Association
mathématique
du Québec

Article

Qu'y a-t-il entre $+$ et $\times$ et au-delà de $\frown$?

Tsz « Tony » Hong Ip
School of mathematical sciences University of Nottingham

Frédéric Morneau-Guérin
Département Éducation TÉLUQ

Résumé

Les hyperopérations constituent une suite infinie d'opérations qui prolonge, d'une certaine façon, la courte suite des opérations arithmétiques élementaires que forment (0) la fonction récursive primitive *successeur* ; (1) l'addition ; (2) la multiplication ; et (3) l'exponentiation. Nous nous intéresserons à la définition des hyperopérations ainsi qu'à leurs propriétés. Nous nous pencherons ensuite sur divers prolongements dans une perspective historique et mathématique.

Mots clés : Hyperopérations, fonctions récursives, tétration, moyennes de Hölder–Minkowski

Classification mathématique par matières (MSC2020) : 03D20, 11A25, 97E99, 97F99, 26E60

1 Introduction

Cet article se déploie en deux temps. Tout d'abord, nous rappellerons comment les travaux de Giuseppe Peano, s'inscrivant dans l'approche formaliste des mathématiques et visant à asseoir l'arithmétique sur une base solide et rigoureuse, ont mené certains des disciples de David Hilbert, comme Wilhelm Ackermann, Gabriel Sudan et Rózsa Péter, à porter leur intérêt sur une fonction récursive à trois arguments qui reproduit les opérations de base de l'arithmétique élémentaire que sont $+$ (l'addition), $\times$ (la multiplication) et $\frown$ (l'exponentiation) et qui pave la voie vers la prolongation de cette courte liste des opérations arithmétiques élémentaires en une suite infinie d'opérations, appelées *hyperopérations*, exploitant la même règle récursive. Ce survol mathématico-historique vise à répondre à la question *qu'y a-t-il au-delà de* $\frown$ *?*

Dans un deuxième temps, nous adapterons une idée développée au cours des dernières années par deux équipes de mathématiciens s'intéressant à la logique et à la calculabilité afin de définir un continuum d'hyperopérations interpolant entre $+$ (l'hyperopération d'ordre 1) et $\times$ (l'hyperopération d'ordre 2) tout en conservant autant de propriétés communes à ces deux opérations que possible. Ce faisant, nous proposons une solution originale, inédite et cohérente (faute d'être unique) à la question *qu'y a-t-il entre* $+$ *et* $\times$ *?*

2 Qu'est-ce que $+$, $\times$ et $\frown$ et qu'y a-t-il au-delà de $\frown$?

2.1 Le fondationnalisme

Au cours des dernières décennies du XIX^e siècle, la tendance à la rigueur en mathématiques – amorcée par des géants intellectuels comme Augustin Louis Cauchy, Carl Friedrich Gauss, Joseph-Louis Lagrange, Bernhard Riemann, Pierre-Simon de Laplace, William Rowan Hamilton, Karl Weierstrass, Bernard Bolzano et Richard Dedekind – conduisit à un effort concerté de la part des mathématiciens et des philosophes pour parvenir à une formalisation des principaux développements récents ainsi que des branches plus anciennes des mathématiques et, en outre, pour parvenir à établir une base fondamentale pour l'ensemble de l'édifice mathématique.

L'Allemand Gottlob Frege (1848–1925) et l'Italien Giuseppe Peano (1858–1932) furent les acteurs principaux de cet effort concerté. Frege s'intéressa principalement à l'analyse de la pensée et développa le calcul des prédicats en premier lieu dans l'espoir de dériver l'arithmétique de la logique pure. Peano, davantage porté sur les applications mathématiques, créa quant à lui un symbolisme élégant et flexible permettant d'exprimer les théorèmes les plus complexes de manière précise et concise à l'aide de formules relativement simples.

Au tournant du siècle, leurs projets encore loin d'être achevés, les deux pionniers furent rejoints par une nouvelle génération de penseurs qui s'attelèrent à leur tour à la tâche d'établir les mathématiques sur une base solide et ainsi à étayer la thèse de leur indubitabilité. Les Britanniques Bertrand Russell (1872–1970) et Alfred North Whitehead (1861–1947), les Allemands David Hilbert (1862–1943) et Ernst Zermelo (1871–1953) et le Néerlandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1965) furent les figures tutélaires de cette deuxième vague.

Ayant trouvé un second souffle, cette quête prit alors différentes formes et donna naissance à des écoles de pensée [1] rivales. Le dernier chapitre de cette histoire est bien connu : la quête fondationnaliste atteignit un point culminant avec les théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel qui en consacrèrent l'échec.

1. Les principales sont le *logicisme*, le *formalisme* et l'*intuitionnisme*, mais on compte aussi, pour n'en nommer que quelques-unes, le *conventionalisme*, le *finitisme*, le *structuralisme*, l'*empirisme* et le *constructivisme*.

2.2 Détour philosophique

Les mathématiciens tendent à se représenter comme des explorateurs découvrant les propriétés de divers pans fascinants de la réalité mathématique. L'expérience même de la pratique des mathématiques est ressentie par beaucoup comme étayant cette position [23]. Une telle attitude philosophique, qui soutien l'existence d'une réalité (mathématique dans le cas qui nous concerne ici) extérieure à nous-même et indépendante de notre esprit, est appelée *réalisme*.

Pour le dire autrement, le réalisme est le point de vue selon lequel les mathématiques sont l'étude des objets abstraits ou formels, de la même façon que la physique est l'étude des objets matériels. Ce serait, donc, la façon dont ces objets respectifs se présentent et agissent les uns sur les autres qui ferait que les énoncés mathématiques ou physiques sont vrais ou faux.

Bien que la position réaliste puisse sembler aller de soi à première vue, d'épineuses questions surgissent hélas lorsqu'on approfondit la réflexion.

Notre connaissance du monde physique, consacrée par les sciences, s'ancre dans la perception sensorielle. Mais les mathématiciens n'observent pas (et ne peuvent pas observer) leurs objets abstraits dans ce sens. Comment, dès lors, pouvons-nous connaître les mathématiques ? Comment pouvons-nous prétendre connaître des choses si irrévocablement éloignées de notre perception sensorielle qu'un espace topologique séparable ou un groupe de Galois d'une extension de corps ? De quel droit pouvons-nous parler de *faits* mathématiques ? D'où nous vient l'impression que la connaissance mathématique est objective, vraie, indubitable ? Quel est le sens du mot *abstrait* ? Si les objets abstraits ne sont ni mentaux, ni physiques, ni historiques, ni sociaux, ni intersubjectifs, que sont-ils ? Où sont-ils ? Si les faits mathématiques sont des faits, alors ils doivent être des faits à propos de quelque chose ! Mais quoi exactement ?

Plusieurs mathématiciens, lorsque confrontés à de telles questions ontologiques (que sont les objects mathématiques ?) et épistémologiques (comment pouvons-nous les connaître ?), réagissent en abandonnant prestement l'attitude réaliste, en niant que les énoncés mathématiques portent sur quoi que ce soit, voire même en niant qu'ils soient vrais [23, p. 2].

Au fond d'eux-mêmes, ils continuent à croire à la réalité des mathématiques, bien sûr, et à être habités du sentiment qu'ils travaillent sur quelque chose de non seulement réel mais surtout d'*objectif*. Ils continuent à croire qu'ils découvrent des faits qui sont là – au dehors – à découvrir et sur lesquels ils ne légifèrent pas ; des faits qui sont immunisés contre la collusion, l'influence politique ou la pression sociale [22]. Ils continuent à croire qu'ils trouvent des réponses qu'ils ne choisissent pas. Mais lorsque les philosophes inquisiteurs les harcèlent avec leurs questions dérangeantes et leur balancent des paradoxes au visage, ils s'empressent de se réfugier derrière un bouclier formaliste et de prétendre que les mathématiques ne sont qu'une combinaison de symboles dépourvus de sens [23]. Certes, la position formaliste se heurte elle-même à des difficultés philosophiques, mais nous ne les aborderons pas ici faute d'espace.

Cette duplicité fit dire au mathématicien Reuben Hersh que le mathématicien type est réaliste en semaine et formaliste la fin de semaine. En semaine, lorsqu'il fait des mathématiques, il est réaliste car il est convaincu qu'il a affaire à une réalité objective dont il essaie de déterminer les propriétés. La fin de semaine venue, s'il doit rendre compte sur le plan philosophique de cette réalité, il joue les formalistes et prétend que les mathématiques ne sont qu'un jeu dénué de sens, qu'une manipulation de taches d'encre, qu'une syntaxe qui n'est doublée d'aucune sémantique [15].

2.3 Le cas particulier de l'arithmétique

Supposons un instant que l'on accepte l'idée que les mathématiques ne sont pas littéralement une science parce que leurs résultats ne peuvent être falsifiés par des faits ou des expériences [17]. Supposons en outre que l'on admette que les mathématiques sont un jeu purement formel obéissant à des règles qui ne sont que des conventions arbitraires.

Comment se fait-il alors que nous ayons tous – que l'on soit mathématicien ou non, que l'on soit lettré ou analphabète, que l'on soit érudit ou inculte – certaines connaissances arithmétiques élémentaires ?

Le cas de l'arithmétique montre l'inadéquation (ou du moins l'incomplétude) de l'attitude formaliste radicale.

L'arithmétique semble concrétiser des idées intuitives vives et percutantes. Se pourrait-il que certains faits arithmétiques (comme le fait que certains nombres – toujours les mêmes et suivant une régularité rigide – peuvent être divisés en deux groupes d'égale taille et ce sans reste ou encore le fait que 11 ne peut être divisé en deux groupements d'égales tailles) semblent indépendants de notre vie mentale ?

Se pourrait-il que l'arithmétique soit, dans une certaine mesure, davantage fondée sur l'expérience que le reste des mathématiques ? Plus précisément, se pourrait-il que la connaissance arithmétique soit épistémiquement indépendante des preuves empiriques, tout en n'étant pas entièrement indépendante de l'expérience sensible ? Autrement dit, est-il possible, pour tenter une ultime reformulation, que nos croyances arithmétiques reçoivent un certain appui de l'expérience, sans que celle-ci constitue pour autant une preuve au sens strict ?

On ne saurait trancher d'aussi profondes questions dans un aussi court article, cela va de soi. Au fil de notre étude, nous allons aborder les fondements de l'arithmétique dans une perspective qui semblera formaliste au premier abord mais qui laissera distinctement filtrer une touche réaliste, certes ténue, mais essentielle.

2.4 Retour à Peano

Chez Giuseppe Peano, la quête de rigueur mathématique s'amorça alors qu'il enseignait à l'université de Turin. Courroucé de remarquer des graves erreurs dans les manuels contemporains, il se mit à la recherche d'une méthode permettant à la fois de trouver et corriger les erreurs et aussi d'éviter d'en commettre. Estimant que les erreurs pouvaient être évitées si l'on accroissait le niveau de rigueur, convaincu qu'une présentation « hygiénique » des mathématiques en faciliterait le développement, il se mit à étudier les fondements logiques des mathématiques dans l'espoir de parvenir à une présentation rigoureuse et cohérente [35].

La contribution la plus importante de Peano au programme visant à installer les mathématiques (mais, dans son cas, plus précisément la théorie des nombres et encore plus précisément l'arithmétique) sur une base axiomatique eut lieu en 1889, lorsqu'il fit paraître en latin [2] son ouvrage intitulé *Arithmetices principia, nova methodo exposita* [28] contenant la première version de son désormais célèbre jeu d'axiomes pour l'arithmétique.

