les futurs enseignants au primaire en formation initiale devaient d'abord se familiariser avec le vocabulaire. Ensuite, ils ont abordé le dénombrement, la représentation flexible de nombres en base 8 pour en arriver à développer des stratégies pour inventer des algorithmes des opérations arithmétiques.

Ce cours était offert à trois groupes différents et, parmi les étudiants de ces cours, 91 futurs enseignants en formation initiale ont accepté de participer à cette étude. Harshman s'est particulièrement intéressée à l'impact d'une séquence d'enseignement se déroulant entièrement en base 8 sur le développement d'une compréhension conceptuelle plus approfondie des concepts et des opérations sur les nombres entiers chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale.

Avant d'amorcer la séquence d'enseignement en base 8, les participants ont passé un test visant à évaluer leurs connaissances mathématiques pour l'enseignement, c'est-à-dire la connaissance du contenu commun et du contenu spécialisé. Ce test comportait un total de 25 questions sur des connaissances mathématiques, telles que le calcul, la formulation d'énoncés mathématiques et la capacité de résoudre des problèmes à l'aide d'algorithmes, de règles ou de procédures standards. Les questions requéraient des participants qu'ils représentent des opérations mathématiques, qu'ils fournissent des justifications ou qu'ils comprennent des algorithmes inventés par les élèves. Les futurs enseignants au primaire en formation initiale étaient interviewés avant la séquence d'enseignement et après afin d'évaluer l'impact sur la compréhension conceptuelle. Parmi les participants, quatre futurs enseignants en formation initiale ont été sélectionnés, en fonction de leurs scores initiaux au test, pour une étude de cas. Les données recueillies proviennent des entretiens avec ces derniers, des enregistrements audios et de leurs transcriptions, lors desquels les participants devaient répondre à des questions générales et mathématiques.

Harshman a conclu que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont approfondi leur compréhension conceptuelle plus approfondie des concepts et des opérations sur les nombres entiers qu'ils ont démontrée par des explications, des justifications et des solutions alternatives lors des entrevues. Cependant, cette étude a des limites qui concernent d'abord la collecte de données, étant donné la difficulté des chercheurs de noter tout ce qui se passait dans la classe et qu'ils devaient alors se référer aux enregistrements audio. Ensuite, le fait qu'une seule classe ait été accessible et que certains étudiants se soient désistés de l'étude nuit à la validité de l'étude. Finalement, les conclusions étant basées sur des interviews avec les futurs enseignants au primaire en formation initiale pour évaluer l'impact sur compréhension conceptuelle, elles sont alors difficilement quantifiables.

2.2.3 Compréhension conceptuelle et procédurale

Pour Rittle-Johnson et al. (2015), le National Research Council et Harshman (2016), la compréhension conceptuelle peut être définie comme la connaissance des concepts, des opérations et surtout des relations mathématiques entre ceux-ci, qui se traduit par « une représentation mentale des principes qui régissent un domaine » (Rittle-Johnson et al., 2016). Quant à la compréhension procédurale, Hiebert (1992) et McCormick (1997) la décrivent comme la connaissance des symboles, règles ou procédures utilisées pour résoudre des problèmes mathématiques. S'« [i]l est clair que les apprenants doivent développer des connaissances conceptuelles et procédurales dans un domaine, mais la question de savoir comment ces deux types de connaissances sont liés est controversée ». (Rittle-Johnson et al., 2015) En effet, si le National Council of Teachers of Mathematics recommande un équilibre entre les compréhensions conceptuelle et procédurale, il « a explicitement affirmé une perspective conceptuelle-procédurale dans son principe selon lequel la fluidité procédurale suit et s'appuie sur une base de compréhension conceptuelle. » (National Council of Teachers of Mathematics, 2014). Cependant, pour certains, il y a lieu de se demander s'il s'agit une voie à sens unique ; est-ce que la compréhension conceptuelle doit nécessairement précéder la compréhension procédurale ou est-ce que la compréhension procédurale peut mener progressivement à la compréhension conceptuelle ?

> « Les données indiquent que les relations entre les connaissances conceptuelles et procédurales sont souvent bidirectionnelles, l'amélioration des connaissances procédurales favorisant souvent l'amélioration des connaissances conceptuelles et vice versa. Il ne s'agit pas d'une voie à sens unique allant de la connaissance conceptuelle à la connaissance procédurale ; la croyance selon laquelle la connaissance procédurale ne soutient pas la connaissance conceptuelle est un mythe. » (Rittle-Johnson et al., 2015)

Cette bidirection entre les connaissances procédurales et conceptuelles ne doit pas être négligée puisque

> « l'intersection des connaissances procédurales et conceptuelles est de la plus haute importance lors de l'examen des connaissances des enseignants de mathématiques (Ambrose, 2004 ; Hiebert, 1999 ; Hill & Ball, 2004, 2009 ; Rittle-Johnson & Kroedinger, 2002). Il est impératif que les programmes de formation des enseignants de mathématiques mettent l'accent sur l'interconnexion des compétences procédurales et de la compréhension conceptuelle, afin que les étudiants aient la capacité de comprendre pourquoi et comment fonctionnent les algorithmes et, partant, de saisir les concepts mathématiques sous-jacents (Ambrose, 2004 ; Kajander, 2010 ; Reid, 2013). (Reid & Reid, 2017)

2.2.4 Théorie de la charge cognitive

La théorie de la charge cognitive développée par Sweller prend appui sur la description classique de l'architecture cognitive de Baddeley partagée en trois systèmes de mémoire. La mémoire sensorielle, qui collecte des informations de l'environnement à travers deux canaux (verbal/auditif et visuel) puis, selon l'attention qui leur est accordée, les envoie dans la mémoire de travail. La mémoire de travail qui, lors de l'apprentissage, traite les informations nouvelles, les combine avec les connaissances antérieures de l'apprenant, puis les encode dans la mémoire à long terme. Ultérieurement, elle peut récupérer les informations encodées en mémoire à long terme lors de la réalisation d'une tâche. Les processus qui permettent de combiner les connaissances et les informations nouvelles permettent la construction des connaissances nouvelles, qui pourront à leur tour, être encodées sous forme de schémas dans la mémoire à long terme. Les chercheurs qui s'intéressent aux processus de l'apprentissage dans le cadre de la théorie de la charge cognitive s'appuient sur deux hypothèses reliées concernant le fonctionnement de la mémoire de travail en situation d'apprentissage. La première suppose que la capacité de la mémoire de travail est limitée ; elle ne peut traiter qu'un nombre d'éléments limités à la fois. La seconde présume que les ressources mentales mobilisées sont limitées à la capacité de la mémoire de travail. Si celles-ci sont trop nombreuses, la mémoire de travail est alors surchargée cognitivement, ce qui mène alors à l'échec de la tâche ou de l'apprentissage. Finalement, la mémoire à long terme permet de retenir, de manière si grande qu'elle pourrait sembler illimitée, et sur de très longues périodes. Elle repose sur trois processus de base : l'encodage, le stockage et la restitution des informations.

Lors de l’apprentissage, l’information nouvelle est traitée par la mémoire de travail, qui la combine avec les connaissances antérieures de l’apprenant, puis la transfère dans la mémoire à long terme sous la forme d’un schéma qui pourra ultérieurement être récupéré par la mémoire de travail dans la réalisation d’une tâche. Ceux-ci peuvent être plus ou moins complexes, c’est-à-dire composés d’une ou de plusieurs unités de signification interreliées. Ce sont ces schémas qui permettent de demeurer dans la limite de capacité de la mémoire de travail puisqu’ils sont récupérés et traités dans la mémoire de travail tels quels, c’est-à-dire sans égard à leur degré de complexité et de sophistication. Autrement dit, un schéma, quelle que soit sa complexité, est traité, dans la mémoire de travail, comme un élément unique. Comme la charge cognitive dépend du nombre des éléments qui sont combinés, et non pas de leur complexité intrinsèque, cela veut dire que la mobilisation d’un schéma complexe en mémoire de travail n’est pas plus coûteuse que la mobilisation d’un schéma simple. La constitution des schémas en mémoire à long terme constitue donc le produit principal des processus d’apprentissage et le but des activités d’enseignement intentionnellement conçues pour « faire apprendre ». La notion de schéma est primordiale, puisque « ces structures de connaissance organisées constituent un mécanisme majeur pour extraire le sens des informations, acquérir et stocker des connaissances dans la mémoire à long terme, contourner les limites de la mémoire de travail, augmenter la force de la mémoire, guider la recherche et le rappel d’informations et fournir des liens avec les connaissances antérieures. » (Plass et al., 2010). Une fois le schéma construit, il est important que l’apprenant pratique suffisamment afin d’automatiser le schéma dans le but de réduire la charge cognitive sur la mémoire de travail. En effet, l’automatisation permet d’exécuter presque qu'inconsciemment des tâches de façon précise et fluide. À l'inverse, sans automatisation, la réalisation de la tâche sera plus lente et mobilisera plus de ressources en mémoire de travail, ce qui pourrait compromettre l'apprentissage de notions plus complexes.

Deux types de charges cognitives ont été identifiées par Sweller (1998) : intrinsèque et extrinsèque. La charge cognitive intrinsèque concerne la complexité de l'information qui doit être apprise par l'apprenant et elle est déterminée par le degré d'interactivité entre les éléments qui doivent être traités en même temps par la mémoire de travail, mais aussi par le niveau de connaissances de l'apprenant. En effet, il est pertinent de croire qu'une même quantité d'éléments en interaction pour un novice pourrait représenter un seul élément pour un expert qui disposerait d'un schéma en mémoire à long terme qui intègrerait tous ces éléments. La charge cognitive extrinsèque est liée à tous les processus cognitifs inutiles, à tous les éléments que l'élève doit traiter, mais qui ne sont pas nécessaires à la construction de schémas. Cette charge est souvent causée par des tâches d'apprentissages mal organisées, mal présentées ou encore qui contiennent des informations confuses ou superflues.

