
Article

Les pavages apériodiques du plan et le *einstein*

JEAN-MARC ADO

Département de mathématiques et de statistique

Université Laval

Jean-Marc.Ado.1@ulaval.ca

FRÉDÉRIC MORNEAU-GUÉRIN

Département Éducation

TÉLUQ

Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

Résumé

Au mois de mars 2023, la découverte par un quatuor de mathématiciens (amateur dans un cas et professionnels dans les trois autres cas) d'une forme géométrique aux propriétés remarquables a suscité un vif intérêt tant au sein de la communauté mathématique que dans les médias grand public. Dans ce texte, nous replacerons cette intéressante découverte dans le contexte qui en révèle le sens.

Mots clés : Pavages du plan, pavages apériodiques, pavages monoédriques

Classification mathématique par matières (MSC2020) : 05-01, 01A60, 05B45, 52C20

1 Introduction : le problème du pavage du plan

De la préhistoire jusqu'à nos jours, le problème du recouvrement d'une surface plane à l'aide de certaines formes géométriques évocatrices ou abstraites, et ce, sans chevauchement n'a eu de cesse d'intriguer et de captiver. De tels recouvrements sans chevauchement sont appelés *pavage* ou *tessellation*¹. Il est donc approprié, ici, de parler du problème du pavage du plan.

1. Ce terme vient du latin *tessellae* qui signifie mosaïque.

Déjà, les tribus nomades vivant sous la tente s'y intéressaient en pratiquant l'art du tissage de tapis. Au fil de l'histoire, diverses sensibilités culturelles ou religieuses favorisèrent, consolidèrent et approfondirent cet intérêt (à ce sujet, voir [2]). Mais il ne fait aucun doute que ce sont les Grecs de l'Antiquité qui initièrent son étude sérieuse, méthodique, abstraite, et donc mathématique.

Avant d'aller plus loin, il convient de proposer une définition mathématique plus rigoureuse de ce qu'est un pavage du plan euclidien.

Un *pavage du plan* est une famille au plus dénombrable $\mathcal{P} = \{T_1, T_2, \dots\}$ de sous-ensembles non vides et fermés du plan euclidien appelés *tuiles* telle que l'union de tous les T_i est le plan tout entier et ayant des intérieurs deux à deux disjoints.

À elle seule, la condition de dénombrabilité exclut les familles dont chaque tuile est d'aire nulle, comme les familles de points isolés, d'ensembles de points, voire de segments de droite. Toutefois, la définition ci-dessus demeure suffisamment permissive pour inclure des familles dont une ou certaines des tuiles ont des propriétés singulières comme :

- être disconnexe (ne pas être d'un seul tenant) ;
- avoir un complément qui est disconnexe (comme c'est le cas, par exemple, pour une couronne circulaire) ;
- être d'une forme telle que le retrait d'un unique point suffit à rendre la tuile disconnexe ;
- être composée en tout ou en partie d'arcs de courbe ;
- être non bornée (avoir une aire infinie).

Il s'avèrera utile, dans ce qui suit, de circonscrire l'univers de notre discours aux seuls pavages du plan vérifiant une condition additionnelle permettant d'éliminer, d'un seul coup de baguette magique, ces cas pathologiques. Cette condition s'énonce ainsi : chaque tuile doit être un ensemble dont la frontière est une courbe continue fermée (c'est-à-dire que ses extrémités sont confondues) et simple (c'est-à-dire que la courbe ne se recoupe pas elle-même)².

Il découle de la définition d'un pavage du plan donnée ci-dessus et complétée de la condition additionnelle que nous venons de présenter que l'intersection de toute collection finie et non triviale de tuiles d'un pavage donné a nécessairement une aire nulle. Une telle intersection est composée d'un ensemble (possiblement vide) de points isolés appelés *sommets* et d'un ensemble (possiblement vide) d'arcs appelés *arêtes*. De part et d'autre d'une arête se trouvent deux tuiles distinctes. Aux deux extrémités d'une arête on retrouve deux sommets. Un sommet donné est l'extrémité d'un certain nombre d'arêtes ; ce nombre est appelé le *degré* du sommet.

Notre intérêt, dans ce qui suit, portera principalement, mais non exclusivement, sur les pavages du plan dont toutes les tuiles sont des polygones³. De tels pavages sont dits *polygonaux*.

On dit d'un pavage polygonal du plan qu'il est *arête-contre-arête* si les sommets du pavage coïncident avec les coins des polygones. Autrement dit, dans un pavage polygonal du plan qui

2. Plus précisément, la frontière doit être une courbe de Jordan, c'est-à-dire l'image d'une application continue et injective $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que (a) $\gamma(0) = \gamma(1)$ et (b) $0 < s \leq t < 1$ et $\gamma(t) = \gamma(s)$ entraînent $s = t$.

3. Rappelons qu'un polygone est une figure géométrique plane formée d'une suite cyclique de segments de droites appelés *côtés* dont les extrémités sont appelées *coins*.

est arête-contre-arête, deux tuiles peuvent soit être entièrement disjointes, soit avoir un sommet en commun, soit partager une arête entière.

Une conséquence immédiate de ce qui précède est que le degré de tout sommet d'un pavage polygonal du plan qui est arête-contre-arête est au moins 3.

Notre objectif, dans cet article, est de présenter la découverte fascinante réalisée récemment par un quatuor de mathématiciens (dilettante⁴ dans un cas et professionnels dans les trois autres) et révélée au monde entier en mars 2023 dans une prépublication qui a fait grand bruit, y compris dans les médias de masse. Dans ce texte, nous replacerons cette intéressante découverte dans le contexte historique et disciplinaire qui en révèle le sens.

2 Le problème des pavages monoédriques du plan

Nous l'avons vu, l'ensemble des tuiles composant un pavage du plan caractérise ce pavage. Bien entendu, savoir quelles sont les tuiles ne nous dit pas comment celles-ci sont assemblées et il existe bien souvent plusieurs façons de les emboîter. Il faut donc veiller à ne pas surinterpréter l'usage qui est fait ici du terme *caractérisation*⁵.

Étant admis que la caractérisation des pavages n'assure pas une description assez fine pour garantir l'unicité de la représentation visuelle, on comprend donc qu'on ne perdra pas en généralité si l'on simplifie d'une manière ou d'une autre cette caractérisation lorsque cela est possible. Or, nous allons maintenant voir qu'il s'avère que de telles simplifications sont possibles lorsqu'un pavage fait intervenir plusieurs tuiles, en définitive, identiques. On entend par là que ces tuiles peuvent être superposées par l'exécution de toute isométrie affine. Ces isométries comprennent les rotations, les translations, les réflexions ou toute composée d'un nombre fini de celles-ci.

Étant donné un pavage $\mathcal{P} = \{T_1, T_2, \dots\}$, nous nommerons *prototuiles* associées au pavage $\mathcal{P}$ l'ensemble des représentants des classes d'équivalences de $\{T_1, T_2, \dots\}$ par rapport à la relation d'isométrie du plan euclidien.

Un pavage du plan est qualifié de *monoédrique* s'il a une et une seule prototuille ou, pour le dire autrement, si toutes ses tuiles sont isométriques et donc superposables.

Dans ce qui suit, nous esquisserons les rudiments de la théorie du pavage du plan en discutant des conditions sous lesquelles il est possible de réaliser des pavages monoédriques avec un polygone en guise de prototuille.

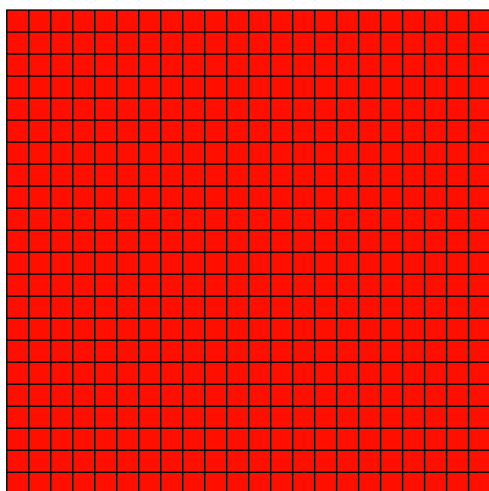
4. Les auteurs partagent l'avis de l'un des arbitres anonymes à l'effet que le fait que la contribution de non-professionnels soit acceptée et reconnue à sa juste valeur est un signe que l'écosystème mathématique est en relative bonne santé. Les contributions y sont jugées au mérite et non en fonction de l'identité de celui ou de celle qui en est à l'origine.

5. Un parallèle peut être établi avec la théorie des graphes où le fait de connaître l'ensemble des sommets et des arêtes d'un graphe *caractérise* ce graphe bien que de nombreuses représentations visuelles existent en général.