L'oeuvre de Peano est souvent présentée comme s'inscrivant en cohérence avec l'attitude vis-à-vis des mathématiques selon laquelle celles-ci sont une extension de la logique et postulant donc que tous les concepts et toutes les théories mathématiques sont réductibles à la logique. Mais l'impression voulant que le travail de Peano soit directement aligné sur le programme logiciste poursuivi plus tard par Bertrand Russell et Alfred North Whitehead est erronée. Le mathématicien italien ne fut que marginalement lié à l'école logiciste [3] et, bien qu'il l'ait certainement influencée, il n'avait nullement l'intention de contribuer à réduire les mathématiques à la logique. De fait, il estimait même que les objets mathématiques de base, tels que “0”, “nombre” et “successeur”, ne pouvaient pas être définis [35].

2.5 Fragments d'arithmétique de Peano

Notre propos, dans le présent article, ne requiert pas que nous présentions dans les moindres détails tous les axiomes de Peano, pas plus qu'il n'impose que nous en discutions informellement. Il nous suffira de noter que le langage de base dans lequel est formulée l'axiomatisation de l'arithmétique avancée par Peano contient une fonction récursive primitive – la fonction *successeur* – dont le rôle fondamental est de permettre l'introduction des nombres naturels [4].

Cette fonction, notée S, est définie récursivement comme suit :

$$\begin{aligned} S(0) &\coloneqq 1, \\ S(1) &\coloneqq 2, \\ S(2) &\coloneqq 3, \\ S(3) &\coloneqq 4, \\ S(4) &\coloneqq 5, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

2. Possiblement parce qu'il lui reconnaissait une importance universelle.

3. Peano fit la rencontre de Bertrand Russell lors du Congrès mondial de philosophie à Paris en 1900. La présentation de ses travaux sur l'axiomatisation de l'arithmétique produisit chez le philosophe gallois une vive impression et initia chez lui une prise de conscience de l'importance d'une notation logique rigoureuse pour formaliser les mathématiques. Cela le poussa à abandonner l'idéalisme philosophique pour adopter une approche plus analytique.

4. À noter que dans le présent contexte, les *nombres naturels* incluent 0.

2.6 La fonction d'Ackermann

À la fin des années 1920, le mathématicien allemand Wilhelm Ackermann (1896–1962), un disciple de David Hilbert, étudiait les fondements de la théorie de la calculabilité lorsqu'il mit le doigt sur une fonction de trois arguments entiers non négatifs comprenant en elle-même la fonction successeur ainsi que les trois opérations arithmétiques de base que sont l'addition, la multiplication et l'exponentiation [1].

Après la publication par Ackermann des travaux sur la fonction qui porte aujourd'hui son nom, de nombreux auteurs [5] en modifièrent la forme ou la notation en vue de l'adapter à différents objectifs [11, 29, 30], de sorte qu'aujourd'hui le terme *fonction d'Ackermann* peut désigner n'importe laquelle des nombreuses variantes de la fonction originale.

Nous allons maintenant présenter un cas particulier de la fonction d'Ackermann dans la formulation privilégiée par Goodstein.

Hyperopérations de rang $n = 0, 1, 2, 3$.
Étant donné $n = 0, 1, 2, 3$ et $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_0(a,b) \coloneqq S(b)$$

et

$$H_n(a,0) \coloneqq \begin{cases} a, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n = 2, \\ 1, & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

De plus, pour $n = 0, 1, 2$, on définit récursivement

$$H_{S(n)}\big(a,S(b)\big) \coloneqq H_n\big(a, H_{S(n)}(a,b)\big).$$

$\perp$

Afin de décrypter cette définition plutôt opaque, penchons-nous séparément sur chacune des quatre premières valeurs de n.

Hyperopération de rang 0.
Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, la fonction $H_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie comme suit :

$$H_0(a,b) \coloneqq S(b).$$

$\perp$

5. Parmi ceux-ci on retrouve la mathématicienne hongroise Rózsa Péter (1905-1977), le mathématicien américain Raphael M. Robinson (1911-1995) et le logicien britannique Reuben L. Goodstein (1912–1985).

À titre d'exemple,

$$\begin{aligned}
H_0(2,0) &\coloneqq S(0) \;=\; 1,\\
H_0(2,1) &\coloneqq S(1) \;=\; 2,\\
H_0(2,2) &\coloneqq S(2) \;=\; 3,\\
H_0(2,3) &\coloneqq S(3) \;=\; 4,\\
H_0(2,4) &\coloneqq S(4) \;=\; 5,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Premier constat (et non le moindre) : le premier argument ne joue aucun rôle. On obtiendrait exactement les mêmes résultats si un autre nombre naturel se substituait à 2 pour le premier argument. Autre constat : la fonction H_0 – qui est parfois appelée *zération* [31, 32, 33] – coïncide avec la fonction *successeur* appliqué au deuxième argument car $(a,b) \mapsto S(b)$.

On serait en droit de se demander à quoi bon transformer la fonction unaire appelée *successeur* en une opération binaire si ce n'est que pour négliger complètement le premier argument ? La raison est fort simple : cela nous permet de rendre certains liens (à venir) plus évidents et de procéder plus facilement à des regroupements et des généralisations.

Hyperopération de rang 1.
Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, la fonction $H_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie récursivement comme suit :

$$\begin{cases}
H_1(a,0) & \coloneqq \; a,\\
H_1\big(a,S(b)\big) & \coloneqq \; H_0\Big(a, H_1(a,b)\Big).
\end{cases}$$

$\perp$

À titre d'exemple,

$$\begin{aligned}
&H_1(2,0) \coloneqq 2 \text{ par définition explicite directe,}\\
&H_1(2,1) \coloneqq H_0\Big(2, H_1(2,0)\Big) \;=\; H_0(2,2) \;=\; S(2) \;=\; 3,\\
&H_1(2,2) \coloneqq H_0\Big(2, H_1(2,1)\Big) \;=\; H_0(2,3) \;=\; S(3) \;=\; 4,\\
&H_1(2,3) \coloneqq H_0\Big(2, H_1(2,2)\Big) \;=\; H_0(2,4) \;=\; S(4) \;=\; 5,\\
&H_1(2,4) \coloneqq H_0\Big(2, H_1(2,3)\Big) \;=\; H_0(2,5) \;=\; S(5) \;=\; 6,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que la fonction H_1 coïncide, pour chacun de ces exemples, avec notre idée intuitive d'addition car $(a,b) \mapsto a + b$.

Hyperopération de rang 2.
Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, la fonction $H_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie récursivement comme suit :

$$\begin{cases}
H_2(a,0) & \coloneqq \; 0,\\
H_2\big(a,S(b)\big) & \coloneqq \; H_1\Big(a, H_2(a,b)\Big).
\end{cases}$$

$\perp$

À titre d'exemple,

$$\begin{aligned}
&H_2(2{,}0) \coloneqq 0 \text{ par définition explicite directe,}\\
&H_2(2{,}1) \coloneqq H_1\Big(2, H_2(2{,}0)\Big) \;=\; H_1(2{,}0) \;=\; 2,\\
&H_2(2{,}2) \coloneqq H_1\Big(2, H_2(2{,}1)\Big) \;=\; H_1(2{,}2) \;=\; 4,\\
&H_2(2{,}3) \coloneqq H_1\Big(2, H_2(2{,}2)\Big) \;=\; H_1(2{,}4) \;=\; 6,\\
&H_2(2{,}4) \coloneqq H_1\Big(2, H_2(2{,}3)\Big) \;=\; H_1(2{,}6) \;=\; 8,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que la fonction H_2 coïncide bel et bien, pour chacun de ces exemples, avec notre idée intuitive de multiplication car $(a{,}b) \mapsto a \times b$.

Hyperopération de rang 3.
Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, la fonction $H_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie récursivement comme suit :

$$\begin{cases} H_3(a{,}0) & \coloneqq \; 1,\\ H_3\big(a{,}S(b)\big) & \coloneqq \; H_2\Big(a, H_3(a{,}b)\Big). \end{cases}$$

$\perp$

À titre d'exemple,

$$\begin{aligned}
&H_3(2{,}0) \coloneqq 1 \text{ par définition explicite directe,}\\
&H_3(2{,}1) \coloneqq H_2\Big(2, H_3(2{,}0)\Big) \;=\; H_2(2{,}1) \;=\; 2,\\
&H_3(2{,}2) \coloneqq H_2\Big(2, H_3(2{,}1)\Big) \;=\; H_2(2{,}2) \;=\; 4,\\
&H_3(2{,}3) \coloneqq H_2\Big(2, H_3(2{,}2)\Big) \;=\; H_2(2{,}4) \;=\; 8,\\
&H_3(2{,}4) \coloneqq H_2\Big(2, H_3(2{,}3)\Big) \;=\; H_2(2{,}8) \;=\; 16,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit distinctement que la fonction H_3 coïncide bel et bien, pour chacun de ces exemples, avec notre idée intuitive d'exponentiation car $(a{,}b) \mapsto a^b$.

En somme, à la suite d'Ackermann, mais surtout de Goodstein, nous avons explicité des opérations de rang 0, 1, 2 et 3 qui recoupent la fonction successeur, l'addition, la multiplication et l'exponentiation. On est en droit de se demander ce qu'on gagne à employer une notation aussi lourde si ce n'est que pour aboutir avec des opérations avec lesquelles nous sommes familiers depuis l'école primaire.

La seule réponse que nous avons à offrir à ce stade tient en quelques mots : la science s'appuie principalement sur les mathématiques qui ont été construites sur les trois opérations fondamentales usuelles que sont l'addition, la multiplication et l'exponentiation. Nous y sommes extrêmement habitués. Cette accoutumance peut parfois rendre difficile l'étude de problèmes qui concernent la nature de ces opérations traditionnelles. Le recours à une notation peu familière est susceptible de permettre un plus grand détachement et, donc, de nous offrir une meilleure perspective pour apprécier les opérations arithmétiques usuelles sous un nouvel éclairage.

C'est un peu court, direz-vous, mais cette raison devra suffire pour l'instant car, s'il faut en croire le proverbe anglais *the proof of the pudding is in the eating*, aucune raison désincarnée et abstraite ne saurait supplanter une raison pratique se manifestant dans l'action.

2.7 Propriétés des opérations arithmétiques élémentaires

Nous allons maintenant prendre le temps de démontrer quelques propriétés des opérations arithmétiques élémentaires. N'y voyons pas l'expression d'un pédantisme abstrus ou d'une affectation de profondeur qui rend pesants et artificiels une successtion de lapalissades. L'objectif ici est mettre en lumière (1) le type d'argument dont il faut faire emploi dans le contexte qui est le nôtre ; (2) l'ordre naturel d'enchainement des démonstrations qui s'impose de lui-même ; (3) l'utilité du recours à la notation développée précédemment en vue de prendre suffisamment de recul par rapport aux opérations usuelles, et ce, afin de pouvoir procéder aux démonstrations des propriétés sans les anticiper ni en faire des utilisations implicites, et ainsi éviter toute circularité.

Les propriétés des opérations arithmétiques élémentaires sont trop nombreuses pour que nous les démontrions toutes [6]. De toute façon, l'atteinte de l'objectif que nous nous sommes fixé dans cette section ne requiert pas de s'appesantir à ce point.

Nous débuterons notre survol par un constat : il découle directement de la définition de H_1 que 0 est un élément neutre à droite pour cette opération. En effet, il est inscrit dans la définition de H_1 que

$$H_1(a,0) \ = \ a$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$. Il s'agit là de l'initialisation en quelque sorte de la définition récursive de H_1. En revanche, il nous faudra travailler plus fort afin de démontrer que 0 est aussi un élément neutre à gauche pour H_1. En effet, la commutativité de l'addition n'ayant à ce stade-ci pas encore été démontrée, on ne peut en faire usage. Voici donc la preuve rigoureuse de cette évidence quasi-empirique [7].

6. On en compte au moins 14 : la présence d'un élément neutre bilatère pour l'addition, l'associativité de l'addition, la commutativité de l'addition, la présence d'un élément neutre bilatère pour la multiplication, la présence d'un élément absorbant bilatère pour la multiplication, la commutativité de la multiplication, l'associativité de la multiplication, la distributivité à gauche de la multiplication sur l'addition, la distributivité à droite de la multiplication sur l'addition, la présence d'un élément neutre à droite (mais pas à gauche) pour l'exponentiation, la présence d'un élément absorbant à gauche (mais pas à droite) pour l'exponentiation, la règle du produit de puissances de même base, la distributivité à droite de l'exponentiation sur la multiplication (aussi appelée la règle de la puissance d'un produit), et la règle de puissance d'une puissance.

