

La norme des L -matrices

Ludovick Bouthat

Université Laval

22 octobre 2024

Remerciements

Cette recherche a été menée en collaboration avec le Pr. Javad Mashreghi. Elle a été réalisé en partie grâce à l'aide financière d'une bourse de recherche du CRSNG.

Plan de l'exposé

- ① Définitions et exemples
- ② Résultats sur les L -matrices
- ③ The main results

Le contexte

- $\ell^2 := \{x : \|x\|_2 < \infty\}$, où

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

Le contexte

- $\ell^2 := \{x : \|x\|_2 < \infty\}$, où

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

- $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ un opérateur linéaire.

Les matrices infinies

Tout opérateur linéaire $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ admet une représentation *unique* comme matrice infinie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

où $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$.

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A , représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A , représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?
- Si oui, quelle est la valeur de sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} ?$$

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A , représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?
- Si oui, quelle est la valeur de sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} ?$$

- Si la valeur exacte de $\|A\|$ n'est pas connue, quelles bornes supérieures peuvent être obtenues ?

Exemple : La matrice de Hilbert

Approximation de fonctions continues

- Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Exemple : La matrice de Hilbert

Approximation de fonctions continues

- Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Question : Quel polynôme de degré n approxime le mieux la fonction f sur $[0, 1]$ par rapport à la norme $\mathcal{L}^2([0, 1])$?

Exemple : La matrice de Hilbert

Approximation de fonctions continues

- Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Question : Quel polynôme de degré n approxime le mieux la fonction f sur $[0, 1]$ par rapport à la norme $\mathcal{L}^2([0, 1])$?

$$\text{minimiser} \quad \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n c_k x^k - f(x) \right)^2 dx.$$

Exemple : La matrice de Hilbert

La solution

Hilbert (1894) a montré que les coefficients du polynôme sont obtenus en résolvant le système d'équations linéaires

$$H_{n+1}c = b,$$

où $c = (c_0, \dots, c_n)^{tr}$ et $b = (b_0, \dots, b_n)^{tr}$ est défini par $b_k = \int_0^1 f(x)x^k dx$ et H_{n+1} est la *matrice de Hilbert* d'ordre $n+1$.

Exemple : La matrice de Hilbert

La matrice de Hilbert d'ordre n

Definition

La *matrice de Hilbert* d'ordre n est la matrice

$$H_n := \left[\frac{1}{i+j+1} \right]_{0 \leq i, j \leq n-1}.$$

Example

La matrice de Hilbert d'ordre 4 est la matrice

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Exemple : La matrice de Hilbert

La matrice de Hilbert

Definition

La *matrice de Hilbert* (infinie) est la matrice

$$H := \left[\frac{1}{i+j+1} \right]_{i,j \geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Exemple : La matrice de Hilbert

La matrice de Hilbert

Definition

La *matrice de Hilbert* (infinie) est la matrice

$$H := \left[\frac{1}{i+j+1} \right]_{i,j \geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- H est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|H\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \pi$.

Exemple : La matrice de Cesàro

Definition

La *matrice de Cesàro* C est la matrice

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Exemple : La matrice de Cesàro

Definition

La *matrice de Cesàro* C est la matrice

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- C est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|C\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 2$.

Motivation

Multiplicateurs d'espaces de fonctions

- Soit X un espace de Banach de fonctions analytiques sur le disque unité $\mathbb{D}$.

Motivation

Multipicateurs d'espaces de fonctions

- Soit X un espace de Banach de fonctions analytiques sur le disque unité $\mathbb{D}$.

Caractériser les *multipicateurs* de X , i.e., les fonctions h telles que $h * f \in X$ pour tout $f \in X$, est essentiel dans l'étude des espaces de fonction pour identifier, p. ex., l'ensemble des zéros, les sous-espaces invariants, les éléments cycliques, etc.

Motivation

Caracterization of the Hadamard multipliers of $\mathcal{D}_\omega$

Théorème (Mashreghi–Ransford, 2019)

Si ω est une fonction superharmonique, alors $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ est un multiplicateur d'Hadamard pour l'espace de Dirichlet pondéré $\mathcal{D}_\omega$ si et seulement si la L -matrice

$$T_h := [c_{n+1}] - [c_n] = \begin{pmatrix} c_1 - c_0 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_2 - c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_3 - c_2 & c_3 - c_2 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

agit comme un opérateur borné sur ℓ^2 .