2.1 Le cas des polygones réguliers

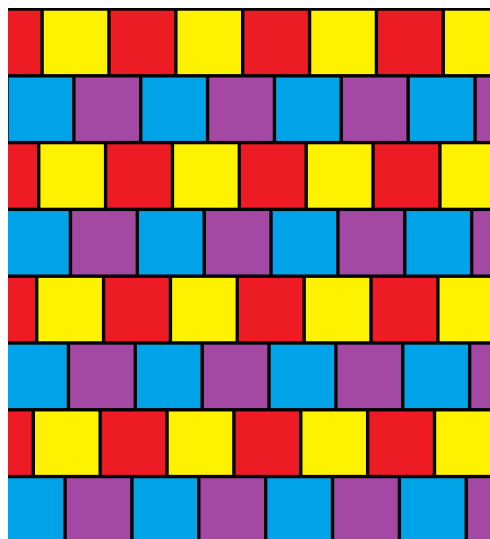
Penchons-nous d'abord sur le cas des pavages monoédriques du plan avec comme unique prototuille un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles internes ont la même mesure. De tels polygones équilatéraux et équiangles sont dits *réguliers*.

Comme tout carreleur le sait, il est possible (et très facile) de réaliser un pavage monoédrique du plan avec le carré comme prototuille. De tels pavages peuvent être de type arête-contre-arête ou non.



(a) Amorce d'un pavage arête-contre-arête du plan avec le carré en guise de prototuille.

Source : Tom Ruen — CC BY-SA 4.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1-uniform_n5.svg



(b) Amorce d'un pavage non arête-contre-arête du plan avec le carré en guise de prototuille.

Source : Tom Ruen — CC BY-SA 4.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Square_brick_pattern.png

FIGURE 1 – Deux exemples d'amorce d'un pavage monoédrique du plan avec le carré en guise de prototuille.

Si la possibilité de réaliser un pavage monoédrique du plan avec le carré (c'est-à-dire le quadrilatère régulier) comme prototuille est connue de tous les carreleurs, la possibilité de plutôt réaliser un pavage monoédrique du plan avec l'hexagone régulier en guise de prototuille est quant à elle connue de toutes les abeilles ouvrières depuis la nuit des temps. L'intérieur d'une ruche (une surface complexe qui n'en demeure pas moins localement affine) est en effet composée de rayons formés par des alvéoles hexagonales de cire qui servent au stockage du miel. Le pavage monoédrique du plan avec l'hexagone régulier comme prototuille se manifeste également dans de nombreux matériaux bidimensionnels cristallins comme le graphène.

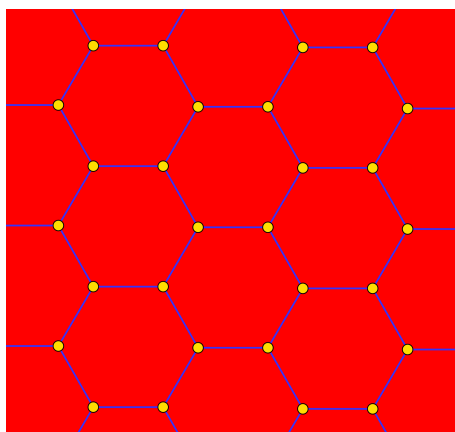
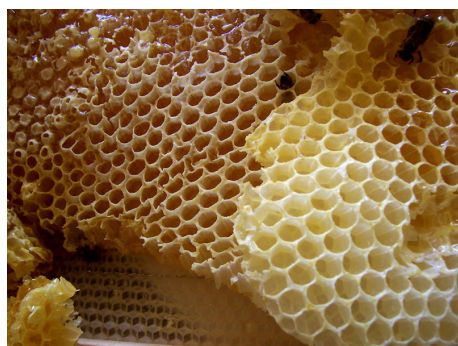


FIGURE 2 – Amorce de pavage monoédrique du plan avec l’hexagone régulier en guise de prototuille.

Source : Tilman Piesk — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.

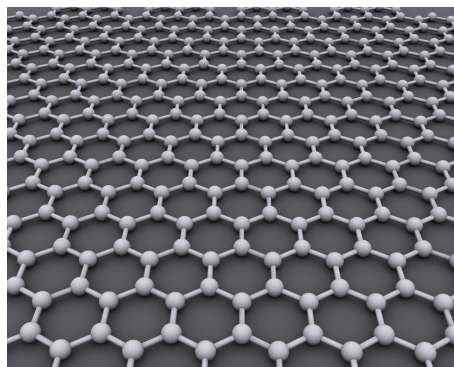
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiling_6_simple.svg



(a) Ensemble d’alvéoles d’abeilles construites sur un treillis.

Source : Merdal — CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Honey_comb.jpg



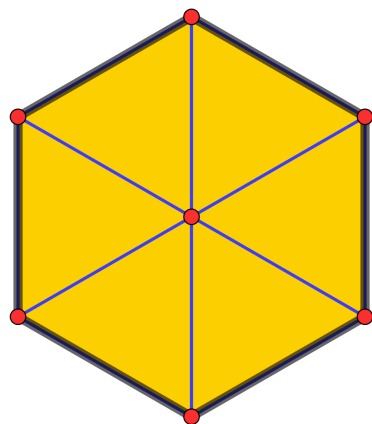
(b) Représentation graphique du graphène.

Source : AlexanderAIUS — CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Graphen.jpg>

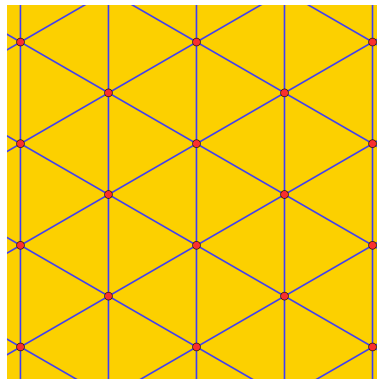
FIGURE 3 – Deux exemples de pavages hexagonaux dans le monde matériel

Notons qu’il existe une relation étroite entre les pavages monoédriques du plan avec le triangle équilatéral comme prototuille et ceux dont la prototuille est l’hexagone régulier. Cette relation vient de ce que tout hexagone régulier peut être partitionné en six triangles équilatéraux.



(a) Partition d'un hexagone régulier en six triangles équilatéraux.

Source : Tilman Piesk — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiling_3_vertfig.svg



(b) Amorce d'un pavage monoédrique du plan avec le triangle équilatéral en guise de prototuille.

Source : Tilman Piesk — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiling_3_simple.svg

FIGURE 4 – Le pavage monoédrique du plan avec le triangle équilatéral en guise de prototuille.

Le cas du pentagone régulier exige une attention plus pointue. Commençons par spécifier que les angles intérieurs d'un pentagone régulier mesurent $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Considérons un instant un pavage monoédrique du plan de type arête-contre-arête avec le pentagone régulier comme prototuille. Tout sommet d'un tel pavage est le point de rencontre d'un certain nombre de pentagones. Comme tout pavage du plan, ce pavage pentagonal couvre le plan sans espace ni chevauchement. Par conséquent la somme des mesures des angles formés par deux arêtes incidentes à ce sommet et appartenant à une même tuile est de 360° . Or, toutes ces tuiles étant des pentagones réguliers, ces angles mesurent tous 108° . Mais 108 n'étant pas un diviseur de 360 , on aboutit à une évidente contradiction. Par conséquent, l'hypothèse voulant qu'il existe un pavage du plan de type arête-contre-arête avec le pentagone régulier comme prototuille est insoutenable et doit donc être rejetée. Quant à la possibilité qu'il existe un pavage qui ne serait pas arête-contre-arête, cela peut être balayé du revers de la main en raison de la convexité de la totalité des tuiles et du fait que les angles mesurent tous strictement plus de 90° .

En procédant comme dans le cas du pentagone régulier, on peut assez simplement exclure la possibilité de réaliser un pavage monoédrique du plan avec un polygone régulier à $n \geq 7$ côtés en guise de prototuille, car la mesure des angles intérieurs d'un polygone régulier à n côtés, à savoir $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, n'est pas un diviseur de 360 . En effet,

$$180^\circ > \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \geq \frac{(7-2) \cdot 180^\circ}{7} \approx 128.57^\circ > 120^\circ.$$

La caractérisation des polygones réguliers pouvant servir de prototuille afin de réaliser des pavages monoédriques du plan étant maintenant achevée, il apparaît naturel de nous intéresser au cas où la condition de régularité est abandonnée. Le retrait de cette condition restrictive donne lieu à une théorie significativement plus complexe mais beaucoup plus riche. Nous verrons qu'il est possible d'en arriver à une compréhension exhaustive en ce qui concerne les polygones *convexes*, à savoir les polygones dont tous les angles intérieurs ont une mesure inférieure à 180° . Le cas des polygones non convexes, lui, demeure à ce jour imparfaitement compris.