7. On conviendra que pour de petits nombres une vérification empirique (avec des billes ou des cailloux par exemple) est possible. Pour les nombres très grands, on peut se rabattre sur des expériences de pensée et sur une sorte de principe d'induction (au sens philosophique et non mathématique).

Présence d'un élément neutre à gauche pour H_1. Pour tout $b \in \mathbb{N}$ on a

$$H_1(0,b) \ = \ b.$$

Démonstration.

Nous procéderons par induction sur b. Étant donné $b \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(b)$ la proposition suivante :

$$H_1(0,b) \ = \ b.$$

— Initialisation : Notons que

$$H_1(0,0) \ = \ 0 \qquad \text{par la partie initialisante de la définition de } H_1.$$

La proposition $\mathcal{P}(0)$ s'en trouve donc trivialement vérifiée.

— Hérédité : Supposons que, pour un certain b fixé, la proposition $\mathcal{P}(b)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
& H_1\big(0, S(b)\big) \\
= \ & H_0\big(0,H_1(0,b)\big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\
= \ & H_0\big(0,b\big), && \text{par hypothèse d'induction} \\
= \ & S(b) && \text{par définition de } H_0.
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse mentionnée ci-dessus, la proposition $\mathcal{P}\big(S(b)\big)$ est vérifiée.

Ayant montré la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ d'une part et l'implication $\mathcal{P}(b) \implies \mathcal{P}\big(S(b)\big)$ d'autre part, il découle du principe d'induction mathématique, comme voulu, que la proposition $\mathcal{P}(b)$ est vraie quel que soit $b \in \mathbb{N}$. ■

Avant d'aborder la propriété suivante, il est utile d'expliciter une caractéristique élémentaire mais structurante de l'opération H_0. En effet, contrairement aux opérations de rang supérieur, H_0 ne dépend que de son second argument. Cette observation, immédiate à partir de la définition, jouera un rôle technique dans les manipulations à venir et justifie le lemme suivant.

Lemme d'indépendance du premier argument pour H_0. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$, on a

$$H_0(a,b) = H_0(c,b).$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}
& H_0(a,b) \\
= \ & S(b), && \text{par définition de } H_0 \\
= \ & H_0(c,b). && \text{par définition de } H_0
\end{aligned}$$

■

La prochaine propriété dont nous ferons la démonstration en est une largement méconnue (puisque assez peu utile en pratique). Elle n'a d'intérêt qu'en ce qu'elle est, sur le plan de la forme, en tout point analogue à la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition mais pour les opérations de rangs inférieurs.

Distributivité à gauche de H_1 par rapport à H_0. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a

$$H_1\big(a,H_0(b,c)\big) \ = \ H_0\big(H_1(a,b), H_1(a,c)\big).$$

Notons que cette identité n'est rien d'autre que la reformulation, dans le langage des hyperopérations, de l'égalité élémentaire

$$a + S(c) \ = \ S(a + c),$$

qui exprime la compatibilité de l'addition avec l'opération de successeur.

Démonstration. Notons que

$$\begin{array}{rll} & H_1\big(a,H_0(b,c)\big) & \\ = & H_1\big(a,S(c)\big), & \text{par définition de } H_0 \\ = & H_0\big(a,H_1(a,c)\big), & \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\ = & H_0\big(H_1(a,b), H_1(a,c)\big), & \text{par le lemme d'indépendance.} \end{array}$$

■

La prochaine proposition corrobore une observation que nous avions déjà faite plus haut lorsque nous avons abordé la présence d'un élément neutre pour l'addition : en l'absence de la commutativité, la démonstration de telle ou telle propriété à gauche peut se révèler très différente de la démonstration d'une propriété analogue à droite.

Distributivité à droite de H_1 par rapport à H_0. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a

$$H_1\big(H_0(a,b),c\big) \ = \ H_0\big(H_1(a,c), H_1(b,c)\big).$$

Notons que cette identité correspond, en termes usuels, à l'égalité

$$S(a + b) + c \ = \ S(a + b + c),$$

ce qui revient à exprimer que prendre le successeur puis additionner c est équivalent à additionner c puis prendre le successeur.

Démonstration. Nous procéderons par induction sur c. Étant donné $c \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(c)$ la proposition suivante :

$$\forall a,b \in \mathbb{N} : \quad H_1\big(H_0(a,b),c\big) \ = \ H_0\big(H_1(a,c), H_1(b,c)\big).$$

— Initialisation : Étant donné $a,b \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{array}{rll} & H_1\big(H_0(a,b),0\big) & \\ = & H_0(a,b), & \text{par la partie initialisante de la définition de } H_1 \\ = & H_0\big(H_1(a,0), H_1(b,0)\big), & \text{par la partie initialisante de la définition de } H_1. \end{array}$$

Ainsi, la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ est établie ;

— Hérédité : Supposons que, pour un certain $c \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(c)$ soit vraie. Alors

$$
\begin{aligned}
& H_1\big(H_0(a,b),S(c)\big) \\
= \quad & H_0\Big(H_0(a,b), H_1\big(H_0(a,b),c\big)\Big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_0\Big(H_0(a,b), H_0\big(H_1(a,c), H_1(b,c)\big)\Big), && \text{par hypothèse d'induction} \\
= \quad & H_0\Big(H_0(a,b), H_0\big(b, H_1(b,c)\big)\Big), && \text{par le lemme d'indépendance} \\
= \quad & H_0\Big(H_0(a,b), H_1\big(b, S(c)\big)\Big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_0\Big(H_1\big(a,S(c)\big), H_1\big(b,S(c)\big)\Big) && \text{par le lemme d'indépendance.}
\end{aligned}
$$

Ainsi, sous l'hypothèse mentionnée ci-dessus, la proposition $\mathcal{P}\big(S(c)\big)$ est vérifiée.

Ayant montré la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ d'une part et l'implication $\mathcal{P}(c) \implies \mathcal{P}\big(S(c)\big)$ d'autre part, il découle du principe d'induction mathématique, comme voulu, que la proposition $\mathcal{P}(c)$ est vraie quel que soit $c \in \mathbb{N}$. ■

Poursuivons avec une démonstration relativement simple d'une propriété bien connue.

Associativité de H_1. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$ on a

$$H_1\big(a,H_1(b,c)\big) \; = \; H_1\big(H_1(a,b),c\big).$$

Démonstration. Nous procéderons par induction sur c. Étant donné $c \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(c)$ la proposition suivante :

$$\forall a,b \in \mathbb{N} : \quad H_1\big(a,H_1(b,c)\big) \; = \; H_1\big(H_1(a,b),c\big).$$

— Initialisation : Étant donné $a,b \in \mathbb{N}$ on a :

$$
\begin{aligned}
& H_1\big(a, H_1(b,0)\big) \\
= \quad & H_1(a,b), && \text{par la partie initialisante de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_1\big(H_1(a,b),0\big), && \text{par la partie initialisante de la définition de } H_1.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ est établie ;

— Hérédité : Supposons que, pour un certain $c \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(c)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
& H_1\Big(a, H_1\big(b, S(c)\big)\Big) \\
= \quad & H_1\Big(a, H_0\big(b, H_1(b,c)\big)\Big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_1\Big(a, S\big(H_1(b,c)\big)\Big), && \text{par définition de } H_0 \\
= \quad & H_0\Big(a, H_1\big(a, H_1(b,c)\big)\Big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_0\Big(a, H_1\big(H_1(a,b),c\big)\Big), && \text{par hypothèse d'induction} \\
= \quad & H_0\Big(H_1(a,b), H_1\big(H_1(a,b),c\big)\Big), && \text{par le lemme d'indépendance} \\
= \quad & H_1\big(H_1(a,b), S(c)\big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse mentionnée ci-dessus, la proposition $\mathcal{P}\big(S(c)\big)$ est vérifiée.

Ayant montré la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ d'une part et l'implication $\mathcal{P}(c) \implies \mathcal{P}\big(S(c)\big)$ d'autre part, il découle du principe d'induction mathématique, comme voulu, que la proposition $\mathcal{P}(c)$ est vraie quel que soit $c \in \mathbb{N}$. ■

La prochaine propriété, qui sera la dernière que nous démontrerons, était attendue de pied ferme. Si nous l'avons ainsi gardée pour la fin, ce n'était pas pour manifester un esprit de contradiction, mais plutôt parce que la preuve fait inévitablement appel à certaines des propriétés démontrées précédemment.

Commutativité de H_1. Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ on a

$$H_1(a,b) \;=\; H_1(b,a).$$

Démonstration. Nous procéderons par induction sur b. Étant donné $b \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(b)$ la proposition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \;\; H_1(a,b) \;=\; H_1(b,a).$$

— Initialisation : Étant donné $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
& H_1(a,0) \\
= \quad & a, && \text{par la partie initialisante de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_1(0,a), && \text{par le fait que 0 est un élément neutre à gauche pour } H_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ est établie ;

— Hérédité : Supposons que, pour un certain b fixé, la proposition $\mathcal{P}(b)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
& H_1\big(a, S(b)\big) \\
= \quad & H_0\big(a, H_1(a,b)\big), && \text{par la partie récursive de la définition de } H_1 \\
= \quad & H_0\big(a, H_1(b,a)\big), && \text{par hypothèse d'induction} \\
= \quad & H_0\Big(H_1(b,a), H_1(b,a)\Big), && \text{par le lemme d'indépendance} \\
= \quad & H_1\big(H_0(b,b), a\big), && \text{par distributivité à droite de } H_1 \text{ par rapport à } H_0 \\
= \quad & H_1\big(S(b),a\big), && \text{par définition de } H_0.
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse mentionnée ci-dessus, la proposition $\mathcal{P}\big(S(b)\big)$ est vérifiée.

Ayant montré la véracité de la proposition $\mathcal{P}(0)$ d'une part et l'implication $\mathcal{P}(b) \implies \mathcal{P}\big(S(b)\big)$ d'autre part, il découle du principe d'induction mathématique, comme voulu, que la proposition $\mathcal{P}(b)$ est vraie quel que soit $b \in \mathbb{N}$. ■

2.8 Nous y voilà enfin... qu'y a-t-il, donc, au-delà de ^ ?

Le temps est venu d'effectuer un bref rappel de faits élémentaires en vue d'en tirer certains constats qui nous aideront à pousser plus loin notre étude. Étant donné des entiers strictement positifs a et b, on a

$$\begin{aligned}
a + b \;&=\; a \underbrace{+1 + \cdots + 1}_{b \text{ fois}}. \\
a \times b \;&=\; \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}. \\
a^b \;&=\; \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fois}}.
\end{aligned}$$

C'est donc dire, comme nous le savons, que l'addition est une prise de successeur itérée ; que la multiplication est une addition itérée ; et que l'exponentiation est une multiplication itérée. Dans tous les cas, la première opérande est en quelque sorte la base alors que la seconde opérande prescrit le nombre d'itérations à effectuer.

Le mathématicien américain Albert A. Bennett, qui obtint sa thèse sous la direction du grand topologiste et géomètre américain Oswald Veblen, semble avoir été le premier – dès 1914 [2] – à avoir discuté à l'écrit de la poursuite du processus consistant à former de nouvelles opérations mathématiques en itérant la précédente.