Les L -matrices

Definition

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres (positifs). Une L -matrice est une matrice infinie de la forme

$$A := [a_n] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Les L -matrices

Definition

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres (positifs). Une L -matrice est une matrice infinie de la forme

$$A := [a_n] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Question : Sous quelles conditions la L -matrice $[a_n]$ agit comme un opérateur borné sur ℓ^2 , et quelle est sa norme ?

Une condition nécessaire

Remarquons que

$$\begin{aligned}\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}^2 &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq \frac{\|Ae_n\|_2^2}{\|e_n\|_2^2} \\ &= (n+1)|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + \dots \\ &\geq (n+1)|a_n|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, pour que $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < \infty$, il est nécessaire que

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

L'optimalité de cette condition

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où

$$a_n = \begin{cases} 1/n^\alpha & \text{si } n = 2^k, k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\alpha > 1/2$. Alors

$$\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2 \cdot 2^k + 1) a_{2^k}^2 \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(2\alpha-1)k}} < \infty.$$

L'insuffisance de la condition

Soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \infty$ et A n'est pas un opérateur borné sur ℓ^2 .

L'insuffisance de la condition

Soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \infty$ et A n'est pas un opérateur borné sur ℓ^2 . Il suffit de considérer la suite de vecteurs

$$x_n = (1^\alpha, 2^\alpha, \dots, n^\alpha, 0, 0, \dots)^{tr}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Une condition suffisante

Un cas particulier

Theorem (B.–Mashreghi, 2021)

Soit $A = [a_n]$ une L -matrice telle que $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite strictement décroissante. Si

$$\Delta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n(a_{n-1} + a_n)}{a_{n-1} - a_n} < \infty,$$

alors A est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \leq 2 \max(a_0, \Delta)$.

Une condition suffisante

Le cas général

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Soit $A = [a_n]$ une L -matrice et $(\delta_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre positifs strictement décroissants. Si

$$\Delta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n} < \infty,$$

alors A est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \leq \max(a_0 + \delta_0, \Delta)$.

Caractérisation complète de $O(n^{-\alpha})$

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où $a_n = O(1/n)$. Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < \infty$.

Caractérisation complète de $O(n^{-\alpha})$

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où $a_n = O(1/n)$. Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < \infty$.

Corollary (B.–Mashreghi, 2021)

soit $A = [a_n]$ une L -matrice. La condition $a_n = O(1/n^\alpha)$ est

- *nécessaire si $\alpha = \frac{1}{2}$;*
- *ni nécessaire, ni suffisante si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$;*
- *suffisante si $\alpha = 1$;*

pour que A soit un opérateur borné sur ℓ^2 .

Démonstration de la suffisante de $a_n = O(n^{-1})$

Soit $f(a_n, \delta_n) := \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n}$.

Démonstration de la suffisante de $a_n = O(n^{-1})$

Soit $f(a_n, \delta_n) := \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n}$.

- $(a_n)_{n \geq 0} = O\left(\frac{1}{n}\right) \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} f(a_n, \delta_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{K}{n}, \delta_n\right);$

Démonstration de la suffisante de $a_n = O(n^{-1})$

Soit $f(a_n, \delta_n) := \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n}$.

- $(a_n)_{n \geq 0} = O\left(\frac{1}{n}\right) \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} f(a_n, \delta_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{K}{n}, \delta_n\right);$
- $\delta_n := \frac{K}{n};$

Démonstration de la suffisante de $a_n = O(n^{-1})$

Soit $f(a_n, \delta_n) := \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n}$.

- $(a_n)_{n \geq 0} = O\left(\frac{1}{n}\right) \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} f(a_n, \delta_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{K}{n}, \delta_n\right);$
- $\delta_n := \frac{K}{n};$
- $\sup_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{K}{n}, \frac{K}{n}\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} 2K \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 4K < \infty.$



La L -matrice de Hilbert

Definition

Soit $s \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. La L -matrice de Hilbert est la matrice

$$L_s := \left[\frac{1}{\max\{i, j\} + s} \right]_{i, j \geq 0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{1+s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4$.

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4$.