2.2 Le cas des polygones non réguliers convexes

Nous avons vu plus haut qu'il est très facile de réaliser un pavage monoédrique du plan avec le carré comme prototuille. De façon quelque peu surprenante, il appert qu'il est tout aussi facile de réaliser un pavage monoédrique du plan avec n'importe quel quadrilatère, et ce, qu'il soit convexe ou non. En effet, il suffit d'apparier un quadrilatère à l'endroit avec un quadrilatère ayant subi une rotation de 180° et les mettant côte-à-côte le long d'un côté commun. En alignant de telles paires, on forme ensuite des rangées de tuiles qui alternent. Enfin, en emboîtant ces rangées (une fois de plus en mettant côte-à-côte les côtés communs), on parvient à recouvrir le plan tout entier. De plus, puisque deux triangles – l'un à l'endroit, l'autre à l'envers (c'est-à-dire renversé par une rotation de 180°) – peuvent être assemblés de manière à former un parallélogramme, on conclut aisément que tout triangle peut servir de prototuille à la base d'un pavage monoédrique du plan.

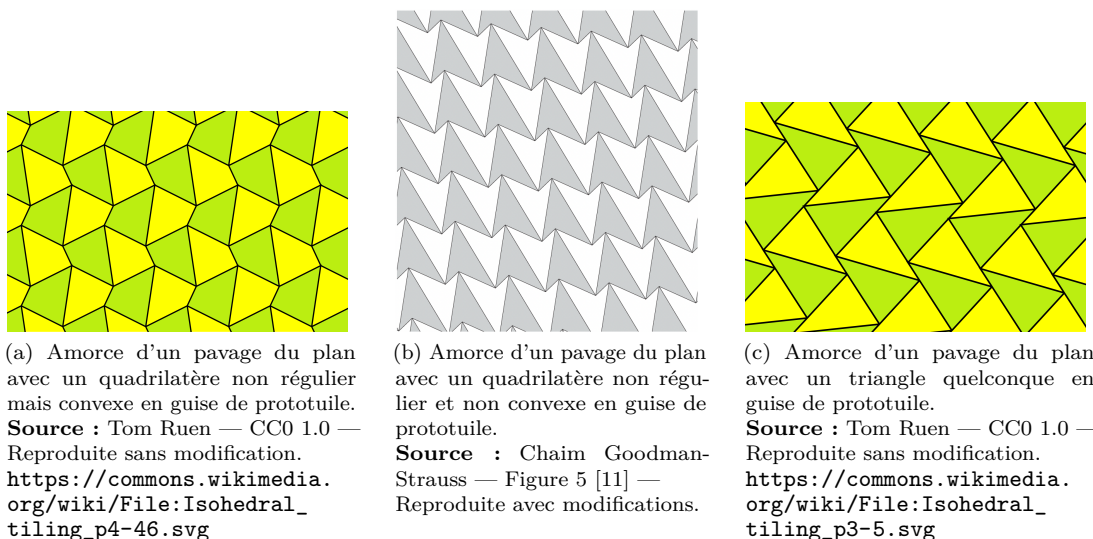
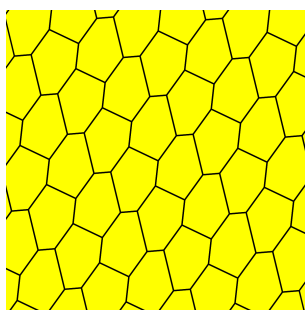


FIGURE 5 – Trois exemples d'amorce d'un pavage monoédrique du plan avec des polygones non réguliers comme prototuites.

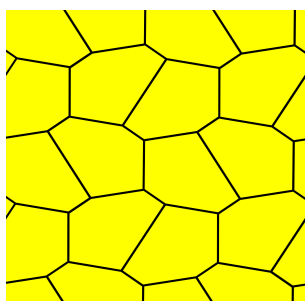
Dans sa thèse de doctorat publiée en 1918 [24], le mathématicien allemand Karl Reinhardt montra qu'un hexagone convexe permet de réaliser un pavage monoédrique du plan si et seulement si il vérifie l'un ou l'autre des trois ensembles de contraintes que voici :

1. Il y a trois angles successifs dont la somme des mesures est de 360° et les arêtes qui ne sont incidentes qu'à un et un seul de ces trois angles sont isométriques ;
2. Il y a trois angles (dont deux et seulement deux sont successifs) dont la somme des mesures est de 360° et les arêtes qui ne sont incidentes qu'à un et un seul de ces deux angles successifs sont isométriques à l'une des arêtes incidentes au troisième angle susmentionné de telle sorte, toutefois, qu'il n'y ait pas deux arêtes successives, parmi celles que nous avons mentionnées, qui soient isométriques ;
3. Il y a trois angles non successifs qui mesurent 120° et les deux arêtes se rencontrant à l'un de ces trois angles sont isométriques ;



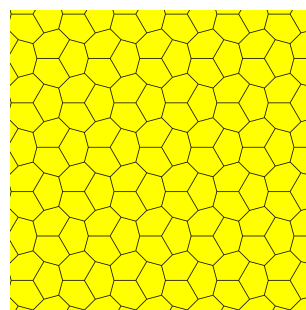
(a) Exemple de pavage hexagonal où la prototuille vérifie la contrainte 1.

Source : Tom Ruen — CC0 1.0 — Reproduite sans modification.
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P6-type1.svg>



(b) Exemple de pavage hexagonal où la prototuille vérifie la contrainte 2.

Source : Tom Ruen — CC0 1.0 — Reproduite sans modification.
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P6-type2.svg>



(c) Exemple de pavage hexagonal où la prototuille vérifie la contrainte 3.

Source : Tom Ruen — CC0 1.0 — Reproduite sans modification.
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P6-type3.svg>

FIGURE 6 – Un exemple d'amorce d'un pavage monoédrique du plan pour chacune des trois familles d'hexagones non réguliers comme prototuelles.

Reinhardt présenta également cinq types distincts de pentagones convexes non réguliers permettant tous de réaliser un pavage monoédrique du plan. Sans se prononcer catégoriquement sur la question, Reinhardt semblait d'une certaine façon suggérer que ces cinq types constituaient en fait une liste exhaustive. Toutefois, cinquante ans plus tard, l'ingénieur et mathématicien Richard Brandon Kershner, de l'Université Johns Hopkins, annonça avoir trouvé trois nouveaux types de pentagones convexes non réguliers permettant de réaliser un pavage monoédrique du plan [16].

Dans la foulée de cette découverte inattendue, Martin Gardner, le célèbre vulgarisateur mathématique et chroniqueur pour le compte du magazine *Scientific American*, consacra sa chronique *Mathematical Games* de juillet 1975 à diffuser auprès de son vaste auditoire de plus d'un million

de lecteurs à travers le monde les trois nouveaux types de pavages pentagonaux [8]. Dans son texte, Gardner fit écho à une affirmation de Kershner suivant laquelle la liste des huit types de pentagones convexes non réguliers identifiés par Reinhardt et lui-même à un demi-siècle d'intervalle serait exhaustive. Or, moins d'un mois plus tard, Gardner reçut une lettre de la part d'un informaticien dénommé Richard E. James III. Ce dernier indiquait comment réaliser un pavage monoédrique du plan avec un type de pentagone convexe non régulier qui avait échappé à l'attention de Reinhardt et Kershner. Gardner dut donc informer son lectorat, dans sa chronique de décembre 1975, que le problème de la classification de tous les types de pavages monoédriques du plan avec des pentagones convexes n'était en fin de compte manifestement pas encore résolu [6].

Cette annonce éveilla la curiosité et l'intérêt d'une lectrice nommée Marjorie Ruth Rice. Intriguée par cette découverte inattendue, cette mère au foyer ayant un esprit méthodique et un sens artistique aiguisé se lança dans l'exploration des possibilités de recouvrir le plan cartésien de pentagones convexes non réguliers identiques, et ce, sans espace ni chevauchement. En février 1976, raisonnablement convaincue d'avoir découvert un type de pavage inédit, Marjorie Rice écrivit à Martin Gardner. Incapable de valider par lui-même les prétentions de Rice, Gardner se tourna vers la mathématicienne américaine Doris J. Schattschneider, une spécialiste de la théorie des pavages. Celle-ci se montra d'abord sceptique mais, au terme d'un examen minutieux qui nécessita qu'elle se familiarise avec la notation cryptique élaborée par Rice, elle fut en mesure de confirmer que la mathématicienne amateur avait bel et bien réalisé une découverte inédite [29].