Bref, « [l]a charge cognitive correspond à la quantité de ressources cognitives investies par un individu lors de la réalisation d'une tâche. Elle dépend :

- de la complexité de la tâche (le nombre d'éléments à traiter et à mettre en relation)
- des ressources de l'individu (ses connaissances à propos de cette tâche)

- et de la manière dont la tâche est présentée. » (« Qu’est-ce que la charge cognitive ? », 2020)

Une surcharge cognitive se produit lorsque la charge cognitive totale devient si grande qu’elle dépasse les capacités limitées de la mémoire de travail ; l’apprentissage est alors fortement compromis. Si la charge cognitive est inévitable, il est toujours possible de la réduire pour éviter une surcharge. Pour ce faire, des procédures d’enseignement qui tiennent compte des effets identifiés par la théorie de la charge cognitive et qui favorisent un apprentissage durable et approfondi par la construction de schémas sont à privilégier. S’il peut paraître plus facile d’enseigner des algorithmes arithmétiques (connaissances procédurales) aux élèves afin que ceux-ci puissent les appliquer tout en diminuant la charge cognitive, il est important de développer d’abord une bonne compréhension conceptuelle chez les élèves pour qu’ensuite ils puissent développer leurs propres algorithmes arithmétiques basés sur cette compréhension. Il est aussi possible que les élèves utilisent les algorithmes dits traditionnels, mais tout en comprenant les principes sous-jacents. Ces algorithmes pourront par la suite être automatisés afin de diminuer la charge cognitive.

2.2.5 « Desirables difficulties »

Comme mentionné précédemment, pour que le recours à un système de numération alternatif soit efficace, les séquences d’enseignement et d’apprentissage présentés aux enseignants doivent comporter des activités riches afin de susciter l’engagement des étudiants, favoriser une certaine réflexion, tout en ayant un niveau de complexité cognitive adéquat pour favoriser l'acquisition de schémas et s'assurer un apprentissage durable.

Il existe plusieurs façons de rendre une situation cognitivement plus complexe et, parmi celles-ci, se trouvent les « desirables difficulties » ou difficultés souhaitables, telles que présentées par Elizabeth et Robert Bjork en 1994 ; varier les conditions d'apprentissage, entrelacer l'enseignement de différents sujets, espacer dans le temps les sessions d'étude sur un sujet. Selon eux, les tâches qui exigent un plus haut niveau d'efforts cognitifs améliorent la rétention à long terme. Ces difficultés sont dites souhaitables, puisqu'elles favorisent non seulement le transfert et l'encodage des connaissances dans la mémoire à long terme, mais aussi la récupération en mémoire. Celle-ci joue effectivement un rôle important dans l'apprentissage, puisqu'elle modifie la mémoire « en rendant les informations […] à récupérer plus susceptibles d'être rappelées à l'avenir et dans des contextes différents. » (Bjork & Bjork, 2011) C'est pourquoi il faut favoriser des activités qui obligent les apprenants à récupérer des informations, à en générer afin de rendre l'apprentissage plus durable. En effet, ces difficultés sont souhaitables dans un objectif de rétention à long terme et non pas de performance. Il importe ici de

> « distinguer la performance immédiate au test de l'apprentissage durable à plus long terme. […] la performance fait référence à des changements relativement temporaires dans les connaissances et les compétences qui sont immédiatement observables après l'enseignement, tandis que l'apprentissage fait référence à des changements relativement permanents dans les connaissances et les compétences qui persistent sur de plus longues périodes. » (Phillips, 2017)

Cependant, pour que ces difficultés demeurent souhaitables, il est important que celles-ci soient adaptées à l'apprenant et à ses compétences.

Des neuroscientifiques, tels que Steve Masson, qui étudient le fonctionnement du cerveau, abondent dans le même sens. Ce dernier a identifié sept principes neuroéducatifs pour apprendre de manière durable et efficace : activer les neurones liés à un apprentissage visé, les activer à plusieurs reprises, entraîner la récupération en mémoire, élaborer des explications, espacer l'activation des neurones, maximiser les feedbacks et cultiver un esprit dynamique (Masson, 2020).

3. Cadre méthodologique

La compréhension qu'ont les futurs enseignants au primaire en formation initiale intéresse les chercheurs puisque celle-ci aura un impact sur la compréhension, le développement du sens du nombre de leurs futurs élèves. Si ces chercheurs proviennent en majorité de l'extérieur du Québec, on peut croire que la situation est sensiblement la même ici. Ce qui en ressort : les futurs enseignants ont une compréhension davantage procédurale que conceptuelle et cela a pour conséquences de nuire au développement du sens du nombre de leurs futurs élèves puisque certains futurs enseignants, dépourvus d'une compréhension conceptuelle suffisante, ont tendance à enseigner des algorithmes au lieu d'amener les élèves à développer leurs propres stratégies. Les chercheurs s'entendent sur le fait que les futurs enseignants doivent avoir une compréhension conceptuelle plus approfondie, c'est-à-dire qui va au-delà de l'exécution automatisée d'un algorithme. Pour ce faire, la formation des futurs enseignants doit comporter des cours qui aient pour but de reconceptualiser la compréhension du système de numération décimal des futurs enseignants. Pour ce faire, plusieurs professeurs ont recours à un système de numérotation alternatif, dans une base autre que dix, afin de créer un conflit cognitif qui favorise la réflexion et l'engagement des futurs enseignants en formation initiale et qui permet d'espérer un apprentissage durable. Cependant, la façon dont l'utilisation des systèmes de numération autre qu'en base 10 se déploie au Québec est peu documentée. C'est pourquoi cette recherche, qui s'appuie sur un cadre théorique arithmétique et didactique (la théorie de la charge cognitive et les *desirables difficulties*), a pour but de faire la lumière sur la situation québécoise chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale 1) sur l’état de leurs connaissances du système de numération décimal et des algorithmes arithmétiques, 2) sur l’impact de l’utilisation de systèmes de numération alternatifs sur le développement de leur compréhension conceptuelle approfondie, 3) sur la façon dont les systèmes de numération alternatifs sont employés dans la formation dans les universités québécoises et 4) sur la complexité cognitive des tâches qui leur sont proposées.

3.1 Analyse des plans de cours recueillis

Puisque l’objectif de cette recherche est d’identifier les bases utilisées dans les cours offerts en formation initiale dans les différentes universités francophones du Québec ainsi que les fondements sur lesquels repose le choix d’une ou de plusieurs bases mais aussi savoir comment elles sont exploitées, alors une approche qualitative descriptive a été privilégiée. Dans un premier temps, les différents sites internet des universités francophones ont été consultés afin de répertorier les cours offerts en formation initiale dans les différentes universités francophones du Québec qui étaient liés au sujet de cette recherche, entre autres les cours de didactique de mathématique ou encore les cours pourtant sur l’arithmétique. Les mots-clés utilisés étaient : Arithmétique, Système(s) de numération, Numération, Base(s), Opération(s), Sens du nombre, Sens, Nombre(s) naturels, Nombre(s) entiers, Nombre(s), Entier(s), Naturel(s).

Les descripteurs des différents cours répertoriés ont ensuite été regroupés dans un tableau comportant les titres, le contenu, le nombre de crédits et le statut du cours (optionnel ou obligatoire). Les plans de cours ne donnant très peu de détails sur la ou les base(s) utilisée(s) ou encore sur la démarche pédagogique privilégiée, l’étape suivante a été de contacter les Facultés d’éducation des différentes universités francophones pour obtenir les plans de cours des différents cours répertoriés. Une fois ces derniers recueillis, ils ont été analysés selon les objectifs, généraux et spécifiques, ainsi que selon les contenus abordés (Voir Annexe I : Analyse des plans de cours). L’analyse des plans de cours a fait ressortir cinq cours qui cadraient davantage dans cette recherche.

Tout d’abord, le cours PPE10122 de l’Université du Québec à Rimouski, a été retenu parce que l’un des objectifs est « d’aller au-delà d’une compréhension procédurale (c’est-à-dire le “comment cela fonctionne”) en favorisant une compréhension conceptuelle (ou “le comment et le pourquoi cela fonctionne”). Le cours vise donc une compréhension conceptuelle de la mathématique et non strictement procédurale. » (Université du Québec à Rimouski, 2023). De plus, dans les contenus, on retrouve les systèmes de numération positionnelle de différentes bases ainsi que les « opérations arithmétiques : comprendre et expliquer les “retenues”, les “emprunts” et les algorithmes traditionnels de la multiplication et la division » (Université du Québec à Rimouski, 2023).

Le cours MAT1002 de l’Université du Québec en Outaouais s’est démarqué par la présence dans son contenu de la création d’un système de numération de base 4. Il sera intéressant de voir comment cette activité permet d’atteindre l’objectif du cours « prendre une distance critique à l’égard des contenus et des processus dans les domaines de la géométrie, de la mesure et de l’arithmétique » (Université du Québec en Outaouais, 2020).

Le cours PDA114 de l'Université de Sherbrooke a aussi été retenu parce que l'on retrouve, dans les contenus, une analyse conceptuelle du sens du nombre, de la numération et des opérations sur les nombres naturels. En effet, l'aspect « conceptuel » de l'analyse cadre dans cette recherche et il semblait intéressant de connaître les façons de faire.

En ce qui concerne le cours MAT-1905 de l'Université Laval, il est ressorti puisque l'on retrouve, parmi les objectifs, la maîtrise de l'écriture des nombres dans différentes bases, les opérations arithmétiques s'y rattachant et la compréhension des algorithmes. Les contenus de ce cours comprennent les systèmes de numérations, le changement de bases et les opérations dans d'autres bases que 10.

3.2 Les entretiens semi-dirigés

Une fois les cours de 4 universités ciblés, un canevas (Voir annexe II : Canevas d'entretien) a été élaboré afin de se préparer pour les entretiens semi-dirigés. Ce dernier a été conçu en lien avec le but de cette recherche, c'est-à-dire de faire la lumière sur la situation québécoise chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale (l'état de leurs connaissances, sur l'impact de l'utilisation de systèmes de numération alternatifs, la façon dont les systèmes de numération alternatifs sont employés et la complexité cognitive des tâches). Le canevas se divise en 3 parties. D'abord, le portrait général du cours ciblé ; on s'intéresse entre autres à qui s'adresse le cours, les activités pédagogiques proposées et les systèmes de numération utilisés. Ensuite, la deuxième partie comporte des affirmations sur lesquelles les participants doivent se positionner (en accord ou en désaccord) et qui portent sur la situation des futurs enseignants en formation initiale, l'utilisation de systèmes de numération alternatifs et la complexité cognitive. Finalement, la troisième partie est constituée de questions ouvertes sur les mêmes thèmes abordés dans la première et la deuxième parties.