Franchir le tout premier pas vers la réalisation de ce programme se fait sans grande difficulté :

$$^{b}a \;=\; \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{b \text{ fois}}.$$

À titre d'exemple,

$$\begin{aligned}
{}^0a &:= 1,\\
{}^1a &:= a^1,\\
{}^2a &:= a^a,\\
{}^3a &:= a^{(a^a)},\\
{}^4a &:= a^{(a^{(a^a)})},\\
{}^5a &:= a^{(a^{(a^{(a^a)})})},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Si l'on veut définir une opération itérant celle décrite ci-dessus, le support notationnel vient cependant à manquer cruellement [8]. Plus grave encore, on perd assez rapidement l'intuition puisque l'on ne peut plus s'appuyer, pour aborder l'opération que l'on cherche à appréhender par l'esprit, sur un échafaudage solide (à savoir une opération de rang inférieur qui est bien connue et intuitive).

La meilleure solution consiste à s'éloigner de la notation courante et à employer la notation abstraite, formelle et, avouons-le, plutôt lourde – mais uniforme – que nous avons longuement et méticuleusement présentée précédemment avec en tête précisément notre besoin actuel. Suivant cette notation, l'opération arithmétique de rang 4, qui fait suite à l'exponentiation, est définie ainsi :

Hyperopération de rang 4.
Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{cases} H_4(a,0) & := \; 1, \\ H_4\big(a,S(b)\big) & := \; H_3\Big(a, H_4(a,b)\Big). \end{cases}$$

$\perp$

Qu'y a-t-il, donc, au-delà de l'exponentiation ? Une exponentiation itérée pour laquelle Goodstein a forgé un nom : la *tétration*, un mot-valise formé du préfixe *tétra-* (quatre) et du mot *itération*.

8. Il convient toutefois de noter qu'une notation alternative, aujourd'hui largement répandue, permet de pallier en partie ces difficultés. Introduite par Donald E. Knuth dans les années 1970, la *notation par flèches ascendantes* (*up-arrow notation*) offre un formalisme compact et systématique pour décrire ces opérations d'itération successive [19]. Dans cette notation, on pose :

$$a \uparrow b = a^b, \qquad a \uparrow\uparrow b = {}^b a,$$

où $a \uparrow\uparrow b$ désigne une tour d'exponentiations de hauteur b (tétration). Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, l'expression

$$a \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{k \text{ flèches}} b$$

définit l'opération d'ordre $k+2$ dans la hiérarchie des hyperopérations.

Ainsi, bien que cette notation ne restitue pas nécessairement l'intuition des premières opérations arithmétiques, elle fournit un cadre uniforme et opérationnel pour manipuler ces objets, là où la notation usuelle devient rapidement impraticable.

L'opération arithmétique suivante, parfois appelée *pentation*, va comme suit :

Hyperopération de rang 5.
Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_5 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme suit :

$$\begin{cases} H_5(a,0) & \coloneqq \ 1, \\ H_5\big(a,S(b)\big) & \coloneqq \ H_4\Big(a, H_5(a,b)\Big). \end{cases}$$

$\perp$

Mais pourquoi s'arrêter là ? Maintenant qu'on a identifié la règle de récurrence, rien ne peut entraver notre lancée.

De fait, la règle récursive ayant toujours la même forme, on peut d'un seul coup (1) prolonger à l'infini la suite récursive d'opérations arithmétiques ; et (2) regrouper toutes les opérations ainsi définies en une seule définition d'une hyperopération à trois paramètres.

Hyperopération de rang $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
Étant donné et $n, a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_0(a,b) \coloneqq \ S(b)$$

et

$$H_n(a,0) \coloneqq \begin{cases} a, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n = 2, \\ 1, & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

De plus, on définit récursivement

$$H_{S(n)}\big(a,S(b)\big) \coloneqq \ H_n\big(a, H_{S(n)}(a,b)\big).$$

$\perp$

Revenons une ultime fois à la question indiquée dans le titre du présent article. Qu'y a-t-il, donc, au-delà de l'exponentiation ? Une suite infinie d'hyperopérations obtenues en itérant l'opération de rang précédent.

Ces fonctions n'ont un intérêt mathématique qu'au niveau formel puisqu'elle croissent extrêmement rapidement. À titre d'exemple, $H_4(4,3)$ est de l'ordre de $1{,}34 \times 10^{154}$ alors que $H_4(4,4)$ est de l'ordre de $10^{8{,}07 \times 10^{153}}$.

2.9 Tant qu'à y être, qu'y a-t-il au-dessous de la zération ?

La suite infinie des hyperopérations, nous l'avons vu, est définie récursivement. Tout débute avec la zération H_0 qui est entièrement et explicitement définie grâce à la fonction récursive primitive, la *fonction successeur*. De là, tout s'enchaine :

— Connaissant H_0, on définit H_1 – l'addition – en l'initialisant d'une manière qui nous semble appropriée (compte tenu des observations empiriques que l'on cherche à reproduire abstraitement) et en appliquant la règle récursive qui fait appel à H_0 ;
— Connaissant H_1, on définit H_2 – la multiplication – en l'initialisant d'une manière qui nous semble appropriée (compte tenu des observations empiriques que l'on cherche à reproduire abstraitement) et en appliquant la règle récursive qui fait appel à H_1 ;
— Connaissant H_2, on définit H_3 – l'exponentiation – en l'initialisant d'une manière qui nous semble appropriée (compte tenu des observations empiriques que l'on cherche à reproduire abstraitement) et en appliquant la règle récursive qui fait appel à H_2 ;
— Connaissant H_3, on définit H_4 – la tétration – en l'initialisant d'une manière qui nous semble formellement appropriée et en appliquant la règle récursive qui fait appel à H_4 ;
— Plus généralement, connaissant H_n, on définit $H_{S(n)}$ en l'initialisant d'une manière qui nous semble formellement appropriée et en appliquant la règle récursive qui fait appel à H_n ;

Il est intéressant de noter qu'il est possible d'inverser le processus récursif et d'obtenir ainsi un aperçu de H_{-1}, l'hyperopération de rang -1, en s'appuyant sur notre connaissance de l'hyperopération H_0. En effet, imaginons un instant qu'il existe une telle chose qu'une hyperopération $H_{-1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Alors celle-ci devrait vérifier la règle de récurrence

$$H_0\big(a, S(b)\big) \ = \ H_{-1}(a, H_0(a,b)\big)$$

pour tout $a, b \in \mathbb{N}$. Or, par définition, $H_0(a,b) = S(b)$. On a donc

$$H_0\big(a, S(b)\big) \ = \ H_{-1}(a, S(b)\big)$$

pour tout $a, b \in \mathbb{N}$. C'est donc dire que l'hyperopération H_{-1} coïncide avec H_0 pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout b qui est le successeur d'un nombre naturel (c'est-à-dire pour tout nombre naturel $b \neq 0$). Fait à noter, il n'existe aucune façon d'exploiter nos connaissances des hyperopérations dont le rang est un entier positif ou nul afin de dériver une valeur numérique spécifique pour $H_{-1}(a,0)$. Ces termes demeurent donc indéfinis.

En itérant la procédure rétrograde que nous venons de décrire, c'est-à-dire en tirant profit de notre connaissance (certes incomplète) de H_{-1} pour définir une hyperopération H_{-2} et ainsi de suite, on peut étendre la suite infinie des hyperopérations en une suite bi-infinie définies pour tous les entiers (positifs ou négatifs). Toutefois, l'indétermination de certaines valeurs se propage d'un rang à l'autre de telle sorte que $H_{-n}(a,b)$ n'est définie que pour les valeurs entières de b supérieures ou égales à n.

Ce qui précède est d'un intérêt somme toute limité puisque les hyperopérations dont le rang est un entier négatif n'apportent rien de nouveau : suivant une section initiale indéterminée, elles coïncident avec la zération qui est de loin la plus simple et inintéressante des hyperopérations. Mais l'important est ailleurs : l'utilisation de la règle récursive à rebours s'avère porteuse. On peut notamment s'en servir afin de justifier *a posteriori* le choix d'initialiser l'exponentiation de la manière dont nous l'avons fait.

S'il tombe intuitivement sous le sens de *définir*

$$\underbrace{H_1(a,0)}_{a+0} = a \qquad \text{et} \qquad \underbrace{H_2(a,0)}_{a\times 0} = 0$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$, le fait de poser $H_3(a,0) = 1$ peut sembler arbitraire et choquant pour l'esprit (c'est en tout cas une impression que semblent avoir nombre d'élèves du secondaire voire du collégial, si l'on se fie à leurs commentaires, aux erreurs fréquemment commises ou aux points d'interrogation dans leurs yeux lorsque ce genre de calcul intervient en pratique). Or, il serait absurde de fonder la définition récursive de l'exponentiation sur une convention arbitraire. Un concept arithmétique aussi important que l'exposant doit être fondé de manière quasi empirique. Sinon l'édifice mathématique nous semblerait tout d'un coup reposer sur des bases beaucoup plus instables qu'anticipé.

Justifier quasi empiriquement (ou se convaincre qu'il tombe intuitivement et moralement sous le sens) que

$$\underbrace{H_3(a,1)}_{a^1} = a$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$, semble plus envisageable. Mais ce n'est pas en cette valeur du deuxième argument que l'hyperopération H_3 est initialisée... à moins qu'on en décide ainsi !

On pourrait dire par exemple que l'hyperopération $H_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, afin de modéliser le comportement que l'on peut quasi empiriquement vérifier dans le monde réel, se doit de vérifier

$$H_3(a,1) \coloneqq \; a$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$. Par la suite, on s'en remet à la règle récursive :

$$H_3\big(a, S(b)\big) \coloneqq \; H_2\big(a, H_3(a,b)\big)$$

pour tout entier $b \geq 1$. Enfin, le cas de $H_3(a,0)$, lui, sera déterminé en employant la règle récursive à rebours. Afin que

$$H_3(a,1) \;=\; H_2\big(a, H_3(a,0)\big),$$

il *faut* que $H_3(a,0) = 1$, car c'est la seule valeur pour laquelle la fonction $H_2(a,\cdot)$ retournera la valeur numérique $a \eqqcolon H_3(a,1)$. Ainsi, le fait que

$$H_3(a,0) \;=\; 1$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$ n'est pas une convention, c'est une nécessité formelle [9].

Terminons en mentionnant qu'un argument similaire permet de justifier l'initialisation de la tétration à partir du fait qu'il tombe sous le sens d'exiger que la valeur numérique de ${}^1a = H_4(a,1)$ soit a.

9. Il ne nous a pas échappé que $H_3(0,0)$ est un cas particulier. En algèbre, en théorie des ensembles, en combinatoire et dans le présent contexte, il tombe sous le sens d'affirmer que $0^0 = 1$. Toutefois, en analyse il existe de nombreux contextes dans lesquels cette expression n'a pas de valeur évidente, auquel cas il est préférable de la laisser non définie. Les auteurs du présent texte ne connaissent aucun contexte dans lequel il serait exact, cohérent *et nécessaire* de définir 0^0 comme une et une seule valeur numérique spécifique mais différente de 1.

3 Interlude sur les moyennes

3.1 Les moyennes pythagoriciennes

Dans cette section, nous nous permettons une longue digression par rapport à notre sujet principal afin de dire un mot sur une notion centrale en mathématiques ainsi qu'en statistique, celle de *moyenne*. Ce détour sera mis à profit plus loin.

Informellement, une moyenne sur $(0,\infty)$ est une appréciation d'un ensemble de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en résumant celui-ci de manière systématique par une seule valeur numérique représentative. La première référence formelle à la notion mathématique de moyenne avec comme ambition de capturer cette notion dans une ébauche de définition semble être due au mathématicien français Augustin Louis Cauchy [5]. Ce dernier stipula que devait être considérée comme étant une moyenne toute fonction à n variables $M : (0,\infty)^n \to (0,\infty)$ vérifiant la condition suivante :

Condition de Cauchy. Pour tout nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, on a

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\leq\; M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\leq\; \max(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Il va sans dire qu'il existe une infinité de moyennes au sens de Cauchy. Parmi celles trouvant le plus d'applications pratiques, les plus connues sont la médiane, le mode et les trois *moyennes pythagoriciennes*, à savoir la *moyenne arithmétique* (A), la *moyenne géométrique* (G) et la *moyenne harmonique* (H). Celles-ci sont ainsi nommées en raison de l'étude minutieuse dont elles ont fait l'objet de la part de penseurs ayant appartenus à la confrérie scientifique et religieuse fondée par Pythagore de Samos (580-495 av. J.-C.), et ce, principalement en raison de leur importance en musique et aussi en géométrie [13, 14]. Leur première mention explicite connue se trouve dans un fragment de texte du philosophe pythagoricien Archytas de Tarente [16].