Rice ne s'arrêta pas là. Elle découvrit trois autres types de pentagones convexes non réguliers pavant le plan, portant le grand total à treize. Un quatorzième type fut découvert en 1985 par Rolf Stein, un étudiant allemand [30]. Enfin, un quinzième type fut identifié en 2015 par Casey Mann, Jeniffer McLoud-Mann et David Von Derau, deux professeurs de mathématiques américains et leur étudiant [19].

Pour la troisième fois dans l'histoire, certains spécialistes de la théorie des pavages du plan estiment qu'il se pourrait que la liste des types de pavages monoédriques du plan avec des pentagones convexes non réguliers connus soit exhaustive. Contrairement aux deux précédentes occasions, on dispose cette fois de certaines données probantes. En effet, Michäel Rao, de l'École nationale supérieure de Lyon, a soumis en mai 2017 une longue et complexe preuve mathématique assistée par ordinateur pointant vers l'exhaustivité de la liste [23]. Accessible en ligne, la preuve demeure sujette à validation par la communauté mathématique.

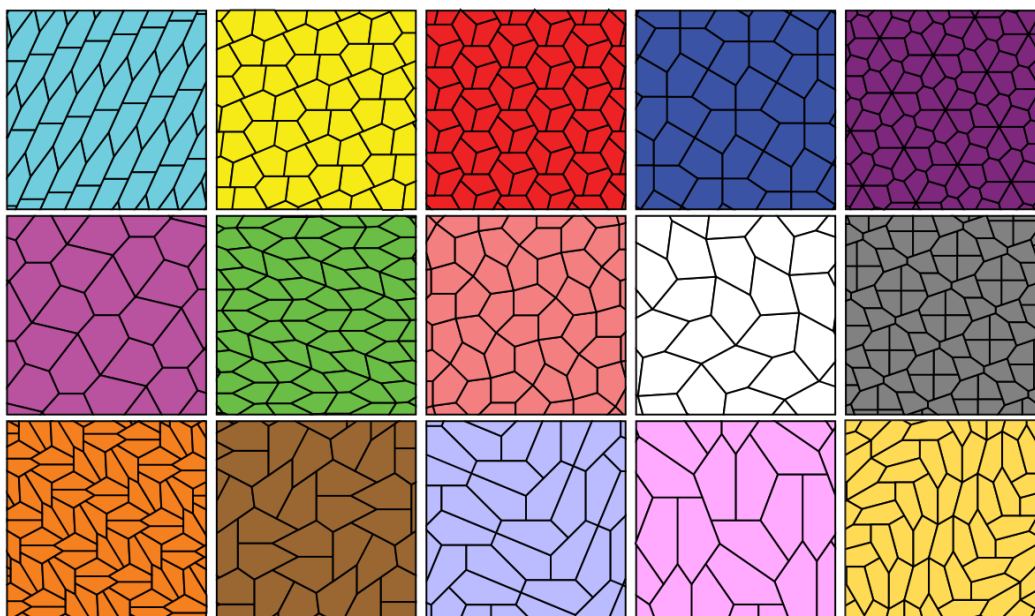


FIGURE 7 – Amorce de chacun des quinze pavages monoédriques du plan connu à ce jour ayant des pentagones convexes en guise de prototuile.

Source : EdPeggJr — CC BY-SA 4.0 — Reproduite sans modification.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PentagonTilings15.svg>.

De même qu'il est impossible de réaliser un pavage monoédrique du plan avec un polygone régulier à 7 côtés ou plus comme prototuile (nous l'avons en effet vu plus haut), il est tout aussi impossible de le faire avec un polygone non régulier mais convexe ayant 7 côtés ou plus. En faire la démonstration requiert toutefois un long et fastidieux argument topologique (voir l'Annexe A dans [11]). L'argument intuitif mais non rigoureux que voici apporte cependant un éclairage sur les raisons qui sous-tendent ce résultat profond.

Dans tout pavage monoédrique du plan avec comme prototuile un polygone convexe, chaque arête est le point de rencontre d'au moins trois tuiles (notons que cette affirmation est fausse si l'on omet l'hypothèse voulant que la prototuile soit convexe). Par conséquent, la moyenne de la mesure d'un angle intérieur de la prototuile ne peut pas être supérieure à $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$. Or, la mesure moyenne d'un angle intérieur d'un polygone convexe à $n \geq 7$ côtés est :

$$\frac{\text{somme des angles intérieurs}}{\text{nombre de côtés du polygone}} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \geq \frac{(7-2) \cdot 180^\circ}{7} \approx 128.57^\circ > 120^\circ.$$

En terminant, l'illustration ci-dessous devrait suffire à nous convaincre que le résultat susmentionné achoppe si l'on retire l'hypothèse de convexité.

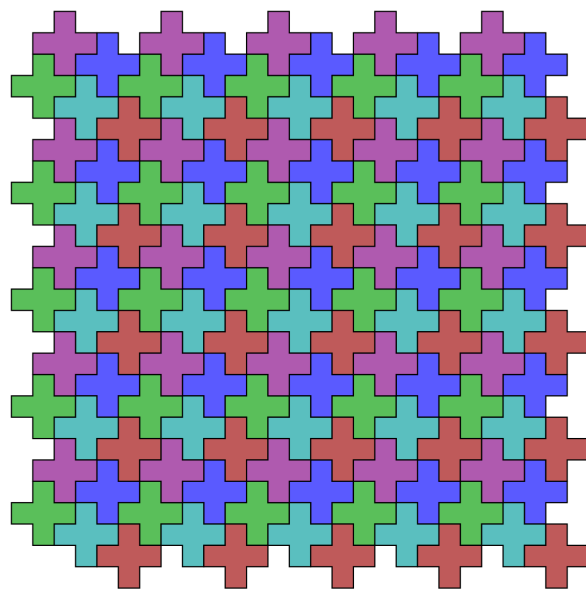


FIGURE 8 – Amorce de pavage monoédrique du plan avec un dodécagone non convexe en guise de prototuille.

Source : Tom Ruen — CC BY-SA 4.0 — Reproduite sans modification.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plus_tiling_5-colors2.svg

En fait, il n'est pas difficile de concevoir des polygones dentelés à n côtés qui s'emboîtent de sorte à réaliser des pavages monoédriques du plan pour des valeurs de n arbitrairement grandes.

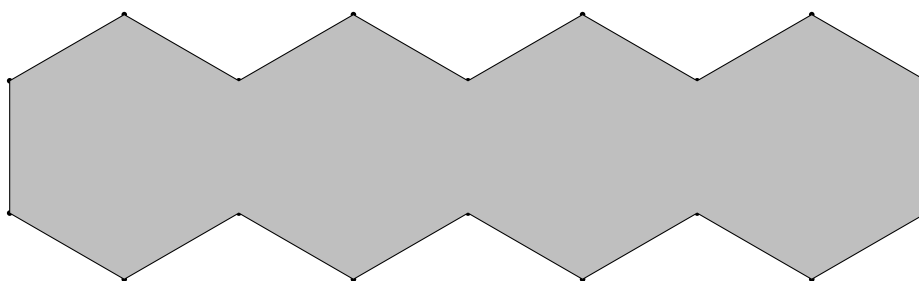


FIGURE 9 – Tracé d'un polygone non convexe dentelé à dix-huit côtés qui pave le plan.

3 Le problème des dominos

Comme nous avons pu le voir dans ce qui précède, déterminer si une collection donnée de prototiles (même lorsque la collection est réduite à un seul membre) admet ou non un pavage du plan est en général une tâche d’une difficulté redoutable. Il ne faut donc pas se surprendre, dans les circonstances, si la recherche d’une procédure systématique et efficace pour trancher la question ait fait l’objet d’un intérêt soutenu. Nous aborderons dans ce qui suit un cas particulier de ce vaste problème, et ce, suivant une perspective descriptive et historique.

En 1961, le logicien, philosophe et mathématicien sino-américain Hao Wang⁶ proposa le problème suivant [37] :

Considérons un nombre fini de prototiles carrées, toutes congrues, dont les arêtes sont colorés. On souhaite réaliser un pavage du plan en plaçant côte-à-côte des copies de ces tuiles – que nous appellerons désormais *tuiles de Wang* – sans leur faire subir de rotation ou de réflexion (autrement dit, sans les retourner *face contre terre*) ; seules les translations sont permises. De plus, on se doit de vérifier la règle d’appariement que voici : on ne peut accoler que les arêtes de même couleur⁷. Sous ces conditions, existe-t-il un algorithme permettant de déterminer si un ensemble de tuiles de Wang donné peut paver le plan ?