Une fois les cours ciblés et le canevas d'entretien élaboré, un courriel (Voir Annexe III : Document de recrutement de participants) a été envoyé aux professeurs des cours ciblés afin de les inviter à participer à cette recherche. Dans le courriel, il est précisé que leur participation prendra la forme d'un entretien individuel semi-dirigé, d'une durée maximale de 60 minutes qui se déroulera en visioconférence, au moment de leur choix lors de la session d'automne 2024.

3.3 Limites méthodologiques

Comme toute recherche, cette étude présente certaines limites méthodologiques qui doivent être prises en considération afin d'en interpréter les résultats avec justesse.

Tout d'abord, la portée des données recueillies constitue une première limite. L'analyse repose principalement sur l'examen des plans de cours et sur des entretiens semi-dirigés réalisés auprès des professeurs, des chargés de cours ou des personnes ayant participé à la création des cours ciblés. Bien que ces sources permettent de recueillir des informations pertinentes sur les objectifs pédagogiques et les approches didactiques adoptées, elles ne permettent pas de rendre compte de la perspective des futurs enseignants en formation initiale ni des effets concrets sur leur apprentissage. Une observation directe en classe ou une collecte de données auprès des futurs enseignants en formation initiale aurait permis d'obtenir une compréhension plus globale de l'impact des systèmes de numération alternatifs. Le fait que ces personnes peuvent avoir des biais dans leurs observations constituent aussi une limite.

Ensuite, la sélection des cours analysés repose sur l'information disponible sur les sites internet des universités francophones du Québec. Or, certains cours pertinents pourraient ne pas avoir été répertoriés en raison de la disponibilité variable des informations en ligne. Ainsi, la liste des cours étudiés ne prétend pas à l'exhaustivité, ce qui limite la représentativité des données. De plus, le fait que la recherche repose sur un échantillon restreint limite la généralisation des conclusions.

Finalement, la complexité du concept étudié représente également un défi méthodologique. La compréhension conceptuelle du système de numération est une construction cognitive difficile à mesurer uniquement par des entretiens et des documents écrits. En effet, les données recueillies dans le cadre de cette recherche sont en fait les impressions des personnes interrogées sur l'efficacité des approches déployées ; le concept étudié nécessiterait des instruments d'évaluation plus approfondis pour en cerner tous les aspects.

4. Présentation des résultats

4.1 Portrait général

Dans le cadre de la formation des futurs enseignants au primaire, plusieurs universités proposent des cours d'arithmétique et de didactique des mathématiques et ce, dès la première année du baccalauréat. Dans le cadre de nos entretiens, les cours abordés étaient tous des cours de première année. Bien que ces cours visent tous à renforcer la compréhension des mathématiques des futurs enseignants au primaire en formation initiale et à les préparer à leur rôle d'enseignant, ils varient considérablement en matière d'approches pédagogiques et de contenus. Dans certaines universités, l'accent est mis sur l'arithmétique et la compréhension des bases fondamentales des mathématiques. D'autres adoptent une perspective plus large en intégrant les cinq domaines des mathématiques du primaire, ou encore centrent leur enseignement sur la didactique des mathématiques.

Ces cours ont été retenus puisqu'ils ont tous recours à l'utilisation de systèmes de numération alternatifs. Selon les universités, différentes bases sont explorées, comme les bases 2 à 12, le système maya, égyptien, sino-japonais, binaire ou encore un système en base 5, avec une notation spécifique. Ces systèmes sont introduits à travers diverses stratégies pédagogiques, allant de manipulations concrètes avec des objets (jetons, blocs, macaronis ou attaches à pain) pour comprendre le regroupement des nombres dans différentes bases, à des activités plus théoriques, comme la conversion entre différentes bases ou l'analyse d'algorithmes mathématiques alternatifs.

Une grande variété d’activités sont proposées dans les différentes universités. Parmi les activités proposées, on retrouve la conversion entre différentes bases, des opérations dans des systèmes de numération alternatifs, des calculs avec des algorithmes non conventionnels, des exercices de manipulation sans conversion entre bases ni inventions d’algorithmes et des problèmes de réflexion pour sensibiliser les étudiants aux défis d’apprentissage du système décimal, en évitant les opérations formelles dans d’autres bases. Le temps accordé aux systèmes de numération alternatifs dans les différents cours retenus varie considérablement ; d’une heure trente jusqu’à huit heures peuvent y être consacrées.

4.2 Volet 1 : La situation des futurs enseignants au primaire en formation initiale

Concernant la compréhension procédurale des futurs enseignants en formation initiale des opérations arithmétiques sur les nombres entiers, les réponses sont nuancées. Si en général, selon les observations des personnes interrogées, les futurs enseignants au primaire en formation initiale maîtrisent l’addition et la soustraction, ils rencontrent plus de difficultés avec la multiplication et surtout la division qui semble être très difficile. Deux des personnes interrogées ont soulevé le fait que la présence de zéros dans les opérations est particulièrement problématique et l’une d’entre elles estime que seuls 50 à 75 % des étudiants ont une compréhension procédurale satisfaisante.

Selon les personnes interrogées, la compréhension conceptuelle des nombres entiers, de la valeur de position et des principes sous-jacents aux opérations arithmétiques, demeure souvent superficielle. Par exemple, bien que les étudiants identifient correctement la place des dizaines dans un nombre, ils peinent à conceptualiser qu'un groupe de quatre dizaines équivaut à 40 unités. De plus, expliquer les algorithmes mathématiques représente un défi majeur : s'ils parviennent à les appliquer, ils éprouvent de la difficulté à justifier leur fonctionnement. Par exemple, de nombreux futurs enseignants au primaire en formation initiale ne peuvent expliquer pourquoi on met un zéro, ou encore pourquoi on se tasse d'une colonne lorsqu'on fait une multiplication à deux chiffres. Seule une faible majorité comprend réellement les principes sous-jacents aux opérations arithmétiques.

L'ancrage profond du système décimal semble également constituer un obstacle à leur capacité de reconceptualiser leur compréhension des nombres et à travailler avec d'autres bases. Toutefois, tous estiment que cet obstacle peut être surmonté avec des stratégies pédagogiques adaptées.

4.3 Volet 2 : L'utilisation de systèmes de numération alternatifs

L'utilisation des systèmes de numération alternatifs apparaît alors comme un levier pertinent pour aider les futurs enseignants à dépasser ces difficultés, car ils permettent de briser l'automatisme du système décimal et d'amener les étudiants à mieux comprendre la valeur de position des nombres. Est-ce que ces systèmes aident les futurs enseignants au primaire en formation initiale à reconceptualiser les opérations arithmétiques ? Certains trouvent que ces systèmes aident grandement à revoir les opérations sous un autre angle, tandis que d'autres estiment que ce n'est pas forcément le cas. Par contre, les personnes interrogées s'accordent sur leur impact positif pour développer l'intuition et la compréhension des nombres et admettent que la comparaison avec d'autres bases permet de mieux comprendre la structure et les caractéristiques du système décimal. Cependant, il est important de souligner que ces constatations reposent sur les perceptions et impressions des personnes interrogées ; aucune mesure pour quantifier ou qualifier l'efficacité de l'utilisation de systèmes de numération alternatifs n'a été réalisée.

L'utilisation de tels systèmes peut faire prendre conscience aux futurs enseignants en formation initiale de leurs propres lacunes, mais les place surtout dans une situation où ils expérimentent les difficultés que leurs propres élèves pourraient rencontrer. Les expériences proposées dans les différents cours, parfois déstabilisantes, offrent aux futurs enseignants en formation initiale une perspective similaire à celle de leurs futurs élèves, leur permettant ainsi de mieux anticiper les défis d'apprentissage de ces derniers. Toutefois, il semble que ces activités ne les amènent pas toujours à une réflexion approfondie sur leur propre processus d'apprentissage et sur leurs choix pédagogiques futurs. En effet, certains pensent que ces cours, situés en début de formation, ne permettent pas encore aux étudiants de se projeter dans leur enseignement futur. D'autres estiment que cette réflexion est présente.

4.4 Volet 3 : La complexité cognitive

Pour les personnes interrogées qui utilisent plusieurs bases dans le cadre de leurs cours, l'exposition à plusieurs bases améliore la flexibilité cognitive, même si certains étudiants résistent à cette approche sous prétexte qu'ils n'auront jamais à enseigner ces notions.

D'un point de vue didactique, l'approche adoptée dans ces cours repose sur un équilibre entre manipulation concrète et réflexion théorique. Les entretiens ont révélé que l'utilisation de matériel pédagogique, tel que des jetons, des macaronis ou des attaches à pain, est particulièrement efficace pour améliorer la compréhension des systèmes de numération. Toutefois, la complexité des tâches proposées doit être mesurée : un certain niveau de complexité est bénéfique, mais des activités trop simples ne permettent pas un réel apprentissage et une complexité excessive peut décourager les étudiants et nuire à leur engagement.

Lors des entretiens, des personnes interrogées ont soulevé l'importance de la charge affective. En effet, il est important, selon eux, de faire vivre de l'intérieur les défis cognitifs, mais aussi affectifs que doivent relever les élèves lors de l'apprentissage de la numération et de l'arithmétique. Certains de leurs étudiants se fâchent, pleurent, se retrouvent dans une situation d'élèves en difficulté ; il faut souligner l'aspect affectif dans un esprit de bienveillance, leur faire comprendre que c'est légitime de se sentir comme ça et que leurs futurs élèves peuvent aussi expérimenter une telle charge affective.

4.5 Questions ouvertes

Selon les personnes interrogées, plusieurs connaissances sont cruciales pour enseigner les mathématiques au primaire. D'abord, les connaissances mathématiques : connaissance conceptuelle approfondie du système de numération en base 10, de la valeur de position et des quatre opérations arithmétiques de base, connaissances des différents ensembles de nombres (naturels, relatifs, rationnels…) et des différentes notations qui relèvent de ces ensembles (fractionnaire, décimale, pourcentage), compréhension des fractions et de leur manipulation.

Les connaissances didactiques ont aussi une grande importance : les théories, les preuves empiriques, les approches qui ont été testées, etc. Une réflexion didactique est aussi nécessaire : comment différencier l'enseignement de manière que les élèves apprennent les mathématiques ?