Pour rappel, étant donné une famille de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, on définit les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique comme suit respectivement :

$$\begin{aligned}
A(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\\
G(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} &&= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n},\\
H(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.
\end{aligned}$$

La célèbre inégalité arithmético-géométrique relie la moyenne arithmétique de n nombres strictement positifs et la moyenne géométrique des mêmes nombres en établissant que la première est supérieure ou égale à la seconde, l'égalité ayant lieu si et seulement si tous les nombres sont égaux.

Il suffit ensuite de constater que la moyenne harmonique de $x_1, \ldots, x_n > 0$ est la réciproque de la moyenne arithmétique des réciproques $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ pour convenir que la moyenne géométrique de n nombres strictement positifs est supérieure ou égale à la moyenne harmonique des mêmes nombres, l'égalité ayant une fois de plus lieu si et seulement si tous les nombres sont égaux.

En somme, la chaîne d'inégalités est vérifiée :

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \;\leq\; H(x_1, \ldots, x_n) \;\leq\; G(x_1, \ldots, x_n) \;\leq\; A(x_1, \ldots, x_n) \;\leq\; \max(x_1, \ldots, x_n).$$

3.2 Axiomatisation de Kolmogorov–Nagumo

Trouvant la définition de Cauchy trop grossière et trop inclusive, estimant que la notion de moyenne devait faire plus que simplement indiquer une tendance centrale, les mathématiciens russe Andreï Kolmogorov (1903–1987) [20] et japonais Mitio Nagumo (1905-1995) [25] proposèrent tous deux, et ce de manière indépendante et presque simultanée, cinq conditions caractérisant adéquatement la notion de moyenne [7, 24, 26, 36].

Notons d'abord que pour Kolmogorov et Nagumo, une moyenne n'est pas une unique fonction, mais une suite infinie de fonctions

$$\begin{gathered} M_1(x_1), \\ M_2(x_1, x_2), \\ M_3(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ M_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{gathered}$$

vérifiant les quatre conditions suivantes :

1. Continuité par coordonnées. Pour tout entier positif n, tout $i = 1, \ldots, n$ et tout y_j avec $j = 1, 2, \ldots, n$ mais $j \neq i$, la fonction $x_i \mapsto M(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ est continue.
2. Invariance par rapport à la permutation des arguments. Pour tout entier positif n, tout $x_1, \ldots, x_n > 0$ et toute permutation σ des entiers de 1 à n,
$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; M\big(x_{\sigma(1)} \ldots, x_{\sigma(n)}\big).$$
3. Monotonicité (croissante) stricte par coordonnées. Pour tout entier positif n, tout $x, x_1, \ldots, x_n > 0$ et tout $b > a > 0$,
$$M(a, x_2, \ldots, x_n) \;<\; M(b, x_2, \ldots, x_n).$$
4. Associativité. Pour tout entier positif n, tout entier positif $k \leq n$ et tout $x_1, \ldots, x_n > 0$,
$$M_k(x_1, \ldots, x_k) = x \quad \Longrightarrow \quad M_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \;=\; M_n(x, \ldots, x, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Kolmogorov et Nagumo ont démontré que sous les quatre conditions nécessaires et suffisantes listées ci-dessus, il existe une fonction continue et strictement croissante f telle que M_n vérifie

$$M_n(x_1, \dots, x_n) \;=\; f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right),$$

où f^{-1} désigne l'inverse de f. Sans surprise, considérant la forme de M_n, les moyennes au sens de Kolmogorov–Nagumo sont parfois appelées *moyennes quasi-arithmétiques*.

La représentation précédente permet de mieux situer les moyennes au sens de Kolmogorov–Nagumo dans le paysage plus large des moyennes. Une question naturelle se pose alors : toute moyenne au sens de Kolmogorov–Nagumo est-elle une moyenne au sens de Cauchy ? La réponse est affirmative. En effet, les conditions imposées par Kolmogorov et Nagumo sont plus fortes que celle de Cauchy. Plus précisément, la monotonie stricte par coordonnées et l'invariance par permutation impliquent que, pour tout $x_1, \dots, x_n > 0$, la valeur de $M_n(x_1, \dots, x_n)$ est nécessairement comprise entre le minimum et le maximum des x_i. Ainsi, toute moyenne quasi-arithmétique vérifie automatiquement la condition de Cauchy.

Dans ce cadre, des choix différents de la fonction $f(x)$ conduisent à des formes fonctionnelles distinctes pour la moyenne M_n, comme l'illustrent les exemples suivants.

Exemple 1 (Moyenne arithmétique). Si $f(x) = x$, alors pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ on a

$$M_x(x_1, x_2, \dots, x_n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; A(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Exemple 2 (Moyenne géométrique). Si $f(x) = \log(x)$, alors pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ on a

$$\begin{aligned}
M_{\log(x)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\right) \\
&= \exp\left(\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \\
&= G(x_1, x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Exemple 3 (Moyenne harmonique). Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ on a

$$\begin{aligned} M_{1/x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^{-1}\right)^{-1} \\ &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \\ &= H(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Exemple 4 (Moyenne quadratique). Si $f(x) = x^2$, alors pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} M_{x^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \\ &= Q(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

qui correspond à la moyenne quadratique.

Non-exemple 1 (Médiane). Le statisticien italien Bruno de Finetti (1906-1985) fut le premier à souligner que la médiane n'est pas une moyenne au sens de Kolmogorov et Nagumo [8]. En effet, elle ne vérifie pas la propriété d'associativité : la valeur obtenue dépend du mode de regroupement des données, ce qui exclut toute représentation comme moyenne quasi-arithmétique. Considérons les trois valeurs 0, 4 et 100. On a $\operatorname{med}(0{,}4{,}100) = 4$. En revanche, $\operatorname{med}(0{,}4) = 2$, d'où $\operatorname{med}(2{,}100) = 51$. Ainsi, $\operatorname{med}(\operatorname{med}(0{,}4),100) \neq \operatorname{med}(0{,}4{,}100)$, ce qui montre que la médiane n'est pas associative.

Non-exemple 2 (Mode). De manière analogue, le mode ne vérifie pas la propriété d'associativité : la valeur obtenue peut dépendre du mode de regroupement des données, ce qui exclut qu'il constitue une moyenne au sens de Kolmogorov et Nagumo. Considérons les données 1,1,2,2,3. Le mode de l'ensemble complet n'est pas unique : 1 et 2 apparaissent chacune deux fois. Regroupons maintenant les données en deux sous-ensembles : (1,1,2) et (2,3). On a $\operatorname{mode}(1{,}1{,}2) = 1$ et $\operatorname{mode}(2{,}3) = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$ (en l'absence de mode unique, on adopte la convention usuelle de prendre la moyenne des valeurs modales). Puis $\operatorname{mode}\big(1\ ,\ 2{,}5\big) = \frac{1+2{,}5}{2} = 1{,}75$, ce qui diffère des modes initiaux. Le résultat dépend donc du regroupement, ce qui montre que le mode n'est pas associatif.

Non-exemple 3 (Moyennes de Lehmer). Le mathématicien américain Derrick Henry Lehmer (1905-1991) a introduit en 1971 une famille de fonctions généralisant les moyennes pythagoriciennes [21]. Étant donné un nombre réel p et $x_1, \ldots, x_n > 0$, la moyenne de Lehmer d'ordre p est définie ainsi :

$$L_p(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{p-1}}.$$

On peut vérifier que ces fonctions sont des moyennes au sens de Cauchy. En effet, on peut montrer, d'une part, que

$$p \leq q \quad \Longrightarrow \quad L_p(x_1, \ldots, x_n) \; \leq \; L_q(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $x_1, \ldots, x_n > 0$, et, d'autre part, que

$$\lim_{p \to -\infty} L_p(x_1, \ldots, x_n) = \min(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to \infty} L_p(x_1, \ldots, x_n) = \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Notons toutefois qu'à l'exception de l'ordre 0 (pour lequel on obtient la moyenne harmonique), de l'ordre $\frac{1}{2}$ dans le cas particulier où $n = 2$ (où on retrouve la moyenne géométrique) et de l'ordre 1 (qui correspond à la moyenne arithmétique), les moyennes de Lehmer ne sont pas monotones par coordonnées. Par conséquent, elles ne sont pas des moyennes au sens de Kolmogorov–Nagumo [26].

3.3 La moyenne de Hölder–Minkowski d'ordre p

Nous avons vu que les trois moyennes pythagoriciennes sont des moyennes tant au sens de Cauchy qu'au sens de Kolmogorov–Nagumo. Nous avons également vu – avec les moyennes de Lehmer – qu'il est possible de généraliser les moyennes pythagoriciennes de sorte à obtenir tout un continuum de moyennes de Cauchy pour lesquelles les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique sont des cas particuliers. Seule ombre au tableau : aucun des nouveaux éléments de ce continuum n'est une moyenne au sens plus restreint mais plus adéquat où l'entendent Kolmogorov et Nagumo.

Nous allons maintenant voir que suivre Lehmer n'est pas la façon par laquelle on peut généraliser les moyennes pythagoriciennes. En effet, nous allons maintenant introduire un autre continuum de fonctions. Cette fois, cependant, il s'agira bel et bien de moyennes au sens de Kolmogorov–Nagumo.

Étant donné un nombre réel non nul p et $x_1, \ldots, x_n > 0$, on définit la *moyenne de Hölder–Minkowski d'ordre* p par

$$\mu_p(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}.$$

Afin d'achever ce continuum, on pose

$$\begin{aligned} \mu_{-\infty}(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \lim_{p \to -\infty} \mu_p(x_1, \ldots, x_n), \\ \mu_0(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \lim_{p \to 0^+} \mu_p(x_1, \ldots, x_n), \\ \mu_\infty(x_1, \ldots, x_n) &\coloneqq \lim_{p \to \infty} \mu_p(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

La moyenne de Hölder–Minkowski d'ordre p est clairement une moyenne au sens de Kolmogorov–Nagumo. Elle correspond en effet au cas $f(x) = x^p$.

On peut aisément vérifier que la moyenne de Hölder–Minkowski d'ordre 1 correspond à la moyenne arithmétique, c'est-à-dire

$$\mu_1(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{x_1 + \ldots x_n}{n} \;=\; A(x_1, \ldots, x_n).$$

De plus, la Hölder–Minkowski d'ordre -1 correspond à la moyenne harmonique, à savoir

$$\mu_{-1}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \left(\frac{x_1^{-1} + \cdots + x_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \;=\; \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \;=\; H(x_1, \ldots, x_n).$$

Ce qui est moins évident à remarquer d'emblée est que la troisième moyenne pythagoricienne – soit la moyenne géométrique – coïncide elle aussi avec l'une des moyennes de Hölder–Minkowski comme en fait foi la proposition qui suit.

Proposition 1. Étant donné $x_1, \ldots, x_n > 0$, on a

$$\mu_0(x_1, \ldots, x_n) \;=\; G(x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. Pour tout $p > 0$ fixé, on a par définition

$$\mu_p(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} &= \exp\left(\log\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\right]\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{p}\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)\right).\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on a

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0^+} \mu_p(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{p\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{p}\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)\right)\\ &= \exp\left(\lim_{p\to 0^+}\frac{\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)}{p}\right).\end{aligned}$$

Une application de la règle de L'Hôpital nous donne ensuite

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\lim_{p\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)}{p}\right) &= \exp\left(\lim_{p\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p \log(x_i)\right) \Big/ \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)}{1}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1\cdot\log(x_i)}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)\right).
\end{aligned}
$$

Les lois des logarithmes impliquent ensuite que

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)\right) &= \exp\left(\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a montré, comme désiré, que

$$
\lim_{p\to 0^+} \mu_p(x_1,\ldots,x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = G(x_1,\ldots,x_n).
$$

■

De même, on peut montrer que les moyennes de Hölder–Minkowski d'ordre ∞ et $-\infty$ cöincident avec des fonctions avec lesquelles nous sommes familiers.