Le fait de contraindre les tuiles adjacentes à correspondre les unes aux autres, rappelant la contrainte analogue dans le jeu de dominos, le problème algorithmique énoncé par Wang en vint à être appelé le *problème des dominos*.

6. Né en 1921 à Jinan, la capitale de la province du Shandong dans l’est de la Chine, Hao Wang a obtenu un diplôme de baccalauréat en mathématiques de l’Université nationale associée du Sud-Ouest en 1943. Après avoir complété une maîtrise en philosophie, il a obtenu une bourse Rockefeller lui permettant d’étudier à l’université Harvard où il a complété un doctorat en logique mathématique sous la direction de Willard Van Orman Quine en un temps record de 18 mois. Au cours des deux décennies qui suivirent, Wang occupa diverses fonctions professorales à Harvard, à Princeton (où il rencontra Kurt Gödel et devint l’un de ses principaux disciples et confident), à Zurich (auprès de Paul Bernays), à Oxford. En 1967 il rejoignit l’université Rockefeller à New York où il demeura jusqu’à sa retraite en 1991. Il fut emporté par un lymphome à l’âge de 74 ans en 1995.

7. On peut éviter le recours à la coloration des arêtes en modifiant la forme des arêtes (comme une clé sculptée) pour permettre certains emboîtements et en exclure d’autres.

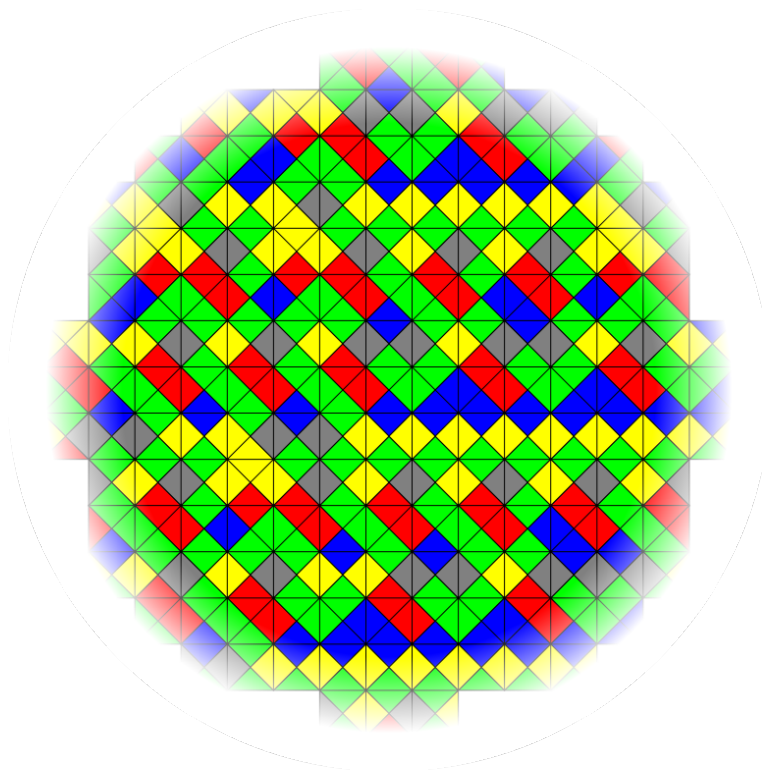


FIGURE 10 – Exemple d’amorce de pavage du plan par des tuiles de Wang.
Source : Claudio Rocchini — CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wang_tesselation.svg

Wang remarqua que si un ensemble $\mathcal{P}$ de prototiles admet au moins un pavage du plan, alors un et un seul des trois cas de figure suivants doit s’appliquer :

- (i) $\mathcal{P}$ n’admet que des pavages périodiques.

Rappelons qu’un pavage du plan est dit *périodique* s’il possède des symétries de translation⁸ dans au moins deux directions différentes et non parallèles. Cette appellation vient de ce que, pour tout pavage périodique du plan, il suffit de connaître une portion bornée du pavage pour en reconstruire – uniquement par translation – l’entièreté.

8. On dit d’un pavage du plan qu’il possède une *symétrie de translation* s’il peut être glissé (sans aucune forme de déformation ni changement d’orientation) et demeurer inchangé (c’est-à-dire que l’image se superpose parfaitement sur le pavage d’origine). En d’autres termes et pour employer une formulation imagée, si l’on tourne dos au pavage un instant et qu’un ami fait glisser l’entièreté du pavage d’une certaine distance et dans une certaine direction, alors lorsqu’on se retournera, il nous sera impossible de dire que quelque chose a changé.

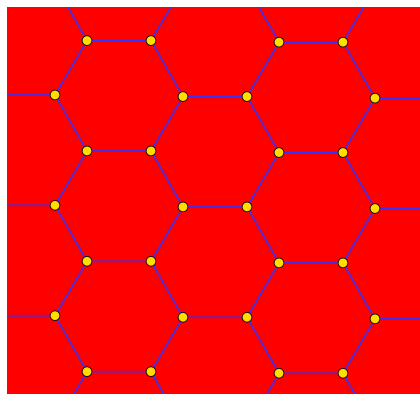


FIGURE 11 – L'exemple le plus simple où l'ensemble $\mathcal{P}$ de prototiles n'admet que des pavages périodiques est celui où $\mathcal{P}$ ne contient qu'une prototile ayant la forme d'un hexagone régulier.

Source : Tilman Piesk — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiling_6_simple.svg

- (ii) $\mathcal{P}$ admet au moins un pavage périodique et au moins un pavage non périodique.

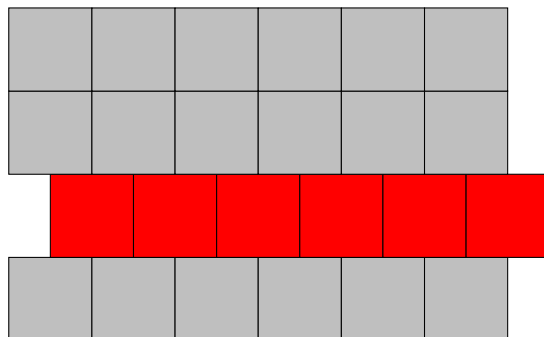
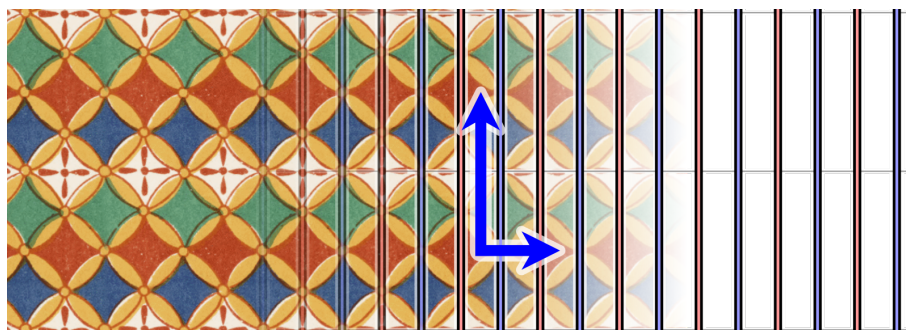


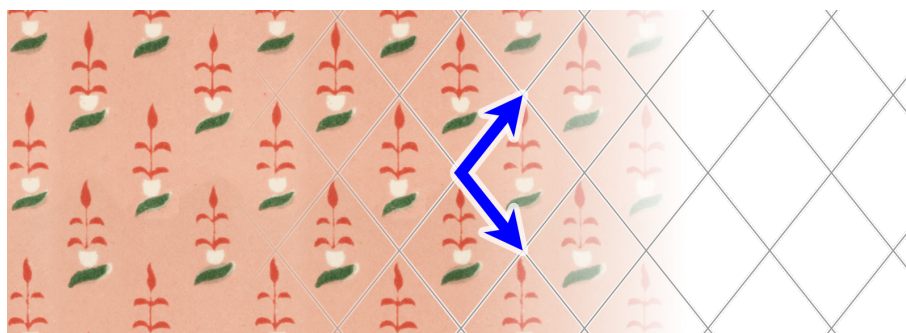
FIGURE 12 – Amorce de pavage non périodique du plan avec le carré comme prototile. Le fait d'aligner toutes les rangées de carrées à l'exception d'une seule a pour effet d'empêcher l'identification d'une symétrie de translation autre qu'horizontale. Puisque la périodicité exige deux vecteurs de translations non colinéaires, on conclut donc à la non périodicité. Il ne s'agit toutefois pas d'un cas d'apériodicité puisque le carré admet, comme on le sait, un pavage périodique : soit le pavage pour lequel toutes les rangées sont alignées.