Finalement, des connaissances de nature plus pédagogique sont aussi nécessaires. En effet, les futurs enseignants au primaire en formation initiale doivent posséder des connaissances sur les difficultés que les élèves vont rencontrer, le type de tâches à choisir, la progression des tâches qui seraient proposées, le matériel qu'on pourrait proposer, les documents ministériels. Il est important de savoir comment diagnostiquer une difficulté et intervenir de manière adaptée. Il faut aussi savoir reconceptualiser les erreurs des élèves, c'est un outil pour enseigner et ça fait partie du processus d'apprentissage.

5. Analyse des résultats

5.1 La situation des futurs enseignants au primaire en formation initiale

L'une des principales conclusions de la revue de littérature était que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont une compréhension davantage procédurale que conceptuelle des mathématiques qu'ils auront à enseigner. Les entretiens menés dans le cadre de cette recherche convergent dans le même sens. En effet, l'un des constats communs dans les entretiens est que les futurs enseignants ont une compréhension procédurale assez développée des opérations arithmétiques, mais une compréhension conceptuelle limitée. En effet, les futurs enseignants ont souvent une compréhension procédurale des mathématiques ; ils sont capables de reproduire des méthodes enseignées, mais sans toujours comprendre pourquoi elles fonctionnent. S'ils peuvent appliquer les règles, expliquer pourquoi elles existent est plus difficile. Par exemple, pour la multiplication posée (ex. 367 × 42), plusieurs ne savent pas expliquer pourquoi on décale d'une colonne lorsque l'on multiplie par la dizaine. Les personnes interrogées soulignent aussi que cette difficulté est exacerbée pour des concepts plus avancés, comme la division des nombres décimaux.

Les entretiens menés révèlent aussi que certaines opérations mathématiques posent des défis particuliers. Par exemple, les personnes interrogées mentionnent que les zéros dans les nombres compliquent les calculs (par exemple, la soustraction avec emprunt, la division avec des zéros dans le quotient), ce qui démontre un manque de compréhension conceptuelle de la valeur de position.

La division apparaît comme étant l'opération arithmétique la plus difficile pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale. En effet, celle-ci demande plusieurs raisonnements simultanés (la relation entre multiplication et division, l'estimation du quotient, la gestion des zéros). En ce qui concerne la multiplication, les personnes interrogées mentionnent qu'elle est mieux maîtrisée, mais dès que l'opération implique des nombres à plusieurs chiffres, certaines rencontrent des problèmes.

Ce qui ressort aussi des entretiens, c'est que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont souvent une compréhension peu développée des concepts sous-jacents aux opérations arithmétiques. D'abord, la valeur de position semble mal comprise. L'une des personnes interrogées affirme que si, en général, ils savent que dans le nombre 452, le 4 est à la place des centaines, le 5 à la place des dizaines et le 2 à la place des unités, plusieurs ont du mal à interpréter cette information autrement que par habitude. En effet, ils comprennent que 5 est dans la colonne des dizaines, mais pas que cela signifie 5 groupes de 10. La notion de groupement et d'échange entre positions (ex. 10 unités deviennent 1 dizaine) est souvent fragile ; beaucoup d'étudiants n'ont pas une vision intuitive du groupement en base 10 et ont du mal à transférer ces concepts vers d'autres bases.

Ce manque de compréhension conceptuelle a des conséquences importantes. D'abord, il peut affecter la qualité de l'enseignement des futurs enseignants au primaire en formation initiale : si un enseignant ne comprend pas pourquoi une règle fonctionne, il risque d'enseigner uniquement des procédures ce qui pourrait compromettre le développement du sens du nombre et des opérations sur ses élèves. De plus, il révèle des lacunes dans leur propre apprentissage des mathématiques : ces futurs enseignants au primaire en formation initiale ont peut-être appris par imitation, en appliquant des règles sans comprendre leur origine. En effet, leur incapacité à expliquer les algorithmes met en évidence leur apprentissage mécanique des mathématiques. Finalement, il rend difficile l'adaptation aux erreurs des élèves : s'ils ne comprennent pas profondément les concepts, ils auront du mal à diagnostiquer et corriger les erreurs des élèves.

Un élément mis en avant dans les entretiens est que la familiarité excessive des futurs enseignants en formation initiale avec le système décimal peut freiner la reconceptualisation de leur propre compréhension de ce système de numération. En effet, puisqu'ils utilisent la base 10 depuis l'enfance, il est difficile de prendre du recul et de voir comment ce système fonctionne réellement. Selon les personnes interrogées, les futurs enseignants au primaire en formation initiale pensent bien maîtriser la numération et les opérations dans le système décimal, mais l'utilisation d'un système de numération alternatif leur fait réaliser que leur compréhension n'est pas aussi profonde qu'ils le pensaient. En effet, lorsqu'ils doivent travailler avec un système inconnu, ils réalisent rapidement que certaines notions qu'ils tenaient pour acquises ne sont pas si claires ; ils prennent alors conscience que leur propre compréhension est souvent trop superficielle et qu'ils doivent développer une meilleure conceptualisation des nombres.

En ce qui concerne les appuis théoriques sur lesquelles se basent les professeurs pour employer les systèmes de numération alternatifs dans la formation universitaire des futurs enseignants en formation initiale au primaire, deux noms sont ressortis. Une personne interrogée a mentionné les travaux du chercheur V.V Davydov dont l'équipe travaillait sur base 3, 4 par exemple en 1re et 2e année primaire, d'autres ont mentionné Bednarz et Janvier qui ont publié des travaux sur une activité en base 6 pour les élèves du primaire qui portait sur des boîtes de céréales.

5.2 L'utilisation de systèmes de numération alternatifs

Certaines des personnes interrogées mentionnent que l'utilisation de systèmes de numération alternatifs dans la formation initiale des futurs enseignants au primaire les oblige à manipuler les principes de groupement et de valeur de position, ce qui leur permet de prendre conscience de la structure sous-jacente des nombres. En travaillant avec des bases alternatives, ils doivent : manipuler des groupements (ex. en base 4, 16 unités deviennent 1 groupe de 4^2), justifier pourquoi certaines écritures sont correctes ou incorrectes, comprendre le rôle du zéro pour marquer l'absence d'une position et comprendre le fait que les nombres ne sont pas de simples symboles, mais qu'ils représentent des quantités et des groupements.

Dans certaines universités, les futurs enseignants au primaire en formation initiale sont amenés à appliquer des opérations arithmétiques dans différentes bases (addition, soustraction, multiplication). Pour les personnes concernées interrogées, cela les amène à comprendre les principes sous-jacents des opérations, et non seulement à appliquer des règles mécaniquement. Par exemple, pourquoi l'addition fonctionne-t-elle de la même manière en base 4 et en base 10 ? Comment effectuer une soustraction lorsqu'il faut

« emprunter » dans un autre système ? Cela les amène à réaliser que les règles arithmétiques ne sont pas arbitraires, mais qu'elles reposent sur des structures mathématiques fondamentales. Ainsi, les futurs enseignants sont mieux préparés à expliquer pourquoi les algorithmes fonctionnent, au lieu de simplement les enseigner comme des procédures à suivre.

L'utilisation de systèmes de numération alternatifs permet, selon la plupart des personnes interrogées, de « casser » les automatismes liés à la base 10 et de faire en sorte que les futurs enseignants au primaire en formation initiale prennent conscience de leurs lacunes. Par exemple, en base 4, ils peuvent avoir du mal à comprendre pourquoi $13_4 = 1 \times 4 + 3 \times 1 = 7$ en base 10. Ils doivent repenser la notion de groupement et de valeur de position, ce qui les aide à mieux comprendre le système décimal. De plus, lorsque les futurs enseignants au primaire en formation initiale sont plongés dans un système inconnu, ils se retrouvent dans la même position qu'un enfant apprenant le système décimal. Cela crée une expérience déstabilisante où les étudiants doivent découvrir les règles, comme le feraient des enfants en apprenant le système décimal.

Certaines personnes interrogées ont fait ressortir la charge affective qui accompagne l'utilisation de systèmes de numération alternatifs. La charge affective désigne l'impact des émotions et des expériences personnelles sur l'apprentissage des mathématiques. Elle inclut l'anxiété mathématique (peur des mathématiques, crainte de l'échec), la frustration et le stress face aux tâches complexes, les croyances sur ses propres capacités en mathématiques (ex. « Je ne suis pas bon en maths »), l'influence des expériences passées (ex. vécu scolaire négatif ou positif). En formation des enseignants, ces émotions sont cruciales, car elles influencent leur propre apprentissage des mathématiques et leur manière d’enseigner et d’interagir avec les élèves.

Selon les personnes interrogées, la charge affective se manifeste de différentes façons chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale. Certaines rapportent que certains étudiants arrivent en formation initiale avec une image négative des mathématiques, que plusieurs ont appliqué des procédures sans comprendre et ont développé une certaine peur de se tromper, que lorsqu’ils sont confrontés à des tâches qui exigent une réflexion conceptuelle (ex. bases alternatives, explication d’algorithmes), cela génère du stress et de la frustration. Cette anxiété peut nuire à leur apprentissage et les empêcher de prendre du recul sur leurs propres difficultés. Elle peut même les amener à reproduire ce climat en classe en favorisant un enseignement basé sur la mémorisation et la peur de l’erreur.

L’introduction des bases alternatives perturbe les automatismes des futurs enseignants au primaire en formation initiale et peut provoquer un sentiment d’inconfort. Certains d’entre eux se retrouvent dans la même situation que des élèves en difficulté, ce qui les aide à développer de l’empathie pour leurs futurs élèves. Cela peut aussi les aider à comprendre les défis émotionnels et cognitifs que vivent les élèves lorsqu’ils apprennent à compter et à prendre conscience de l’importance d’un enseignement progressif et bien guidé, adapté aux besoins des élèves. Cet inconfort est intentionnellement provoqué par certaines des personnes interrogées pour que les futurs enseignants au primaire en formation initiale réalisent à quel point apprendre un système nouveau est difficile pour un enfant.

Cette expérience peut être bénéfique que si elle est bien accompagnée. En effet, ceux qui prennent conscience de l'impact de la charge affective peuvent adapter leur pédagogie pour créer un environnement bienveillant et sécurisant ; il est possible de croire qu'un enseignant ayant vécu des difficultés cognitives et affectives pendant sa formation sera plus apte à comprendre les défis de ses élèves. Cependant, si l'expérience est trop brutale, elle peut aussi renforcer les blocages. C'est pourquoi la formation initiale doit aider les futurs enseignants au primaire à reconnaître et gérer leur propre charge affective pour éviter qu'elles influencent négativement leur enseignement. Pour ce faire, il est essentiel de mettre en place un accompagnement bienveillant et expliquer dès le début que la confusion et la difficulté sont normales, accompagner progressivement les étudiants dans des tâches plus complexes et encourager la collaboration pour réduire le sentiment d'isolement face à la difficulté.