Proposition 2. Étant donné $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, on a

$$
\mu_\infty(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \max(x_1,x_2,\ldots,x_n).
$$

Démonstration. Soit k l'indice de l'élément maximal parmi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mu_\infty(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{p\to\infty} \mu_p(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \\
&= x_k \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_k} \right)^p \right)^{1/p} \\
&= x_k \\
&= \max(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

■

Proposition 3. Étant donné $x_1, \ldots, x_n > 0$, on a

$$\mu_{-\infty}(x_1, \ldots, x_n) = \min(x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. La proposition qui précède implique que

$$\begin{aligned}
\mu_{-\infty}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{\mu_\infty(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})} \\
&= \frac{1}{\max(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n})} \\
&= \min(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

■

Il est intéressant de noter qu'il est possible de montrer que si $p, q \in [-\infty, \infty]$ vérifient $p < q$ alors

$$\mu_p(x_1, \ldots, x_n) \leq \mu_q(x_1, \ldots, x_n),$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$. En faire une démonstration exhaustive prolongerait toutefois cette digression au-delà du raisonnable et du nécessaire. Nous nous contenterons donc de mentionner que la preuve repose sur une utilisation de la version discrète de l'inégalité de Jensen [18].

En particulier, le fait qui précède implique que les moyennes de Hölder–Minkowski d'ordre p réel vérifient

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq \mu_p(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Elles sont donc toutes des indicateurs de tendance centrale et, par le fait même, des moyennes au sens de Cauchy.

Pour clore cette section, il convient de mentionner que les moyennes de Hölder–Minkowski sont les seules moyennes de Kolmogorov–Nagumo à vérifier la propriété suivante (qu'il relève du bon sens d'exiger d'une moyenne étant donné qu'elle est vérifiée par les trois moyennes pythagoricienne) [12, 27].

Homogénéité du premier ordre. Pour tout entier positif n et tout $b, x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\mu_p(bx_1, \ldots, bx_n) \;=\; b \cdot \mu_p(x_1, \ldots, x_n).$$

4 Qu'y a-t-il entre $+$ et $\times$?

4.1 Question de Rubtsov et Romerio

Ayant refermé la parenthèse consacrée à développer la théorie axiomatique des moyennes, il est temps de reprendre notre route vers une réponse à notre deuxième question principale : qu'y a-t-il entre $+$ et $\times$?

La plus ancienne mention explicite d'un appel à poursuivre un programme de recherche visant à définir des hyperopérations interpolant entre les hyperopérations de rang entier que nous avons été en mesure de retracer dans la littérature scientifique se trouve dans une prépublication de Constantin A. Rubtsov et Giovanni F. Romerio parue en 2004 [33].

Les deux auteurs y affirment que l'on peut envisager l'existence mathématique d'hyperopérations avec un rang « exotique » $r = \frac{3}{2}$ entre l'addition ($r = 1$) et la multiplication ($r = 2$) ou avec des rangs $r = \pi$, ou $r = e$. Réalistes, ils achèvent leur commentaire en reconnaissant que cela risque de nécessiter beaucoup de recherches supplémentaires. En somme, les blés ne sont pas murs mais le germe est en terre.

Dans une prépublication subséquente, les deux mêmes auteurs nous offrent leur perspective sur, sinon l'origine de ce programme de recherche, du moins son intérêt et les influences desquelles il découle :

> *Le besoin d'une opération entre l'addition et la multiplication, ou d'une opération entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, s'est fait sentir au niveau scientifique et technique depuis les années 60 du siècle dernier, dans le cadre de l'étude de nouvelles méthodologies pour l'évaluation des systèmes de stockage et de recherche d'informations* [34, traduction libre].

4.2 Heuristique de Williams

La première percée d'importance vers des opérations arithmétiques de rangs fractionnaires fut réalisée en 2006 par H. Paul Williams, un professeur de recherche opérationnelle à la *London School of Economics*. Le titre du présent article fait d'ailleurs volontairement écho au titre de l'une de ses communications scientifiques [37], en hommage à son travail.

L'idée géniale de Williams consiste à prendre appui sur la notion de moyenne car, après tout, il existe des liens étroits entre les opérations arithmétiques usuelles et les moyennes pythagoriciennes. En effet, nous nous permettrons de souligner à grands traits ces liens même si ceux-ci sont à la fois bien connus et évidents :

$$\begin{aligned} a+b &= \left(\frac{a+b}{2}\right)\times 2 &&= A(a,b)\times 2 &&= A(a,b)+A(a,b),\\ a\times b &= \left(\sqrt{ab}\right)^2 &&= G(a,b)^2 &&= G(a,b)\times G(a,b). \end{aligned}$$

En d'autres termes

$$\begin{aligned} H_1(a,b) &= H_2\big(A(a,b),2\big),\\ H_2(a,b) &= H_3\big(G(a,b),2\big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Williams connaissait l'existence d'une moyenne au sens de Cauchy qui se situe à mi-chemin entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique et qui, étant donné $a \geq b > 0$, est définie itérativement comme la limite des deux suites interdépendantes suivantes a_i et g_i :

$$\begin{aligned} a_0 &\coloneqq a,\\ g_0 &\coloneqq b,\\ a_{n+1} &\coloneqq A(a_n,g_n) = \frac{a_n+g_n}{2},\\ g_{n+1} &\coloneqq G(a_n,g_n) = \sqrt{a_n g_n}. \end{aligned}$$

Ces deux suites convergent vers le même nombre, appelé moyenne arithmético-géométrique de a et b et noté $AG(a,b)$, vérifiant

$$G(a,b) \leq AG(a,b) \leq A(a,b).$$

Reposant sur une méthode itérative rappelant un algorithme développé par Archimède [13, 14], la moyenne arithmétique-géométrique a une histoire ancienne et riche. Vers 1775, le mathématicien anglais John Landen (1719–1790) en utilisait déjà plus ou moins implicitement certaines propriétés. Il semble que ce soit le mathématicien français Joseph Louis de Lagrange (1736–1813) qui le premier a découvert et employé explicitement la méthode itérative AG vers 1785 [26]. Le mathématicien allemand Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) l'aurait redécouverte indépendamment vers 1791 à l'âge de 14 ans [10, 9]. Le français Adrien-Marie Legendre (1752–1833) et lui en développèrent la théorie au cours des années qui suivirent et exploitèrent cette méthode pour calculer des intégrales elliptiques [4].

Revenons maintenant à Williams et aux hyperopérations. Celui-ci pressentit qu'il pourrait être possible d'exploiter la moyenne arithmétique-géométrique afin de définir une hyperopération à mi-chemin entre l'addition et la multiplication. Sans s'avancer sur la manière dont il fallait procéder pour tirer partie de cela, il indiqua que, de façon analogue à ce qu'on retrouve à l'équation (4.1), on aurait :

$$H_{\frac{3}{2}}(a,b) = H_{\frac{5}{2}}\Big(AG(a,b),2\Big). \tag{4.2}$$

Rubtsov et Romerio ont proposé le nom de *sesquation* pour l'hyperopération de rang $\frac{3}{2}$ puisque le préfixe d'origine latine *sesqui-* signifie *dans un rapport de un et demi*.

Enthousiasmés par cette idée, Rubtsov et Romerio émirent ensuite l'hypothèse qu'une procédure similaire donnant lieu à la moyenne arithmétique-géométrique, mais appliquée à deux autres moyennes, pourrait être utilisée dans l'étude de l'hyperopération de rang $\frac{5}{2}$ [34]. Nous verrons qu'en cela Rubtsov et Romerio font erreur. C'est à la règle récursive caractéristique des hyperopérations qu'il faut s'en remettre pour définir $H_{\frac{5}{2}}$ à partir de $H_{\frac{3}{2}}$. Autrement, c'est-à-dire si la règle récursive n'est pas vérifiée pour les hyperopérations de rangs non entiers, on peine à voir comment ces fonctions pourraient être vues comme entendant les hyperopérations de rangs entiers !

Williams conclut la présentation de son idée avec un point de vigilance. Il souligne en effet que, bien que la moyenne arithmétique-géométrique jouisse des propriétés d'invariance par rapport à la permutation des arguments et d'homogénéité du premier ordre, elle n'est pas *balancée*. En effet,

$$AG(a,b) \;\neq\; AG\Big(AG\big(a, AG(a,b)\big)\;, AG\big(b, AG(a,b)\big)\Big).$$

Williams anticipe (sans toutefois approfondir sa pensée) que cela est susceptible de causer des difficultés.

Notons en terminant que toute moyenne quasi-arithmétique est balancée. Ainsi, la moyenne arithmétique-géométrique ne saurait être une moyenne au sens de Kolmogorov et Nagumo [10].

4.3 La sesquation voit le jour avec Crespo et Montáns

C'est finalement José Crespo et Francisco Javier Montáns qui parvinrent, en 2016, à tirer profit des idées de Rubtsov, Romerio et Williams [6].

Il convient d'abord d'étudier brièvement le cas de l'addition et de la moyenne arithmétique.

Étant donné $x, y \in \mathbb{N}$, posons $A(x,y) = m$. Remarquons que si y et m nous sont connus, alors il est possible de remonter à la source et d'identifier x. En effet, $x = m \times 2 - y$. Nous noterons A^{-1} la fonction binaire qui, étant donné m et y, retourne x.

Remarquons ensuite que

$$\begin{aligned} a &= \frac{a+a}{2} \\ &= \frac{(2a)+0}{2} \\ &= A(2a,0) \\ &= A\big(H_2(a,2), 0\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

10. Pour une preuve plus précise, rigoureuse et détaillée de cette affirmation, voir le théorème 2 de l'article de Lehmer [21].

Nous arrivons enfin au moment où tous ces morceaux s'assemblent. Observons que

$$A^{-1}(x,0) \;=\; x \cdot 2 - 0 \;=\; H_2(x,2).$$

En appliquant cela à $x \coloneqq A(a,b)$, on obtient

$$A^{-1}\big(A(a,b),0\big) \;=\; A(a,b) \cdot 2 - 0 \;=\; H_2\big(A(a,b),2\big).$$

Or, par l'équation (4.1) de Williams, ce dernier terme est égal à $H_1(a,b)$. On a donc montré que

$$H_1(a,b) \;=\; A^{-1}\big(A(a,b),0\big).$$

Le cas de la multiplication et de la moyenne géométrique est analogue.

Étant donné $x, y \in \mathbb{N}$, posons $G(x,y) = m$. Remarquons que si y et m nous sont connus, alors il est possible de remonter à la source et d'identifier x. En effet, $x = \frac{m^2}{y}$. Nous noterons G^{-1} la fonction binaire qui, étant donné m et y, retourne x.