- (iii) $\mathcal{P}$ n'admet que des pavages non périodiques. On dit alors que $\mathcal{P}$ pave le plan de façon apériodique⁹.

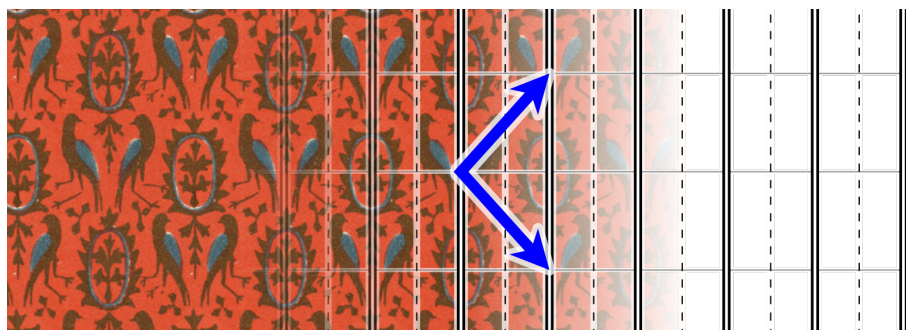
9. Il s'agit d'un abus de langage mais la notion d'apériodicité est redoutablement difficile à employer simplement dans des phrases exemptes d'abus de langage. Nous n'hésiterons donc pas à en commettre lorsque cela ne nuira pas la compréhension.



(a) **Source** : Martin von Gagern —CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SymBlend_pm.svg



(b) **Source** : Martin von Gagern —CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SymBlend_cm.svg



(c) **Source** : Martin von Gagern —CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SymBlend_p1.svg

FIGURE 13 – Trois pavages périodiques. Les flèches bleues indiquent deux vecteurs de translation non colinéaires.

Wang montra ensuite que le problème des dominos est algorithmiquement *décidable*¹⁰ si l'on se restreint aux seuls jeux de prototiles de Wang qui satisfont aux conditions (i) et (ii).

Wang conjectura ensuite que tout ensemble de prototiles de Wang qui admet un pavage du plan admet au moins un pavage périodique. Autrement dit, il postula qu'aucun jeu de dominos ne peut satisfaire à la condition (iii).

On peut aisément comprendre que si cette conjecture devait se révéler vraie, alors sa principale conséquence serait que le problème des dominos serait algorithmiquement décidable. L'algorithme (glouton) consisterait alors à énumérer, pour chaque nombre naturel n , l'ensemble fini de tous les assemblages $n \times n$ n'enfreignant pas la règle d'appariement. Si, d'une part, un pavage du plan est impossible alors, en vertu d'un argument de compacité, il y aura inévitablement un n pour lequel un tel assemblage n'est pas réalisable, auquel cas la procédure prend fin. D'autre part, si un pavage périodique est possible, alors on finira par découvrir un domaine fondamental dans l'un de ces assemblages, auquel cas la procédure prend fin.

Wang fut aux premières loges pour assister à l'invalidation de sa conjecture. En effet, elle fut réfutée en 1964 par le mathématicien américain Robert Berger qui complétait alors un doctorat sous la supervision de Wang. Dans sa thèse (dont les faits saillants firent l'objet d'une publication en 1966 [1]), Berger prouva qu'il ne peut exister un algorithme pour le problème des dominos en démontrant l'existence d'un jeu de 20 426 dominos de Wang pavant le plan, mais seulement de façon non périodique.

Si elle peut nous sembler être d'une ampleur quantitative prohibitive, voire vertigineuse, la découverte de Berger n'en était pas moins qualitativement stupéfiante et grisante.

Berger fut le premier à reconnaître que le nombre de dominos différents employés dans sa réfutation de la conjecture de Wang était sans doute inutilement élevé car il avait jugé préférable dans un premier temps de prioriser la simplicité d'énonciation et de validation de sa démonstration au détriment de quelque notion d'économie que ce soit.

Une fois convaincu de la robustesse de son argument d'existence, il s'employa à affiner les estimations. Il put ainsi réduire la taille du jeu de dominos à 104 tuiles de Wang. Ce nouveau jeu considérablement plus économe ne figure toutefois pas dans la version publiée de ses travaux [12, §11.1]. Peu après, le désormais célèbre informaticien américain Donald E. Knuth montra comment certaines modifications aux travaux de Berger pouvaient permettre de réduire le nombre de tuiles de Wang requis à 92 [18, p. 384].

La course pour trouver la plus petite taille possible d'un jeu de tuiles de Wang pouvant paver le plan tout en forçant l'apériodicité était lancée. Comme nous allons le voir dans ce qui suit, plusieurs mathématiciens (surtout des professionnels, mais aussi quelques amateurs) allaient contribuer, au cours du demi-siècle qui suivit, à abaisser progressivement la borne maximale.

Le mathématicien suisse Hans Läuchli fut, pour sa part, en mesure de réaliser un pavage apériodique du plan en n'utilisant que 40 tuiles de Wang. Ses travaux, réalisés en 1966, ne

10. Cela signifie qu'il existe une procédure qui décidera en un nombre fini d'étapes ou d'essais si un ensemble de prototiles donné permet de paver le plan.

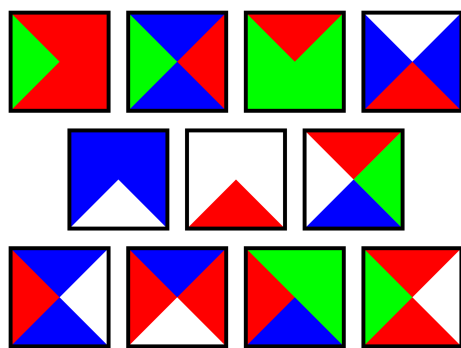
furent toutefois publiés qu'en 1975 (dans un article de Wang) [38], si bien que l'informaticien et mathématicien américain crut abaisser la meilleure borne maximale lorsqu'il démonstra, en 1967, l'existence d'un ensemble de 52 tuiles de Wang pavant aperiodiquement le plan [26]. Quoi qu'il en soit, le jeu de 35 dominos qu'il obtint en 1971, lui, établit incontestablement une nouvelle marque à battre [27].

En mettant à profit une nouvelle approche développée par le physicien Roger Penrose, dont nous reparlerons à la prochaine section, Robinson parvint ensuite, en 1977, à construire un ensemble aperiodique de 24 tuiles de Wang [12, p. 384].

Puis, une approche innovante développée par le mathématicien amateur Robert Ammann [28] permit de réduire d'un tiers le nombre de dominos requis.

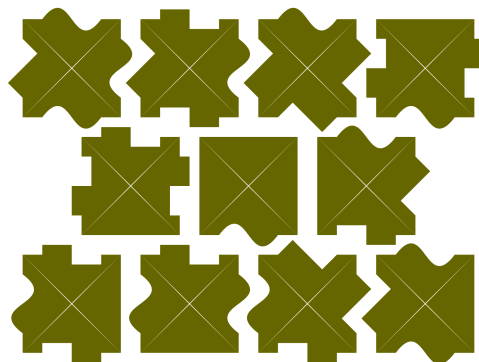
Il fallut ensuite attendre plus d'une quinzaine d'année pour voir la marque à battre être abaissée à nouveau. En 1995, le mathématicien finlandais Jarkko Kari et l'informaticien tchèque Karel Čulík II obtinrent un jeu de domino aperiodique contenant 14 tuiles de Wang [3]. Ils récidivèrent l'année suivante avec un jeu aperiodique de 13 tuiles de Wang [4].

Puis, en 2015, les informaticiens français Emmanuel Jeandel et Michaël Rao parvinrent à démontrer, d'une part, que 10 prototiles ou seulement 3 couleurs s'avèrent insuffisantes pour forcer l'aperiodicité et, d'autre part, qu'il existe un jeu aperiodique de 11 dominos faisant intervenir 4 couleurs [14]. Ainsi s'acheva la quête du plus petit ensemble aperiodique de tuiles de Wang.



(a) Jeu de tuiles de Wang aux côtés colorés afin d'indiquer les appariements possibles.

Source : Parcly Taxel — Free Art License
<https://artlibre.org/licence/lal/en/>



(b) Jeu de tuiles de Wang dont les arêtes ont été modifiées afin de refléter matériellement les règles d'appariement.

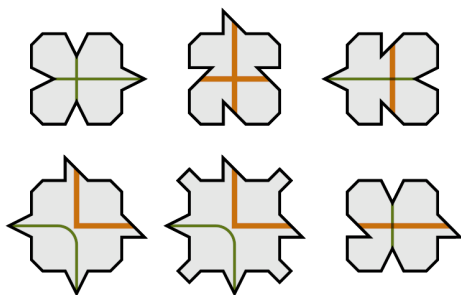
Source : Cmglee — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wang_11_tiles_monochromatic.svg

FIGURE 14 – Deux représentations distinctes d'un même jeu de 11 tuiles de Wang qui pavent le plan, mais uniquement de manière non périodique.