Il ressort des entretiens qu'il est important de prendre en compte la charge affective dans la formation et ainsi encourager la réflexion sur les erreurs et développer une culture où l'erreur est vue comme une étape normale de l'apprentissage. En effet, il est nécessaire de déconstruire l'idée que de faire des erreurs en mathématiques est un signe d'échec, mais plutôt un levier pour l'apprentissage, afin que les futurs enseignants au primaire en formation initiale apprennent à créer des classes où les élèves n'auront pas peur d'essayer et de se tromper. Il est aussi important d'aider les futurs enseignants à reconnaître et gérer les émotions des élèves, à être plus attentifs aux blocages et frustrations des élèves, à adapter son enseignement en proposant des explications plus accessibles et du matériel concret et à développer une posture encourageante et patiente.

5.3 La complexité cognitive

Comme mentionné précédemment, les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont une familiarité avec le système décimal qui est à double tranchant : elle leur permet de faire des calculs rapides, mais les empêche de prendre du recul. C'est pourquoi l'utilisation de systèmes de numération alternatifs peut les amener à approfondir leur compréhension du système décimal. Cependant, pour que le recours à un système de numération alternatif soit efficace, les personnes interrogées ont mentionné que les séquences d'enseignement et d'apprentissage présentés aux futurs enseignants au primaire en formation initiale doivent comporter des activités riches afin de susciter leur engagement, favoriser une certaine réflexion, tout en ayant un niveau de complexité cognitive adéquat pour favoriser l'acquisition de schémas et s'assurer un apprentissage durable. C'est pourquoi une bonne modération est nécessaire. En effet, comme le mentionnent Bjork & Bjork, (2011), trop de complexité peut les décourager et les empêcher de faire des liens utiles avec le système décimal et pas assez de complexité ne leur permet pas de remettre en question les automatismes. Il faut donc adapter la difficulté des tâches aux capacités des futurs enseignants au primaire en formation initiale pour rester dans leur zone proximale de développement (Vygotski, 1985) et proposer des tâches qui sont suffisamment complexes pour stimuler et encourager les futurs enseignants au primaire en formation initiale à s’engager activement dans leur apprentissage.

5.4 Enjeux pour la formation des futurs enseignants au primaire en formation initiale

Ce qui ressort des entretiens menés, c’est que les futurs enseignants au primaire en formation initiale ont une compréhension davantage procédurale que conceptuelle du système de numération décimale. L’utilisation de systèmes de numération alternatifs constitue un outil puissant pour renforcer leur compréhension, à condition d’être bien encadrée. En effet, la complexité cognitive des tâches proposées doit être adaptée pour maintenir l’engagement des étudiants. L’aspect affectif, qui influence la perception des mathématiques, doit aussi être pris en compte pour favoriser un apprentissage plus serein et éviter les blocages. En intégrant des stratégies pédagogiques adaptées, la formation initiale peut mieux préparer ces enseignants à transmettre des concepts mathématiques de manière réfléchie et accessible aux élèves du primaire. Pour ce faire, il faut insister sur la compréhension conceptuelle et non seulement sur les procédures, leur apprendre à expliquer et justifier les concepts mathématiques, mettre davantage l’accent sur les relations entre les nombres, plutôt que sur les procédures, proposer des tâches où les étudiants doivent expliquer leurs raisonnements, les inciter à remettre en question leurs acquis et à reconstruire leur compréhension sur des bases plus solides. La formation initiale doit également insister sur l’importance des manipulations concrètes et de la réflexion sur les concepts mathématiques.

Conclusion

L'analyse menée dans ce mémoire met en évidence l'importance d'une compréhension conceptuelle approfondie du système de numération et des algorithmes arithmétiques pour les futurs enseignants au primaire en formation initiale. Les résultats obtenus soulignent qu'un enseignement centré sur des procédures et des automatismes ne permet pas toujours aux futurs enseignants de développer une vision flexible et réfléchie des mathématiques. En revanche, l'intégration de systèmes de numération alternatifs dans leur formation semble être une approche prometteuse pour pallier cette lacune.

En confrontant les futurs enseignants à des bases numériques inhabituelles, cette méthode les amène à questionner leurs propres connaissances et à reconstruire leur compréhension du nombre et des opérations. Elle favorise ainsi une prise de conscience des enjeux cognitifs liés à l'apprentissage des mathématiques et encourage une approche pédagogique plus adaptée aux besoins des élèves.

Toutefois, l'étude a également mis en lumière certains défis liés à la mise en place de cette approche, notamment en ce qui concerne la formation des formateurs et l'acceptation de ces pratiques par les institutions universitaires. Si l'utilisation de systèmes de numération alternatif semble être un bon moyen d'amener les futurs enseignants au primaire en formation initiale à développer une compréhension conceptuelle plus approfondie du système de numération initiale, il apparaît essentiel de poursuivre la réflexion sur les modalités d'implantation de ces méthodes et sur leur efficacité à long terme. En effet, dans le cadre de ce mémoire, puisque les données recueillies sur l'efficacité des approches déployées reposent principalement sur les impressions et les perceptions des personnes interrogées, il serait judicieux de mener des études comparatives sur les différentes approches et méthodes déployées dans les universités québécoises afin de mesurer l'acquisition d'une compréhension conceptuelle. Il serait aussi pertinent de mesurer l'impact de la charge cognitive ou des « desirables difficulties » des différentes tâches proposées aux futurs enseignants au primaire en formation initiale.

Références

Andreasen, J. (2006). Classroom Mathematical Practices In A Preservice Elementary Mathematics Education Course Using An Instructional Sequence Related (Electronic Theses and Dissertations, 2004-2019). University of Central Florida Orlando. https://stars.library.ucf.edu/etd/741

Bisaillon, N. (2021). Développement du sens du nombre et de la numération : Élaboration d'un outil d'évaluation et d'une séquence didactique. Université de Montréal.

Bjork, E. L., & Bjork, R. A. (2011). Making things hard on yourself, but in a good way : Creating desirable difficulties to enhance learning. Dans Psychology and the real world : Essays illustrating fundamental contributions to society (p. 56-64). Worth Publishers.

Cady, J. A., Hopkins, T. M., & Price, J. (2014). Impacting Early Childhood Teachers' Understanding of the Complexities of Place Value. Journal of Early Childhood Teacher Education, 35(1), 79-97. https://doi.org/10.1080/10901027.2013.874382

Carrier, L. (2022, mai 1). Université du Québec à Rimouski—Un cours de maths plutôt qu'un test pour les futurs enseignants du primaire. La Presse. https://www.lapresse.ca/actualites/education/2022-05-01/universite-du-quebec-a-rimouski/un-cours-de-maths-plutot-qu-un-test-pour-les-futurs-enseignants-du-primaire.php#

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Fasteen, J. (2015). An Investigation of the Role of Alternate Numeration Systems in Preservice Teacher Mathematics Content Courses. https://doi.org/10.15760/etd.2311

Fasteen, J., Melhuish, K., & Thanheiser, E. (2015). Multiplication by 10 base-5 : Making Sense of Place Value Structure Through an Alternate Base. Mathematics Teacher Educator, 3(2), 83-98. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.3.2.0083

Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First- and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 21(3), 180. https://doi.org/10.2307/749373

Harshman, K. (2016). The Influence of Instruction in Base 8 on Prospective Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching (Electronic Theses and Dissertations.). University of Central Florida. https://stars.library.ucf.edu/etd/5082

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. American Educational Research Journal, 42(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hodgson, B. (2016, juin). Apport des mathématiciens à la formation des enseignants du primaire : Regards sur le « modèle Laval ». Proceedings of the 2016 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.

Hopkins, T. M., & Cady, J. A. (2007). WHAT IS THE VALUE OF @*# ? Deepening Teachers' Understanding of Place Value. Teaching Children Mathematics, 13(8), 434-437.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. The Journal of Mathematical Behavior, 16(1), 51-61. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90007-9

Kamii, C., Lewis, B. A., & Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic : Children inventing their own procedures. The Arithmetic Teacher, 41(4), 200-203.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics : Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States (Anniversary ed). Routledge.

McClain, K. (2003). Supporting Preservice Teachers' Understanding of Place Value and Multidigit Arithmetic. Mathematical Thinking and Learning, 5(4), 281-306. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0504_03

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2009). Progression des apprentissages : Mathématique. Québec : Gouvernement du Québec. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-primaire_2009.pdf

Moore, H. (2016). Beyond the traditional subtraction algorithm A concrete-representational-abstract approach. California State University.

National Council of Teachers of Mathematics (Éd.). (2014). Principles to actions : Ensuring mathematical success for all. NCTM, National Council of Teachers of Mathematics.

Price, J. H. (2011). Exploring the Relationship Between Orpda and Teachers' Conceptual Understanding of Place Value. [University of Tennessee]. https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/1013

Proulx, J., Corriveau, C., Squalli, H., & Adihou, A. (2012). Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques pratiques, orientations et recherches. Presses de l'Université du Québec. http://www.deslibris.ca/ID/442235

Reid, M., & Reid, S. (2017). Learning to be a Math Teacher : What Knowledge is Essential? nternational Electronic Journal of Elementary Education, 9(4), 851-872.

Reys, R. E., & Yang, D.-C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan. Journal for Research in Mathematics Education, 29(2), 225. https://doi.org/10.2307/749900

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., & Loehr, A. M. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge : The impact of instructional content within a mathematics lesson. British Journal of Educational Psychology, 86(4), 576-591. https://doi.org/10.1111/bjep.12124

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a One-Way Street : Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. Educational Psychology Review, 27(4), 587-597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

Roy, G. J. (2008). Prospective Teachers' Development Of Whole Number Concepts And Operations During A Classroom Teaching Experiment (Electronic Theses and Dissertations, 2004-2019). University of Central Florida. https://stars.library.ucf.edu/etd/3562

Roy, G. J. (2014). Developing Prospective Teachers' Understanding of Addition and Subtraction with Whole Numbers. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, 2 (Pedagogy).