Remarquons ensuite que

$$\begin{aligned} a \;&=\; \sqrt{a \times a} \\ &=\; \sqrt{(a^2) \times 1} \\ &=\; G(a^2,1) \\ &=\; G\big(H_3(a,2),1\big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nous arrivons une fois de plus au moment où tous ces morceaux s'assemblent. Observons que

$$G^{-1}(x,1) \;=\; \frac{x^2}{1} \;=\; H_3(x,2).$$

En appliquant cela à $x \coloneqq G(a,b)$, on obtient

$$G^{-1}\big(G(a,b),1\big) \;=\; \frac{G(a,b)^2}{1} \;=\; H_3\big(G(a,b),2\big).$$

Or, par l'équation (4.1) de Williams, ce dernier terme est égal à $H_2(a,b)$. On a donc montré que

$$H_2(a,b) \;=\; G^{-1}\big(G(a,b),1\big).$$

Le dénouement tant attendu est proche. Si l'on suppose un instant que l'hyperopération de sesquation possède – tout comme l'addition avec 0 et la multiplication avec 1 – un élément neutre noté ε et si l'on note AG^{-1} la fonction binaire qui, lorsqu'appliquée à $m = AG(x,y)$ et y, retourne x, alors (4.3) et (4.4) suggèrent d'imposer la condition voulant que

$$AG\big(H_{\frac{5}{2}}(a,2),\varepsilon\big) \;=\; a.$$

Jumelée à la condition de Williams (4.2) voulant que

$$H_{\frac{3}{2}}(a,b) \;=\; H_{\frac{5}{2}}\big(AG(a,b),2\big),$$

cela nous donnera – en procédant de manière analogue aux cas de l'addition et de la multiplicatoin montrés ci-dessous – une définition viable pour la sesquation :

$$H_{\frac{3}{2}}(a,b) \coloneqq \ AG^{-1}\big(AG(a,b), \varepsilon\big),$$

pour tout $a, b \in \mathbb{N}$.

Notons qu'il est possible de déterminer la valeur de ε, mais cela est secondaire car nous allons maintenant bifurquer vers une approche légèrement différente qui est à la fois originale et bien plus porteuse.

4.4 La réalisation du programme de Rubtsov et Romerio

La sesquation définie par Crespo et Montáns revêt sans le moindre doute un grand intérêt eu égard au programme de Rubtsov et Romerio. Cependant, on se saurait passer sous silence la lourdeur computationnelle. Même si le processus arithmético-géométrique converge étonnamment vite, il n'en demeure pas moins que le calcul de $H_{\frac{3}{2}}(a,b)$ requiert un processus itératif, et ce, pour chaque couple d'entiers (a,b).

Si l'on voulait ensuite interpoler entre H_1 et $H_{\frac{3}{2}}$ pour définir une hyperopération $H_{\frac{5}{4}}$ ou encore interpoler entre $H_{\frac{3}{2}}$ et H_2 pour définir une hyperopération $H_{\frac{7}{4}}$, il faudrait repéter chaque fois la même procédure qui nous a donné la moyenne arithmético-géométrique, mais cette fois avec comme intrant la moyenne arithmétique et la moyenne arithmético-géométrique dans le premier cas et la moyenne arithmético-géométrique ainsi que la moyenne géométrique dans le second cas.

Si l'ampleur des calculs requis n'était pas déjà jugée prohibitive, on pourrait poursuivre ainsi et aller jusqu'à définir une hyperopération pour chaque rationnel dyadique [11] strictement compris entre 1 et 2.

À ce stade, la lourdeur computationnelle aura assurément achevé de décourager le plus hardi des mathématiciens. Mais poursuivons l'expérience de pensée. Puisque les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$, il serait alors plausible de définir $H_r(a,b)$, où $r \in (1,2)$ est un nombre réel non dyadique, comme la limite d'une suite $H_{s_n}(a,b)$ où les s_n sont des rationnels dyadiques tels que $s_n \xrightarrow{n\to\infty} r$. On aura toutefois compris depuis longtemps que cette approche, si elle est théoriquement envisageable, est en pratique un cul-de-sac.

Il est difficile, après avoir franchi tant de chemin, de s'empêcher de se dire *Il doit sûrement y avoir un moyen plus simple !* Or, il s'avère que c'est le cas. Ou, à tout le moins, c'est la thèse que nous soutiendrons. En un mot comme en mille, la solution que nous croyons avoir identifiée est : *même approche, meilleur choix de moyennes.*

11. Un rationnel dyadique est un nombre de la forme $\frac{a}{2^b}$ où $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Il est maintenant temps de faire appel à nos vieilles amies : les moyennes de Hölder–Minkowski d'ordre $p \in (0{,}1)$. Rappelons que

$$\mu_p(a,b) := \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Étant donné ces moyennes, pour faire écho à Crespo et Montáns il nous faut déterminer la fonction binaire μ_p^{-1} telle que si $\mu_p(a,b) = m$ alors

$$\mu_p^{-1}(m,b) \;=\; a.$$

On peut vérifier que

$$\mu_p^{-1}(x,y) := \left(2 \cdot x^p - y^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est la fonction recherchée. En effet,

$$\begin{aligned}
\mu_p^{-1}(m,b) &= \left(2 \cdot m^p - b^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(2 \cdot \mu_p(a,b)^p - b^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(2 \cdot \left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p - b^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(a^p + b^p - b^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= a
\end{aligned}$$

comme voulu.

Jusqu'à présent, nous avons soigneusement évité de préciser laquelle des moyennes de Hölder–Minkowski d'ordre p correspond à l'hyperopération de rang r. Pour le dire autrement, nous n'avons pas spécifié quel p correspond à quel r. Nous reporterons la réponse à cette question à plus tard.

Tout ce qui importe, pour l'instant, est de savoir que l'addition ($r = 1$) étant liée à la moyenne arithmétique ($p = 1$) et la multiplication ($r = 2$) étant liée à la moyenne géométrique ($p = 0$), il se doit d'y avoir une fonction monotone $p(r)$ définie sur l'intervalle $(1{,}2)$ à valeurs dans $(0{,}1)$ et telle que

$$\lim_{r \to 1^+} p(r) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r \to 2^-} p(r) = 0.$$

De même, nous nous abstiendrons pour l'instant de préciser la valeur numérique de l'élément neutre pour H_r. Celui-ci sera simplement noté $\varepsilon(r)$.

Modulo ces quelques détails, nous sommes prêts à marcher dans les traces de Crespo et Montáns.

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$
\begin{aligned}
H_r(a,b) &= \mu_{p(r)}^{-1}\Big(\mu_{p(r)}(a,b)\ ,\, \varepsilon(r)\Big) \\
&= \mu_{p(r)}^{-1}\left(\left(\frac{a^{p(r)}+b^{p(r)}}{2}\right)^{\frac{1}{p(r)}}\ ,\, \varepsilon(r)\right) \\
&= \left|2\cdot\left(\left(\frac{a^{p(r)}+b^{p(r)}}{2}\right)^{\frac{1}{p(r)}}\right)^{p(r)} - \varepsilon(r)^{p(r)}\right|^{\frac{1}{p(r)}} \\
&= \left|a^{p(r)}+b^{p(r)}-\varepsilon(r)^{p(r)}\right|^{\frac{1}{p(r)}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, quel que soit $r \in (1,2)$,

$$
H_r(a,b) \coloneqq \left|a^{p(r)}+b^{p(r)}-\varepsilon(r)^{p(r)}\right|^{\frac{1}{p(r)}},
$$

quels que soient $a, b \in \mathbb{N}$.

Forces de notre approche

En optant pour une famille de moyennes interpolant entre les moyennes arithmétique et géométrique qui vérifient la condition de Cauchy, celles de Kolmogorov et Nagumo ainsi que l'homogénéité du premier ordre, nous nous sommes assurés d'une robustesse optimale. Qui plus est, les calculs à rebours auxquels il nous faut procéder pour évaluer $H_r(a,b)$ peuvent être réalisés analytiquement, ce qui est computationnellement avantageux.

Les moyennes de Hölder–Minkowski d'ordre $p \in (0,1)$ donnent lieu à des hyperopérations

— commutatives ;
— unifères ;
— vérifiant l'identité du point fixe ;
— strictement croissantes par coordonnées ;
— prolongeables naturellement sur $\mathbb{R}_{\geq \nvdash}$.

Faiblesse de notre approche

La principale faiblesse de notre approche pour définir les hyperopérations interpolant entre l'addition et la multiplication est que toute tentative d'associer un ordre p à un rang r (et *vice versa*) apparaît éminemment subjective. En comparaison, l'approche de Crespo et Montáns ne laissait aucune place au doute : la moyenne arithmétique-géométrique, étant l'unique moyenne de Cauchy induite par la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, était clairement associée au rang $\frac{3}{2}$.

L'approche qui nous semble la plus prometteuse (en cela qu'elle est systématique) pour associer un ordre p à un rang r consiste à fixer r de sorte à ce que l'élément neutre $\varepsilon(r)$ interpole linéairement entre l'élément neutre pour l'addition (à savoir $\varepsilon_1 = 0$) et l'élément neutre pour la multiplication (à savoir $\varepsilon_2 = 1$). Autrement dit, on impose la condition voulant que

$$\varepsilon(r) \;=\; r - 1.$$

On peut alors prendre appui sur l'identité suivante :

Identité du point fixe pour les rangs entiers positifs. Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, on a

$$H_n(2{,}2) \;=\; 4.$$

$\perp$

Ce fait élémentaire peut évidemment être vérifié directement (et de manière informelle) pour l'addition, la multiplication, l'exponentiation et la tétration :

$$2 + 2 \;=\; 2 \times 2 \;=\; 2^2 \;=\; {}^{2}2 \;=\; 4.$$

Il peut aussi être démontré formellement en procédant par induction sur n. La démonstration étant fort simple mais plutôt longue, elle est donc omise.

Il n'apparaît pas déraisonnable de s'attendre à ce que les hyperopérations interpolant entre celles de rang entier vérifient l'identité.

$$H_r(2{,}2) \;=\; 4.$$

Or, il n'en faut pas plus afin d'obtenir l'ancrage permettant de dériver une fonction liant r et p. En effet,

$$\begin{aligned} & H_r(2{,}2) \;=\; 4 \\ \iff\quad & \left(2^p + 2^p - \varepsilon(r)^p\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; 4 \\ \iff\quad & 2 \cdot 2^p - (r-1)^p \;=\; 4^p \\ \iff\quad & r \;=\; 1 + \sqrt[p]{2^{p+1} - 2^{2p}}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation admet une unique solution numérique, et ce, quel que soit $p \in (0{,}1)$.

La tableau suivant montre les valeurs d'élément neutre $\varepsilon(r)$ et d'ordre $p(r)$ associées à quelques valeurs de rang r.

r	1	1,1	1,25	1,5	$\approx 1{,}6862$	1,75	2
$\varepsilon(r)$	0	0,1	0,25	0,5	$\approx 0{,}6862$	0,75	1
$p(r)$	1	$\approx 0{,}9585$	$\approx 0{,}8791$	$\approx 0{,}6942$	0,5	$\approx 0{,}4189$	0

Tableau 5.1 – Correspondance entre le rang r, l'élément neutre $\varepsilon(r)$ et le paramètre d'ordre $p(r)$.

Enfin, la figure 1 montre le graphe de $p(r)$ pour r entre 1 et 2.