4 Le problème du pavage apériodique

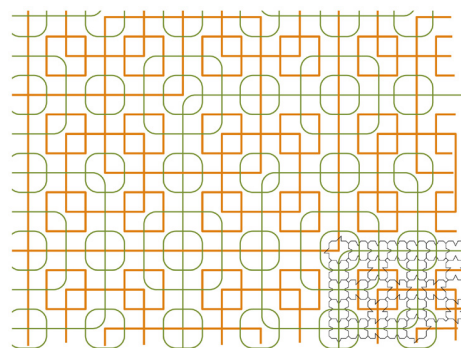
Nous l'avons vu, les premières tentatives pour identifier des ensembles apériodiques de prototiles s'inscrivaient toutes dans le cadre de la théorie des tuiles de Wang car c'est dans ce contexte particulier que s'est d'abord posée la question de la possibilité ou non de paver le plan apériodiquement. Le problème des pavages apériodiques du plan était toutefois voué à s'affranchir de ce contexte restrictif.

Ce saut conceptuel fut définitivement franchi en 1971 alors que le mathématicien californien Raphael M. Robinson parvint à identifier un ensemble apériodique de tout juste six prototiles qui ne sont pas des dominos de Wang [27].



(a) Représentation des six prototiles de Robinson. Bien que des marques facilitant la reconnaissance visuelle (dans la figure ci-après) de la structure hiérarchique aient été apposées, ces marques n'ajoutent aucune règle d'appariement qui n'est pas déjà imposée géométriquement.

Source : Archibald — Oeuvre dans le domaine public — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Robinson_tiles.svg



(b) Amorce d'un pavage apériodique du plan avec les prototiles de Robinson.

Source : C G Strauss — Oeuvre dans le domaine public — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Robinson_tiling.jpg

FIGURE 15 – Les pavages de Robinson

Bien que nous ayons cheminé jusqu'ici en survolant superficiellement la théorie des pavages, nous présenterons cette fois-ci une preuve détaillée du fait que les six prototiles de Robinson forment un ensemble apériodique afin d'illustrer la technique de preuve standard pour ce genre de résultats.

Démonstration. [11] La démonstration comporte deux arguments distincts. En effet, nous devons montrer, d'une part, que les prototiles de Robinson peuvent paver le plan et, d'autre part, qu'elles ne peuvent pas le paver périodiquement.

Mais avant, prenons quelques instants pour porter une attention soutenue aux six prototiles illustrées à la Figure 15.

Remarquons tout d'abord que la prototile située au milieu de la deuxième rangée possède des coins saillants tandis que les cinq autres prototiles n'en ont pas. Dans toute configuration de prototiles, il faut donc qu'à chaque coin, trois tuiles sans coins saillants rencontrent une tuile avec des coins saillants.

Notons également que la première et la deuxième tuile de la deuxième rangée ont une bosse au milieu de chacun de leurs côtés alors que les quatre autres ont une bosse et trois entailles. Les deux tuiles atypiques sont marquées d'un coude orange (à savoir un ligne qui pointe vers le haut et la droite).

Quelles sont les tuiles qui peuvent être placées dans les positions adjacentes au coude d'une tuile avec coins saillants ? Il ne peut s'agir que de tuiles à trois entailles. On constate rapidement que chaque tuile sans coins saillants mais avec quatre bosses ne peut appartenir qu'à des configurations 3×3 comme celle illustré ci-dessous. On dispose cependant d'un choix quant à l'orientation du coude orange.

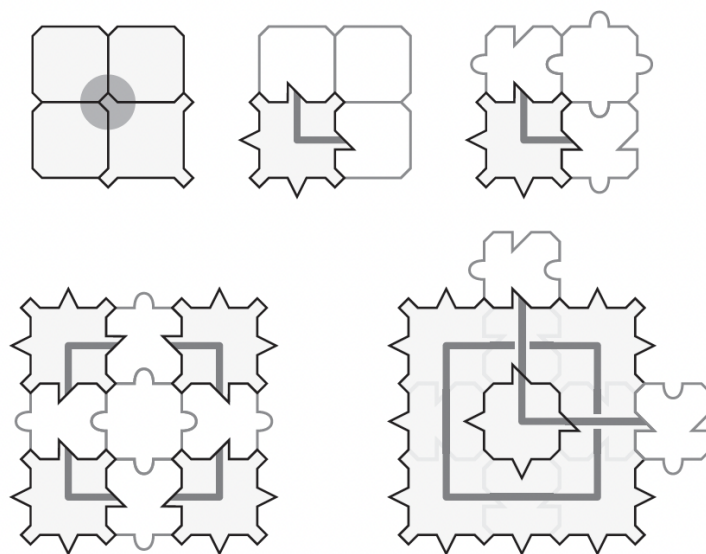


FIGURE 16 – La preuve de Robinson repose sur la démonstration que les tuiles forment des blocs qui eux-mêmes s'emboîtent comme les tuiles, à plus grande échelle, formant des blocs encore plus grands, et ce, à l'infini.

Source : Chaim Goodman-Strauss — Figure 15 [11] — Reproduite sans modification.

Et maintenant, aux extrémités de ce grand coude central, seules deux tuiles à trois entailles peuvent s'emboîter. Ainsi, une chaîne de tuiles à trois entailles se dessine, ce qui force le placement d'une tuile à coude orange sans coins saillants, en haut à droite de la figure ci-dessus.

De la même manière que les tuiles originales ne pouvaient former que des blocs 3×3 , ces blocs 3×3 ne peuvent s'emboîter que pour former des blocs 7×7 , ces blocs 7×7 ne peuvent s'emboîter que pour former des blocs 15×15 qui, à leur tour, ne peuvent s'emboîter que pour former des blocs 31×31 , et ainsi de suite. La figure ci-dessous montre une suite imbriquée de blocs de ce type.

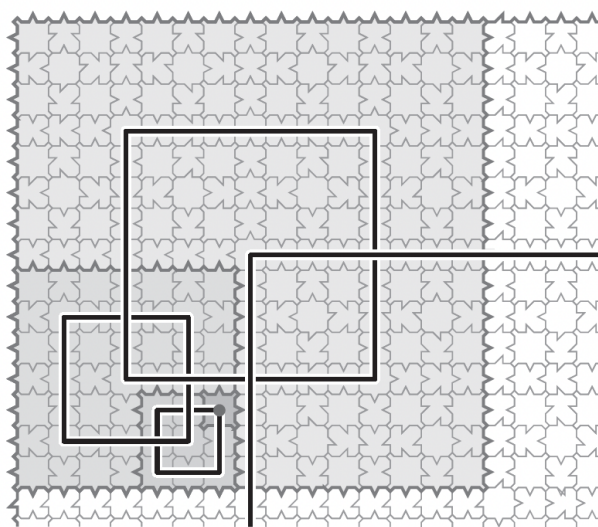


FIGURE 17 – La construction décrite comporte une suite dénombrable de choix de plus en plus importants.

Source : Chaim Goodman-Strauss — Figure 16 [11] — Reproduite sans modification.

- Les prototiles de Robinson admettent-elles un pavage du plan ? Construisons explicitement un pavage : fixons une tuile à coins saillants. On peut placer un bloc 3×3 au sud-ouest ; celui-ci peut à son tour se trouver au sud-est d'un bloc 7×7 , qui se trouvera au sud-ouest d'un bloc 15×15 , qui se trouvera à son tour au nord-ouest d'un bloc 31×31 , et ainsi de suite. En continuant ainsi, on obtient un pavage du plan bien défini : chaque point du plan se trouve à l'intérieur d'une tuile spécifique et bien définie.

En fait, il existe un nombre indénombrable de pavages distincts avec les tuiles de Robinson ! En effet, la construction comporte une suite infinie de choix : à chaque étape, le prochain bloc le plus grand aurait pu se trouver dans n'importe laquelle des quatre positions par rapport à ce qui avait déjà été placé. Il y a cependant deux subtilités : les suites ne produisent pas toutes une configuration qui couvre l'ensemble du plan (par exemple, si

l'on place toujours le bloc suivant au sud-ouest). Mais un nombre indénombrable d'entre elles le font. Différentes suites de choix sont susceptibles de donner des pavages congruents, mais comme tout pavage donné n'est congruent qu'à un nombre au plus dénombrable d'autres pavages, les prototiles de Robinson engendrent encore un nombre indénombrable de pavages du plan non congruents.