Russell, S. J. (2000). Principles and Standards : Developing Computational Fluency with Whole Numbers. Teaching Children Mathematics, 7(3), 154-158. https://doi.org/10.5951/TCM.7.3.0154

Safi, F. (2009). Exploring the understanding of whole number concepts and operations : A case study analysis of prospective elementary school teachers. [University of Central Florida.]. https://www.proquest.com/openview/33e5ad9d94f22e2e73c29f30ac46c6fb/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750

Schulz, A. (2018). Relational Reasoning about Numbers and Operations – Foundation for Calculation Strategy Use in Multi-Digit Multiplication and Division. Mathematical Thinking and Learning, 20(2), 108-141. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1442641

Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Multidigit Whole Numbers. Journal for Research in Mathematics Education, 40(3), 251-281.

Thanheiser, E. (2018). Brief Report : The Effects of Preservice Elementary School Teachers' Accurate Self-Assessments in the Context of Whole Number. Journal for Research in Mathematics Education, 49(1), 39-56. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.1.0039

Tsao, Y.-L., & Lin, Y.-C. (2011). The Study of Number Sense and Teaching Practice. Journal of Case Studies in Education, 2.

Université du Québec à Rimouski. (2023, avril). PPE10122—Plan-cadre.

Université du Québec en Outaouais. (2020, Automne). MAT1002—Plan de cours.

Vygotski, L. S. (1985). *Pensée et langage* (F. Sève, Trad.). Éditions Sociales. (Ouvrage original publié en 1934)

Annexes

Annexe I — Analyse des plans de cours

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
UQAM	Le objectifs du cours sont les suivants : - développer chez le futur enseignant du primaire une vision large des mathématiques ; - examiner sa perception des mathématiques, ainsi que la relation qu'il entretient avec cette discipline ; - développer les compétences suivantes dans un contexte de réalisation adapté à de futurs maîtres : résoudre une situation-problème, raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques, et enfin communiquer à l'aide du langage mathématique. Parmi les contenus étudiés, une importance est accordée à l'utilisation de l'ordinateur dans l'activité mathématique et au développement historique des mathématiques du primaire : histoire des systèmes de numération, origine des géométries, controverses autour de la construction des nombres (irrationnels, négatifs…), développement de la notation décimale… Établir des liens articulés entre les différents concepts mathématiques élémentaires et entre les domaines mathématiques (ex. : la mesure d'une surface rectangulaire et la multiplication ; arithmétique & géométrie ; géométrie & mesure…). Posséder des notions historiques concernant l'émergence de certains domaines (ex. : géométrie) ou concepts (ex : nombres irrationnels) mathématiques, et percevoir que l'histoire continue (ex : fractales). Se convaincre du caractère évolutif et instrumental des mathématiques, par une pratique soutenue d'une résolution de problèmes mathématiques : évolution des conceptions des mathématiques, nécessité d'un savoir-communiquer… Se convaincre de la nécessité d'assoir toute connaissance mathématique sur une connaissance empirique, avant de chercher à intellectualiser cette connaissance, par l'utilisation de différents instruments (ordinateur, calculatrice, lexique mathématique, matériel de manipulation…). Développer une connaissance rationnelle des concepts mathématiques élémentaires, par une pratique raisonnée de la résolution de problèmes mathématiques (justification, preuve, démonstration…). Par des activités qui demandent l'usage de mathématiques, développer sa motivation et la confiance en soi, y compris dans des activités insécurisantes, déstabilisantes ou difficiles. Développer des comportements métacognitifs : attention, vérification (ou contrôle), planification, régulation…, par des activités mathématiques qui impliquent une réflexion.	Systèmes de numération Calcul mental Algorithmes +, —, x et/ Les bases non décimales Les opérations en différentes bases

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
UQO DID-2143	Au terme de cette activité, l'étudiant et l'étudiante sera en mesure de : - observer et évaluer le développement des compétences mathématiques et la construction des connaissances arithmétiques et probabilistes des élèves du primaire - analyser les compétences mathématiques, leurs composantes et leurs critères d'évaluation - concevoir et rédiger des situations d'enseignement et d'apprentissage en arithmétique et en probabilité en tenant compte de la logique des contenus mathématiques et de la progression des apprentissages - adapter ses interventions didactiques aux besoins et caractéristiques d'élèves dans différents contextes	Approfondissement des fondements théoriques de la didactique des mathématiques (triangle didactique, contrat didactique, situation problème). Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Développement du concept du nombre et de la numération (naturel, entier, rationnel). Sens des opérations et opérations sur les nombres Réalisation et analyse de situations d'enseignement et d'apprentissage en arithmétique et en probabilité intégrant des stratégies d'enseignement variées. Numération et positionnement - Sens des opérations - Concepts, processus et procédures personnels, puis ordre des opérations - Faits numériques de base et analyse des manuels scolaires en arithmétique
UQO MAT-1002	Au terme de cette activité, l'étudiant et l'étudiante sera en mesure de : - situer les points de repère fondamentaux et les axes d'intelligibilité (concepts, postulats, méthodes) des savoirs mathématiques afin de rendre possibles des apprentissages significatifs chez les élèves du primaire ; - approfondir sa compréhension des savoirs arithmétiques, géométriques et de mesure ; - prendre une distance critique à l'égard des contenus et des processus dans les domaines de la géométrie, de la mesure et de l'arithmétique. Réviser et développer les savoirs mathématiques dans les domaines : - Les nombres (naturels, entiers, rationnels, irrationnels et réels). - Système de numération positionnelle. - Opérations arithmétiques (sens, propriétés, algorithmes). - Calcul mental.	Les nombres (naturels, entiers, rationnels, irrationnels et réels). Système de numération positionnelle. - Exercice de création d'un système de numération de base 4 Opérations arithmétiques (sens, propriétés, algorithmes). - Addition et soustraction en colonne - Multiplication en colonne - Division en colonne Calcul mental
UDS PDA114	Identifier son propre rapport aux thèmes à l'étude, ainsi que réfléchir au rapport des enfants/élèves à ces thèmes Prendre une distance critique par rapport aux savoirs à enseigner dans ces thèmes Situer l'enseignement-apprentissage de ces thèmes par l'établissement de liens entre les compétences à développer, le monde réel/vie courante, les repères culturels et les champs d'intérêt significatifs pour les enfants/élèves Définir les intentions didactiques reliées à l'enseignement-apprentissage de ces thèmes en lien avec les besoins, les champs d'intérêt, les potentialités des enfants/élèves et les programmes de formation Décortiquer et réfléchir au cheminement du développement (éducation préscolaire) et de la progression des apprentissages (1er cycle du primaire) propre à ces thèmes à partir des documents ministériels (développement, défis, obstacles) Anticiper et analyser des raisonnements, des conceptions et des erreurs potentielles des enfants/élèves par rapport aux défis spécifiques propres aux thèmes à l'étude Cerner des champs d'intérêts et réfléchir aux capacités, aux défis ainsi qu'aux besoins universels des enfants/élèves en lien avec ces thèmes.	Décortiquer à l'aide d'une analyse conceptuelle les thèmes à l'étude : - Sens du nombre : cardinalité, ordinalité, comptine numérique, dénombrement, mémorisation, etc. - Numération : groupement, valeur, chiffre, position, etc. - Opérations sur les nombres naturels : processus personnels et conventionnels de calcul écrit, répertoires mémorisés, calcul mental, etc.

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
UQAR PPE10122	L'objectif premier du cours est de **porter un regard universitaire sur des contenus mathématiques de base qui ont déjà été appris au primaire** par les future.s enseignant.e.s. Concernant la mathématique scolaire, le cours permettra d'aller au-delà d'une compréhension procédurale (c'est-à-dire le « comment cela fonctionne ») en favorisant une compréhension conceptuelle (ou « le comment et le pourquoi cela fonctionne »). Le cours vise donc une compréhension conceptuelle de la mathématique et non strictement procédurale. Il s'agit, d'une part, de permettre aux étudiant.e.s d'approfondir leur compréhension des concepts qu'ils auront à enseigner et, d'autre part, de leur faire vivre une expérience d'apprentissage de la mathématique qui, sur ces mêmes notions à enseigner, les incite à explorer, à formuler et à valider des conjectures, à résoudre des problèmes et à modéliser mathématiquement des situations variées. **Au terme de ce cours, l'étudiante ou l'étudiant doit être en mesure :** Connaitre et comprendre les caractéristiques, les avantages et les limites de différents systèmes de numération (positionnels, non-positionnels, sans base). Connaitre les caractéristiques du système de numération décimal pour les nombres naturels et décimaux : base 10, groupements de différents ordres, rôle du zéro, distinction chiffre-nombre. Comprendre et maitriser les quatre opérations arithmétiques pour les nombres naturels et pouvoir justifier différents algorithmes (y compris les algorithmes usuels).	**Nombres naturels et entiers relatifs** - Système de numération positionnelle associé à différentes bases - Opérations arithmétiques : comprendre et expliquer les « retenues », les « emprunts » et les algorithmes traditionnels de la multiplication et la division
UQAC 3EMA230	Permettre au futur enseignant de : - Développer des connaissances/attitudes/habiletés liées aux compétences à planifier et mettre en œuvre des situation d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques pour les élève du premier et du second cycle du primaire - Manifester une compréhension critique des différents savoirs à enseigner indiqués dans le programme du ministère ainsi que ceux véhiculés dans les manuels scolaires - Créer des liens entre ces savoirs et l'histoire de l'évolution des connaissances en mathématiques - Savoir utiliser des approches pédagogiques qui rendent les apprentissages significatifs pour tous les élèves Ce cours vise aussi à favoriser le développement et la réflexion sur certaines approches d'enseignement au primaire (approche par résolution de problèmes, retour collectif et discussion en classe ; exploitation de situations-problèmes avec de jeunes enfants ; intégration des dimensions historiques et culturelles dans l'enseignement ; exploitation de matériel didactique, etc.) À cette fin, il s'agit de faire vivre ses approches aux futurs enseignantes et enseignants dans le cours lui-même, en lien avec l'apprentissage de différents concepts mathématiques, afin de faciliter plus tard, en contexte réel de classe, le recours réfléchi à ces approches.	Réflexion sur les apprentissages du nombre ainsi que sur les concepts d'espace, de quantité et d'égalité. Compréhension des différents savoirs à enseigner et des processus qui sous-tendent le sens et l'écriture des nombres naturels, le sens des opérations et de la mesure, de même que les opérations sur les nombres naturels, les solides et les figures planes, le recours aux frises et aux dallages, l'interprétation et les modes de représentation statistiques des données, les principes de probabilités. Conception et mise en œuvre d'activités d'enseignement-apprentissage en fonction de l'application des principes de la formation par compétences. Recours à des approches pédagogiques qui permettent la construction des connaissances. Développement d'habiletés pour l'évaluation de la progression des apprentissages. Analyse réflexive en lien avec les exigences et les défis actuels de l'enseignement de la mathématique au premier et au second cycle du primaire.