- Soit $\delta_n := (n + s + \frac{1}{2})^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} &\leq \sup \left\{ a_0 + \delta_0, \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n} \ (n \geq 1) \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{2}}, 4 - \frac{1}{4(n + s)^2} \ (n \geq 1) \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s + \frac{1}{2}}, 4 \right\} = 4.\end{aligned}$$

Un phénomène intrigant

- $\|\mathcal{L}_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \geq \|\mathcal{L}_s \mathbf{e}_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}.$

Un phénomène intrigant

- $\|\mathcal{L}_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \geq \|\mathcal{L}_s \mathbf{e}_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}.$

Question : Quelle est la valeur de $s_0 := \inf\{s > 0 : \|\mathcal{L}_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4\}$?

Un phénomène intrigant

$$\bullet \|\mathcal{L}_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \geq \|\mathcal{L}_s \mathbf{e}_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}.$$

Question : Quelle est la valeur de $s_0 := \inf\{s > 0 : \|\mathcal{L}_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4\}$?

Théorème (B.–Mashreghi, 2022)

Soit $s_0 = \inf\{s > 0 : \|\mathcal{L}_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4\}$. Alors

$$0.347 \approx \frac{\sqrt{48 + 18\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 3}{12} \leq s_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.353.$$

Une observation importante

Theorem (Štampach, 2021)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels tels que $a_{n+1} \neq a_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors l'inverse formel de la L -matrice $A = [a_n]$ est la matrice de Jacobi

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & -b_0 & & & \\ -b_0 & b_0 + b_1 & -b_1 & & \\ & -b_1 & b_1 + b_2 & -b_2 & \\ & & -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

où $b_n := (a_n - a_{n+1})^{-1}$.

La valeur exacte de s_0

- Soit ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| z\right)$ la fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2$.

Théorème (Štampach, 2021)

Soit $s_0 = \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4\}$. Alors s_0 est l'unique racine positive de la fonction

$$s \mapsto {}_3F_2\left(\begin{matrix} -1/2, 1/2, 3/2 \\ 1, s + 1/2 \end{matrix} \middle| 1\right).$$

Numériquement, on a $s_0 \approx 0.349086$.

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 2)

Théorème (Štampach, 2021)

Si $0 < s < s_0$, alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \frac{4}{1-4x^2(s)}$, où $x(s)$ est l'unique racine dans l'intervalle $(0, 1/2)$ de la fonction

$$t \mapsto {}_3F_2\left(\begin{matrix} t - 1/2, t + 1/2, t + 3/2 \\ 2t + 1, t + s + 1/2 \end{matrix} \middle| 1\right).$$

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 2)

Théorème (Štampach, 2021)

Si $0 < s < s_0$, alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \frac{4}{1-4x^2(s)}$, où $x(s)$ est l'unique racine dans l'intervalle $(0, 1/2)$ de la fonction

$$t \mapsto {}_3F_2\left(\begin{matrix} t - 1/2, t + 1/2, t + 3/2 \\ 2t + 1, t + s + 1/2 \end{matrix} \middle| 1\right).$$

Remark

Les méthodes de Štampach fonctionnent également pour les s négatifs si $s \notin -\mathbb{N}_0$. Dans ce cas, il a conjecturé qu'il existe au plus deux valeurs propres distinctes de L_s .

Une extension aux espaces ℓ^p

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Si $s \geq 1$ et $1 < p < \infty$, alors $\|L_s\|_{\ell^p \rightarrow \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}$.

Une extension aux espaces ℓ^p

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Si $s \geq 1$ et $1 < p < \infty$, alors $\|L_s\|_{\ell^p \rightarrow \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}$.

Question : Quelle est la valeur de $s_0(p) := \inf \{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^p \rightarrow \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}\}$?

References

-  Mashreghi, J., Ransford, T. (2019). Hadamard multipliers on weighted Dirichlet spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 91(6), 1-13.
-  Bouthat, L., Mashreghi, J. (2021) The norm of an infinite L -matrix. *Operators and Matrices*. 15(4) : 47-58
-  Bouthat, L., Mashreghi, J. (2021) L -Matrices with Lacunary Coefficients. *Operators and Matrices*. 15(65) : 1045-1053
-  Bouthat, L., Mashreghi, J. (2022) The critical point and the p -norm of the Hilbert L -matrix. *Linear Algebra and Its Applications*. 634 : 1-14
-  Štampach, F. (2022) The Hilbert L -matrix. arXiv preprint arXiv:2107.10694.