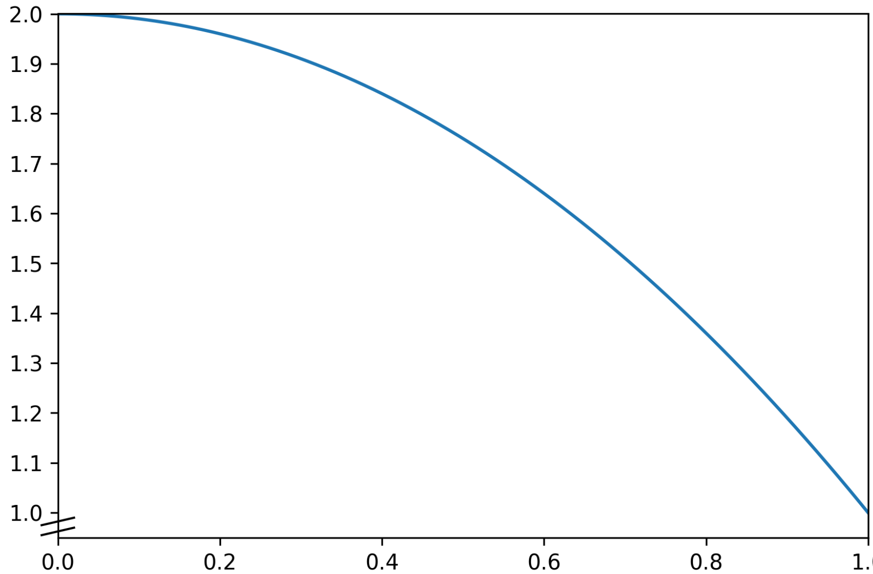

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $r = 1 + \sqrt[p]{2^{p+1} - 2^{2p}}$ pour p variant entre 0 et 1

Un exemple illustratif

Le tableau suivant présente les valeurs numériques (approximatives) de $H_r(a,b)$ pour $a, b = 1, 2, 3, 4, 5$ pour le rang associé à la moyenne d'Hölder–Minkowski d'ordre $p = \frac{1}{2}$. Pour un tel p, on a $r = 13 - 8\sqrt{2} \approx 1{,}6862$ et $\varepsilon = 12 - 8\sqrt{2} \approx 0{,}6862$.

a \ b	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	ε	0,029	0,343	0,816	1,372	1,981
1	0,029	1,372	2,514	3,523	4,715	5,796
2	0,343	2,514	4	5,372	6,686	7,962
3	0,816	3,623	5,372	6,946	8,431	9,857
4	1,372	4,715	6,686	8,431	10,058	11,612
5	1,981	5,796	7,962	9,857	11,612	13,276

TABLEAU 5.2 – Valeurs de $H_r(a,b)$ pour différents paramètres a et b

La figure suivante montre les graphes des fonctions $b \mapsto H_r(2,b)$ pour $r = 1,\ 1{,}5,\ \approx 1{,}6862,\ \approx 1{,}9496$ et 2, où b varie entre 0 et 10. On peut voir que :

— ces fonctions sont strictement croissantes sauf dans un petit voisinage autour de (0,0) ;
— chaque hyperopérateur de rang non entier est situé entre l'addition et la multiplication ;
— pour $b \geq 2$, plus un rang est proche de 2, moins le comportement de l'opérateur s'apparente à celui de l'addition et plus il s'apparente à celui de la multiplication ;
— pour $b < 2$ ce comportement est inversé.

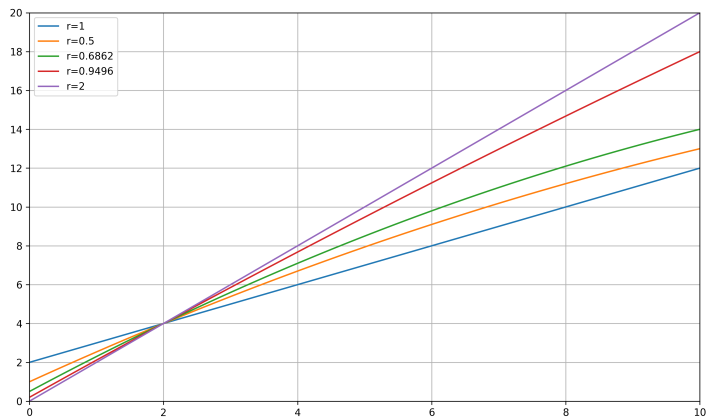

FIGURE 2 – Graphe de $H_r(2,b)$ pour $r = 1,\ 1.5,\ \approx 1{,}6862,\ \approx 1{,}9496,\ 2$ pour b entre 0 et 10

Cela correspond en tout point à ce qui était espéré. Il est donc raisonnable de penser que les hyperopérations que nous avons définies en prenant appui sur les moyennes de Hölder–Minkowski d'ordres strictement positifs et inférieurs à 1 réalisent le programme de Rubsov et Romerio.

5 Conclusion

Nous avons vu dans la première partie de cet article comment la liste des opérations arithmétiques élémentaires (à savoir l'addition, la multiplication et l'exponentiation) peut être prolongée naturellement de sorte à obtenir une suite infinie d'opérations – appelée *hyperopérations* – définies récursivement selon un patron analogue.

Dans la second partie, nous avons exploité une idée de Williams [37] approfondie par Crespo et Montáns [6] puis tiré profit de généralisations naturelles des notions de moyennes arithmétique (de forme additive) et géométrique (de forme multiplicative) afin de définir un continuum d'hyperopérations interpolant entre l'addition (l'hyperopération d'ordre 1) et la multiplication (l'hyperopération d'ordre 2) tout en présentant autant de propriétés communes à ces deux opérations que possible. Ce continuum d'hyperopérations inédit représente à notre avis l'approche la plus prometteuse pour réaliser le programme de Rubsov et Romerio [33] appelant au prolongement de la suite infinie des hyperopérations à tout ordre r, où r serait un nombre réel quelconque.

En fait, bien que nous ayons circonscrit notre propos aux seules hyperopérations dont l'ordre les situent entre l'addition et la multiplication, notons que l'application de la formule récursive

$$H_{r+1}(a,b) \;=\; H_r\Big(a, H_{r+1}\big(a, S^{-1}(b)\big)\Big)$$

et de la relation

$$H_{r+1}(a,2) \;=\; H_r(a,a)$$

à notre continuum d'hyperopérations $H_r(a,b)$, où $1 < r < 2$, permet de définir des hyperopérations interpolant entre la multiplication et l'exponentiation et possédant certaines des propriétés de l'une ou de l'autre de ces opérations (voir la figure qui suit), puis de définir des hyperopérations interpolant entre la l'exponentiation et la tétration et ainsi de suite. Cela ne se fait pas sans difficulté. On bute en effet à quelques reprises sur des obstacles. Cependant, aucun d'entre eux ne se révèle infranchissable. Aborder ces obstacles de même que les idées clés permettant de les surmonter et d'ainsi obtenir un continuum d'hyperopérations H_r pour $0 < r < \infty$ dépasse toutefois considérablement le cadre du présent article. Cela sera développé dans une prochaine publication des auteurs du présent texte.

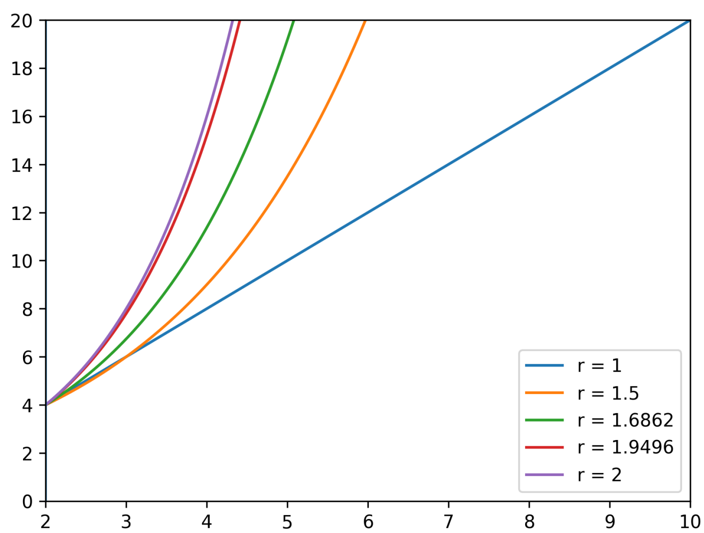

FIGURE 3 – Graphe de $H_{r+1}(2, b)$ pour $r = 1,\ 1{,}5,\ \approx 1{,}6862,\ \approx 1{,}9496,\ 2$ pour b entre 0 et 10

Bibliographie

[1] Wilhelm Ackermann : Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. *Math. Ann.*, 99(1):118–133, 1928.

[2] Albert A. Bennett : Note on an operation of the third grade. *Ann. of Math. (2)*, 17(2):74–75, 1915.

[3] Jonathan M. Borwein et Peter B. Borwein : The Way of All Means. *The American Mathematical Monthly*, 94(6):519–522, 1987.

[4] Jonathan M. Borwein et Peter B. Borwein : *Pi and the AGM : A study in analytic number theory and computational complexity*, volume 4 de *Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

[5] Augustin Louis Cauchy : *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Imprimerie royale, 1821.

[6] José Crespo et Francisco Javier Montáns : Fractional Mathematical Operators and Their Computational Approximation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016(1):4356371, 2016.

[7] Miguel De Carvalho : Mean, what do you Mean ? *The American Statistician*, 70(3):270–274, 2016.

[8] Bruno De Finetti : *Sul concetto di media*. Istituto italiano degli attuari, 1931.

[9] Dorothy M. E. Foster et George M. Phillips : A generalization of the Archimedean double sequence. *J. Math. Anal. Appl.*, 101(2):575–581, 1984.

[10] Carl Friedrich Gauss : *Werke*, volume 3. Göttingen, 1866.

[11] Reuben L. Goodstein : Transfinite ordinals in recursive number theory. *J. Symbolic Logic*, 12:123–129, 1947.

[12] Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood et George Pólya : *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.

[13] Thomas L. Heath : *A history of Greek mathematics. Vol. I.* Dover Publications, Inc., New York, 1981. From Thales to Euclid, Corrected reprint of the 1921 original.

[14] Thomas L. Heath : *A history of Greek mathematics. Vol. II.* Dover Publications, Inc., New York, 1981. From Aristarchus to Diophantus, Corrected reprint of the 1921 original.

[15] Reuben Hersh : *What is mathematics, really ?* Oxford University Press, New York, 1997.

[16] Carl Huffman : *Archytas of Tarentum : Pythagorean, philosopher and mathematician king*. Cambridge University Press, 2005.

[17] Carrie S. Jenkins : *Grounding concepts : An empirical basis for arithmetical knowledge*. Oxford University Press, 2008.

[18] J. L. W. V. Jensen : Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.*, 30(1):175–193, 1906.

[19] Donald E. Knuth : Mathematics and Computer Science : Coping with Finiteness : Advances in our ability to compute are bringing us substantially closer to ultimate limitations. *Science*, 194(4271):1235–1242, 1976.

[20] Andreï N. Kolmogorov : *Sur la notion de la moyenne*, volume 12. Atti della Academia Nazionale dei Lincei, 1930.

[21] Derrick H. Lehmer : On the compounding of certain means. *J. Math. Anal. Appl.*, 36:183–200, 1971.

[22] Saunders Mac Lane : *Mathematics, form and function.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[23] Penelope Maddy : *Realism in mathematics.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990.

[24] Pietro Muliere et Giovanni Parmigiani : Utility and means in the 1930s. *Statistical Science*, pages 421–432, 1993.

[25] Mitio Nagumo : Über eine klasse der mittelwerte. *In Japanese journal of mathematics : transactions and abstracts*, volume 7, pages 71–79. The Mathematical Society of Japan, 1930.

[26] Frank Nielsen et Richard Nock : Generalizing jensen and bregman divergences with comparative convexity and the statistical bhattacharyya distances with comparable means. *arXiv preprint arXiv :1702.04877*, 2017.

[27] Paweł Pasteczka : Scales of quasi-arithmetic means determined by an invariance property. *Journal of Difference Equations and Applications*, 21(8):742–755, 2015.

[28] Giuseppe Peano : Arithmetices principia : Nova Methodo Exposita. *Fratres Bocca*, 1889.

[29] Rózsa Péter : Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. *Math. Ann.*, 111(1):42–60, 1935.

[30] Raphael M. Robinson : Recursion and double recursion. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:987–993, 1948.

[31] Constantin A. Rubtsov : Algorithms ingredients in a set of algebraic operations. *Cybernetics*, 3:111–112, 1989.

[32] Constantin A. Rubtsov : New mathematical objects. *BelGTASM, NPP Informavtosim*, 1996.

[33] Constantin A. Rubtsov et Giovanni F. Romerio : Ackermann's function and new arithmetical operations. *Rotary Saluzzo*, 2004.

[34] Constantin A. Rubtsov et Giovanni F. Romerio : Notes on hyper-operations. *NKS Forum III*, 2006.

[35] Michael Segre : Peano's axioms in their historical context. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 48(3-4):201–342, 1994.

[36] Nozer D. Singpurwalla et Boya Lai : What Does the "Mean" Really Mean ? *arXiv preprint arXiv :2003.01973*, 2020.

[37] H. Paul Williams : What lies between + and × (and beyond) ? 2006.