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
UQAC 3EMA330	Permettre au futur enseignant de : - Développer des connaissances/attitudes/habiletés liées aux compétences à planifier et mettre en œuvre des situation d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques pour les élève de 5e et 6e année du primaire - Manifester une compréhension critique des différents savoirs à enseigner indiqués dans le programme du ministère ainsi que ceux véhiculés dans les manuels scolaires - Créer des liens entre ces savoirs et l'histoire de l'évolution des connaissances en mathématiques - Savoir utiliser des approches pédagogiques qui rendent les apprentissages significatifs pour tous les élèves Ce cours vise aussi à favoriser le développement et la réflexion sur certaines approches d'enseignement au primaire (approche par résolution de problèmes, retour collectif et discussion en classe ; exploitation de situations-problèmes avec de jeunes enfants ; intégration des dimensions historiques et culturelles dans l'enseignement ; exploitation de matériel didactique, etc.) À cette fin, il s'agit de faire vivre ses approches aux futurs enseignantes et enseignants dans le cours lui-même, en lien avec l'apprentissage de différents concepts mathématiques, afin de faciliter plus tard, en contexte réel de classe, le recours réfléchi à ces approches.	Approfondissement des concepts d'espace, de quantité et concernant les apprentissages sur les nombres (naturels, relatifs et rationnels). Compréhension des différents savoirs à enseigner ainsi que des différents processus opératoires qui sous-tendent le sens et l'écriture des nombres (naturels, relatifs et rationnels), le sens des opérations et de la mesure, de même que les opérations sur les nombres (naturels, relatifs et rationnels), l'étude des solides et des figures planes, l'interprétation et les modes de représentation de données (statistiques), le dénombrement de résultats possibles dans une expérience aléatoire (probabilité). Conception et mise en œuvre d'activités d'enseignement-apprentissage en fonction de l'application des principes de la formation par compétences visés dans le programme de formation, en particulier au troisième cycle du primaire. Recours à des approches pédagogiques qui permettent la construction des connaissances, l'évaluation de la progression des apprentissages de même que l'intégration pédagogique des élèves qui présentent des difficultés d'apprentissage. Démarche d'analyse réflexive permettant de se situer par rapport aux exigences et défis actuels de l'enseignement de la mathématique au troisième cycle du primaire.

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
ULaval DID-1011	Préparer les futurs enseignants et enseignantes à agir comme médiateurs auprès d'élèves dans l'appropriation de savoirs mathématiques et ce, dans le cadre d'une société, d'une école et d'un groupe-classe déterminés et dans l'optique d'un développement intégral de chaque élève. Se familiariser avec le *Programme de formation de l'école québécoise*. Prendre connaissance des compétences rattachées au domaine mathématique et établir les liens entre ces compétences et les compétences générales énoncées dans le programme. Identifier les savoirs essentiels ayant trait aux thèmes des nombres naturels et des nombres entiers relatifs et analyser les principaux concepts — nombre, addition, soustraction, multiplication, division, etc. — touchés par ces contenus. Reconnaître les connaissances qui contribuent à leur construction et les difficultés associées à leur apprentissage. Se familiariser avec les stratégies d'enseignement et le matériel didactique, incluant les outils informatiques, pertinents pour aborder les thèmes de nombres naturels et de nombres entiers relatifs au préscolaire et au primaire. Apprendre à analyser et utiliser les activités proposées dans les manuels scolaires de même qu'à élaborer des activités d'apprentissage et d'évaluation autour de ces thèmes. Cela signifie qu'ils et qu'elles devront alors savoir justifier leurs choix de stratégies et de matériel pédagogiques compte tenu des données récentes de la recherche en didactique. Analyser les concepts mathématiques et identifier les connaissances contribuant à leur acquisition, les difficultés inhérentes au développement de leur compréhension et les contextes dans lesquels ces concepts apparaissent. Analyser les productions des élèves touchant aux thèmes de nombres naturels et entiers relatifs au préscolaire et au primaire.	L'acquisition du nombre, la notion d'erreur et les différents systèmes de numération Numération et langue orale, la numération décimale (groupement) Difficultés liées à la numération et les variables didactiques Les enjeux liés à la construction des problèmes en classe (Les différents sens des opérations) et l'analyse de problèmes (+/—) Les différents sens des opérations et l'analyse des problèmes (x et ÷) Différents documents du ministère de l'éducation et les algorithmes personnels (+, —, x, ÷) Analyse d'erreurs liées aux techniques de calcul (+, —) et les interventions vis-à-vis des erreurs liées aux techniques de calculs (+, —)) Analyse d'erreurs liées aux techniques de calculs (x et ÷), les interventions face à des erreurs liées aux techniques de calculs (x et ÷) et la verbalisation des problèmes de division

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
ULaval MAT-1905	Maîtriser le concept de nombre naturel en tant qu'entité abstraite. Connaître la relation d'ordre et l'interpréter sur la droite numérique. Maîtriser la notion de droite numérique comme moyen de visualisation des nombres naturels, entiers, rationnels et réels. Connaître et justifier les critères simples de divisibilité et les premiers résultats relatifs à l'arithmétique modulaire. Saisir les propriétés de base des nombres entiers, rationnels et réels selon différentes façons de les représenter. Devenir familier avec les termes utilisés en probabilités élémentaires et en statistique descriptive, afin entre autres de bien saisir l'essentiel des résultats statistiques véhiculés par les médias. Pouvoir utiliser le langage ensembliste. Maîtriser la construction d'une liste de comptage. Maîtriser l'écriture des nombres selon une numération positionnelle dans diverses bases ainsi que le calcul d'opérations arithmétiques s'y rattachant. Reconnaître les propriétés des quatre opérations arithmétiques, comprendre et savoir utiliser des algorithmes, traditionnels ou non traditionnels, pour leur évaluation. Maîtriser les concepts de la théorie élémentaire des nombres : diviseur, multiple, nombre premier, factorisation première, PGCD, PPCM. Maîtriser l'écriture des nombres rationnels sous forme fractionnaire et sous forme décimale, le passage d'une écriture à l'autre, les calculs arithmétiques sous chacune de ces formes ainsi que la manipulation des pourcentages. Savoir calculer une approximation valable d'un nombre irrationnel. Savoir exécuter mentalement certains calculs élémentaires.	La numération - Systèmes de numération - Changement de base - Opérations dans d'autres bases que dix Le langage ensembliste - Ensemble, sous-ensemble, cardinal - Opérations sur les ensembles L'addition et la multiplication - Les nombres naturels et la droite numérique - La relation d'égalité - Propriétés de l'addition et de la multiplication La soustraction et l'ordre - Opération de soustraction - Relation d'ordre - Propriétés de la soustraction et de l'ordre - Algorithmes de soustraction La division - Opération de division - Relation de divisibilité - Division exacte et division Euclidienne - Diviseurs et multiples, PGCD et PPCM - Calcul du PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide
UQTR PDG1076-01	S'initier à l'histoire des idées et à la construction des connaissances mathématiques afin d'identifier les éléments qui constituent l'objet d'enseignement et de culture. Développer une vision élaborée des mathématiques en tant qu'objet d'enseignement et d'apprentissage qui témoigne d'une intégration des perspectives historique, épistémologique, sociale et didactique. Nature des mathématiques et des besoins, obstacles et erreurs qui ont marqué l'histoire de la construction des connaissances en mathématiques propres au préscolaire et primaire. Importance du problème et de l'erreur dans l'évolution des connaissances en mathématiques et dans l'apprentissage individuel selon des perspectives épistémologique et sociale.	Étude des perspectives historique et épistémologique des mathématiques : histoire des idées en mathématiques et de la construction des connaissances mathématiques (géométrie, arithmétique, grandeur, numération et calcul) Étude des notions suivantes en didactique des mathématiques : concepts signifiant/signifié, nombre, chiffre, opération, opérateur, quantité, grandeur, numération, valeur de position, inverse additif, inverse multiplicatif, nombre 0, nombre 1, addition généralisée, multiplication généralisée, égalité, discret, continu, algorithme, heuristique, problème, erreur, figure, solide, plan, espace, périmètre, aire, et volume, notamment. Genèse et construction des nombres - Systèmes de numération (épistémologie, limites et avantages des différents systèmes présentés) - Bases arithmétiques et changements de base

UNIVERSITE	OBJECTIFS	CONTENU
UQTR PDG1076-02	Nature des notions mathématiques et de l'activité mathématique propres au préscolaire et au primaire (arithmétique, géométrie, statistiques et probabilités et résolution de problèmes). Histoire des approches pédagogiques en mathématiques et des diverses conceptions de l'apprentissage qu'elles impliquent en relation avec l'enseignement des mathématiques au primaire. Conditions pédagogiques susceptibles de mettre en œuvre une activité mathématique constructive chez l'élève du préscolaire et du primaire. Ce premier cours relatif à la didactique des mathématiques vise essentiellement et en priorité à comprendre, à mieux saisir, l'objet de savoir à enseigner au préscolaire et au primaire et les buts recherchés par son enseignement dans la formation des individus. Ce cours met les bases pour les cours de didactique et est en lien avec les cours de première année portant sur le développement cognitif, l'apprentissage et les stratégies pédagogiques et les fondements à l'enseignement de la langue maternelle.	Les systèmes de numération - Analyse de différents systèmes de numération positionnels et non positionnels : caractéristiques, avantages et limites - Notre système de numération décimal Les différentes bases - Opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) en différentes bases avec le matériel et avec le dessin en parallèle avec les algorithmes - Changements de base Les opérations sur les nombres naturels et entiers - Le sens des quatre opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) et les différents algorithmes de calcul
UQTR PDG1076-B1		Systèmes de numération - Concept de numération : orale, écrite et chiffrée ; - Atelier maison sur les propriétés des systèmes de numération - Retombées pour l'enseignement des mathématiques au primaire - Numération des Égyptiens et des Babyloniens ; - Numération des Chinois - Numération des Mayas - Base X - Introduction algorithmes Le calcul, les algorithmes, les bouliers et les abaques - Les quatre opérations, algorithmes usuels et non usuels, les outils de calculs - Résolution de problèmes - Retombées pour l'enseignement des mathématiques
UQTR PDG1076-C6		Le nombre - Histoire du nombre - Étude du nombre et de la numération La numération - Histoire des systèmes de numération - Étude de la numération

Annexe II — Canevas d'entretien

Partie 1 : Portrait général

1. Dans le cadre de quel(s) cours utilisez-vous les systèmes de numération alternatifs ?		
2. Est-ce un (des) cours	**Oui**	**Non**
a. d'arithmétique ?	❍	❍
b. didactique de l'arithmétique ?	❍	❍
c. d'arithmétique avec une perspective didactique ?	❍	❍
d. Autre :		
3. Votre cours s'adresse-t-il		
a. aux futurs enseignants en formation générale ?	❍	❍
i. Quelle année de formation ?		
b. à une clientèle autre ?	❍	❍
4. Combien de systèmes de numération alternatifs utilisez-vous ?		
5. Listez tous les bases couvertes dans le cadre de votre cours (dans l'enseignement, les exemples, les exercices, les examens, les travaux, etc.).		
6. Utilisez-vous des « scénarios » pédagogiques (par exemple Candy factory qui se déroule en base 8 et qui met en scène une usine de bonbons dans laquelle les bonbons sont emballés dans des rouleaux (1 rouleau = 8 bonbons) et les rouleaux dans des boîtes (1 boîte = 8 rouleaux)) ?	❍	❍
7. Proposez-vous des activités de manipulation directe, c'est-à-dire sans contexte ?	❍	❍
8. Parmi les activités suivantes, laquelle ou lesquelles proposez-vous aux étudiants ?		
a. Conversion entre les différentes bases Ex : Exprimez 243_{huit} en base 5. Précisez.	❍	❍
b. Opérations sur les nombres entiers à plusieurs chiffres Ex : 243_{huit} + 759_{huit} Précisez.	❍	❍
c. Invention d'algorithmes Ex : Créez et expliquez une stratégie efficace pour multiplier deux nombres entiers en base 8. Précisez.	❍	❍
d. Opérations sur les nombres décimaux Ex : $6{,}1_{\text{huit}}$ +$3{,}2_{\text{ huit}}$ Précisez.	❍	❍
e. Autre		

9. Quelle place accordez-vous à l'utilisation d'un ou des systèmes de numération alternative dans le cadre de votre cours ?
a. Combien d'heures sont-elles accordées à l'utilisation d'un ou des systèmes de numération alternative dans le cadre de votre cours ?
b. De quelle ampleur est la tâche reliée à l'utilisation d'un ou des systèmes de numération alternative dans le cadre de votre cours (quelques exercices, sujet d'un travail noté, etc.) ?
10. Quelles sont vos intentions avec l'utilisation d'un système de numération alternatif ?
11. Selon vous, comment la formation initiale peut-elle aider les futurs enseignants à développer le sens du nombre de leurs élèves ?

Partie 2 : Affirmations

Volet 1 : La situation des futurs enseignants en formation initiale

Voici une série d'affirmations portant sur la situation des futurs enseignants en formation initiale. Pour chacune d'elles, veuillez indiquer votre degré d'accord.

	Totalement en accord	Partiellement en accord	Partiellement en désaccord	Totalement en désaccord
Les futurs enseignants en formation initiale possèdent une compréhension procédurale développée des opérations arithmétiques sur les nombres entiers dans le système décimal.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les futurs enseignants en formation initiale possèdent une compréhension conceptuelle approfondie des nombres entiers.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les futurs enseignants en formation initiale possèdent une compréhension conceptuelle approfondie de la valeur de position.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			

Les futurs enseignants en formation initiale possèdent une compréhension conceptuelle approfondie des opérations arithmétiques.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les futurs enseignants en formation initiale sont en mesure d'expliquer efficacement les règles et les procédures sous-jacentes aux algorithmes arithmétiques.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
La familiarité des futurs enseignants en formation initiale avec le système décimal les empêche de reconceptualiser leur propre compréhension de ce système de numération	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			

Volet 2 : L'utilisation de systèmes de numération alternatifs.

Voici une série d'affirmations portant sur l'utilisation de systèmes de numération alternatifs. Pour chacune d'elles, veuillez indiquer votre degré d'accord.

	Totalement en accord	Partiellement en accord	Partiellement en désaccord	Totalement en désaccord
L'utilisation de systèmes de numération alternatifs permet aux futurs enseignants de reconceptualiser leur compréhension de la valeur de position.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
L'utilisation de systèmes de numération alternatifs permet aux futurs enseignants de reconceptualiser leur compréhension des opérations arithmétiques.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			

Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants de développer leur sens du nombre.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants de s'engager dans la réinvention guidée d'un algorithme.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants d'approfondir leur compréhension du système décimal et de ses valeurs de position en la comparant à d'autres systèmes de numération.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants de vivre une expérience d'apprentissage similaire à celle des élèves du primaire.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants d'approfondir leur compréhension de la structure sous-jacente aux algorithmes arithmétiques.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants de prendre conscience de leurs lacunes en lien avec les nombres entiers, les opérations arithmétiques et la valeur de position dans le système décimal.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			

Les systèmes de numération alternatifs permettent aux futurs enseignants de prendre conscience de leurs propres processus d'apprentissage et ainsi de réfléchir à leurs futurs choix pédagogiques.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			

Volet 3 : La complexité cognitive

Voici une série d'affirmations portant sur la situation des futurs enseignants en formation initiale. Pour chacune d'elles, veuillez indiquer votre degré d'accord.

	Totalement en accord	Partiellement en accord	Partiellement en désaccord	Totalement en désaccord
L'utilisation de plusieurs bases rend davantage habile qu'une seule base (corrélation entre les deux), malgré la complexité cognitive.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
L'utilisation de matériel de manipulation est efficace pour améliorer les conceptions initiales des futurs enseignants en lien avec la valeur de position dans un système de numération.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Proposer des tâches cognitivement complexes aux futurs enseignants leur permet de s'engager davantage.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			
Proposer des tâches cognitivement complexes aux futurs enseignants empêche le développement d'une compréhension.	❍	❍	❍	❍
	Précisez.			

Partie 3 : Questions ouvertes

1. Ball, Hill et Bass (2005) ont développé le concept de connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) pour faire référence aux connaissances spécialisées que les enseignants de mathématiques devraient posséder.
a. Selon vous, quelles sont les connaissances cruciales que les futurs enseignants au primaire doivent posséder pour enseigner efficacement les mathématiques ?
b. Comment la formation initiale peut-elle favoriser l'acquisition de ces connaissances ?
c. Comment ces connaissances peuvent-elles aider les futurs enseignants à développer le sens du nombre de leurs élèves ?
2. Pour quelle raison vous êtes-vous intéressé à l'utilisation des systèmes de numération alternatifs dans la formation initiale des futurs enseignants ?
3. Quel portrait brosseriez-vous des connaissances mathématiques des futurs enseignants en formation initiale ?
4. Quels sont les appuis théoriques sur lesquelles vous appuyez votre choix d'employer les systèmes de numération alternatifs dans la formation universitaire des futurs enseignants en formation initiale au primaire ?
5. Quels sont les objectifs poursuivis par l'utilisation de systèmes de numération alternatifs ?
6. Comment évaluez-vous l'impact de l'utilisation des systèmes de numération alternatifs sur le développement de la compréhension des futurs enseignants en formation initiale ?
7. Comment qualifierez-vous la complexité cognitive des tâches proposées dans le cadre de votre cours en lien avec de l'utilisation des systèmes de numération alternatifs ?
8. Selon vous, y a-t-il un bon alignement entre vos intentions derrière l'utilisation de systèmes de numération alternatifs et ce qui est fait concrètement dans votre salle de classe ?
9. Si vous aviez à modifier des éléments dans votre séquence d'enseignement, quels seraient-ils ?

Annexe III — Document de recrutement de participants

Je me présente, Josiane Dussault, étudiante à la maîtrise en éducation à l'Université TÉLUQ. Mon mémoire s'intitule *L'utilisation des systèmes de numération alternatifs dans la formation des futurs enseignants au primaire et le développement d'une compréhension conceptuelle approfondie du sens du nombre et des algorithmes arithmétiques*.

Cette recherche a pour but de faire la lumière sur la situation québécoise chez les futurs enseignants au primaire en formation initiale 1) sur l'état de leurs connaissances du système de numération décimal et des algorithmes arithmétiques, 2) sur l'impact de l'utilisation de systèmes de numération alternatifs sur le développement de leur compréhension conceptuelle, 3) sur la façon dont les systèmes de numération alternatifs sont employés dans la formation dans les universités québécoises et 4) sur la complexité cognitive des tâches qui leur sont proposées.

Je sollicite donc votre participation à titre de chargé de cours ou professeur d'un cours ou de plusieurs cours qui correspond(ent) à l'objet de ma recherche. Cette participation prendrait la forme d'un entretien individuel semi-dirigé, d'une durée maximale de 60 minutes qui se déroulerait en visioconférence, au moment de votre choix lors de la session d'automne 2024. Si vous être intéressé à participer, veuillez m'en aviser en répondant à courriel (dussault.josiane@univ.teluq.ca) d'ici le 1er novembre 2024.

Je vous remercie à l'avance pour votre précieuse collaboration.

Je demeure disponible pour répondre à vos questions.

Au plaisir,

Josiane Dussault

Annexe IV — Certificat d'éthique

UNIVERSITÉ TÉLUQ

CERTIFICAT D'ÉTHIQUE

2024-90

Le comité d'éthique de la recherche de la TÉLUQ certifie avoir examiné la proposition de recherche soumise par :

Josiane Dussault

Intitulée

« L'utilisation des systèmes de numération alternatifs dans la formation des futurs enseignants au primaire et le développement d'une compréhension conceptuelle approfondie du sens du nombre et des algorithmes arithmétiques »

Et avoir conclu que la recherche proposée est entièrement conforme aux normes d'éthique de la recherche selon la *Politique d'éthique de la recherche avec les êtres humains.*

Valide jusqu'au 12 septembre 2025

Date : 12 septembre 2024

François Pichette
Président