- Les tuiles de Robinson admettent-elles un pavage périodique ? On pourra vérifier qu'une tuile à coins saillants au centre d'un bloc de taille $(2n - 1) \times (2n - 1)$ se trouve aussi à être l'un des sommets d'un autre bloc $(2n - 1) \times (2n - 1)$.

Supposons qu'il existe un pavage périodique du plan engendré par les prototiles de Robinson. Alors, dans ce cas, la translation par un certain vecteur v laisserait le pavage invariant. Cela signifie qu'un observateur qui examinerait le pavage avant le déplacement par v , qui se couvrirait les yeux pendant le déplacement par v , et qui les découvrirait aussitôt le déplacement par v complété ne remarquerait aucun changement.

Or c'est impossible : il existe un carré de taille S si grand que v ne pourrait pas amener S sur un autre carré de même taille. Par conséquent, un déplacement de v ne pourrait pas laisser le pavage invariant. ■

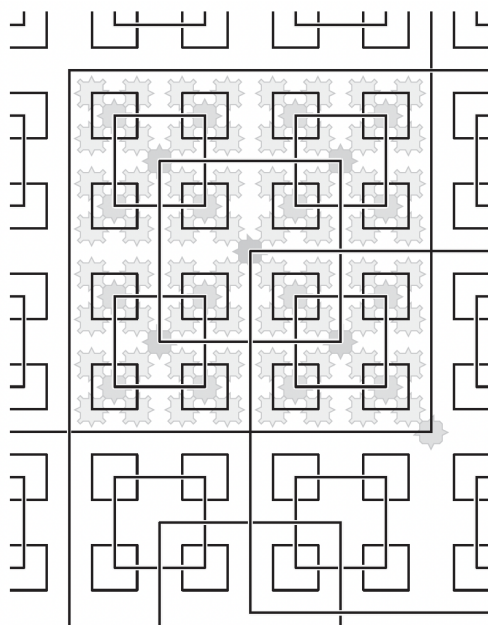


FIGURE 18 – Une hiérarchie de carrés : les tuiles de Robinson n'admettent pas de périodicité. Notons les systèmes complémentaires de passerelles et d'embranchements.

Source : Chaim Goodman-Strauss — Figure 16 [11] — Reproduite sans modification.

En 1973, le *Rouse Ball Professor of Mathematics* au *Mathematical Institute* de l'Université d'Oxford, Roger Penrose, fit la première d'une série de découvertes remarquables qui méritent qu'on s'y attarde.

Né en 1931 à Colchester, dans le comté anglais d'Essex, Roger Penrose est le fils de Dre Margaret Leathes et de Dr Lionel Penrose, un psychiatre et généticien s'étant illustré par ses travaux de pionnier en génétique de la déficience intellectuelle. Les Penrose auraient tous deux souhaité voir leur fils marcher dans leurs traces et embrasser une carrière médicale, mais le jeune Roger développa dès l'adolescence un vif intérêt pour les mathématiques.

Après avoir complété un diplôme de premier cycle en mathématiques à l'University College London, le jeune Penrose rejoignit l'Université de Cambridge où il étudia d'abord sous la direction de l'algébriste et géomètre renommé William Vallance Douglas Hodge puis, sous celle de son distingué collègue John A. Todd.

Si c'est à titre de mathématicien que Penrose soutint avec succès une thèse de doctorat portant sur les méthodes tensorielles en géométrie algébrique, le jeune homme s'était senti chaque jour de plus en plus attiré par la physique mathématique depuis qu'il avait suivi, au cours de la première année de son parcours cambridgien, les enseignements du cosmologiste autrichien Hermann Bondi de même que ceux du physicien théoricien nobélisé Paul Adrien Maurice Dirac.

Au tournant des années 1970, Penrose travailla, en étroite collaboration avec le physicien britannique Stephen Hawking, à l'élaboration d'une théorie décrivant l'effondrement gravitationnel des corps massifs sur eux-mêmes.

Aussi importantes et influentes que furent les idées originales de Penrose en physique théorique – des contributions scientifiques qui lui valurent de cumuler au fil des ans une impressionnante collection des plus prestigieuses distinctions scientifiques à l'échelle internationale dont la médaille Eddington de la Royal Astronomical Society, la médaille Royale de la Royal Society, le prix Wolf, le prix Dirac, la médaille Albert-Einstein, la médaille De Morgan de la London Mathematical Society et le prix Nobel de physique 2020 – c'est à l'un de ses passe-temps que Penrose doit son apparition dans notre récit.

Se plaisant à griffonner pendant son temps libre, Penrose s'adonna à concevoir divers pavages non périodiques du plan. Puisant son inspiration dans certains des pavages décrits par l'illustre astronome allemand Johannes Kepler dans les chapitres 1 et 2 de son traité d'astronomie intitulé *Harmonices Mundi* (1619), il finit par découvrir un ensemble inédit de six prototiles apériodiques. S'il les estima suffisamment dignes d'intérêt pour se donner la peine de rédiger un court article qu'il soumit à une revue scientifique de faible envergure [20], le physicien ne vit dans ses découvertes que de simples curiosités mathématiques qui seraient vite reléguées aux oubliettes.

Peu après, il identifia deux prototiles (auxquelles le mathématicien iconoclaste britannique John Horton Conway, qui n'était jamais à court de noms originaux visant à susciter l'attention autour des sujets qu'il jugeait d'intérêt, accola le nom de *cerf-volant* et de *fléchette*) ne produisant que des pavages non périodiques du plan [21, 22, 25].

L'ampleur de cet accomplissement se doit d'être apprécié à sa juste valeur. Moins d'une décennie plus tôt, l'éventualité de parvenir à identifier un jeu de prototiles permettant de réaliser des pavages du plan mais uniquement de manière non périodique semblait si invraisemblable que Hao Wang conjectura qu'une telle chose était tout bonnement impossible. Puis, à la surprise générale, on avait réfuté cette conjecture. Mais pour ce faire, il avait fallu recourir à 20 426 prototiles distinctes. Et voilà que, de resserrement en resserrement, d'économie en économie, on avait su abaisser la marque à deux hexadécagones assimilables à des quadrilatères légèrement bosselés. Quel progrès ! Quel exploit !

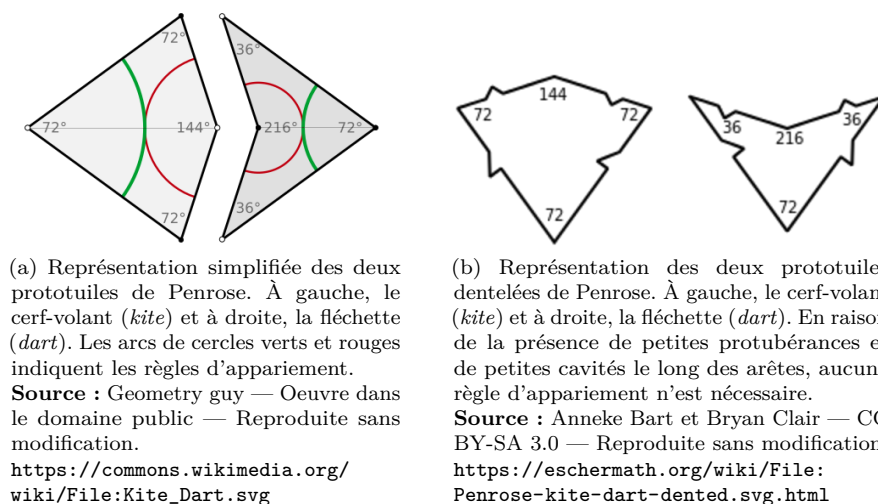


FIGURE 19 – Les prototiles de Penrose

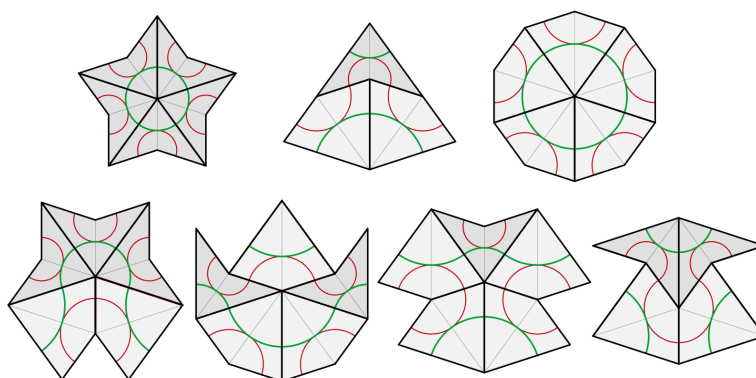
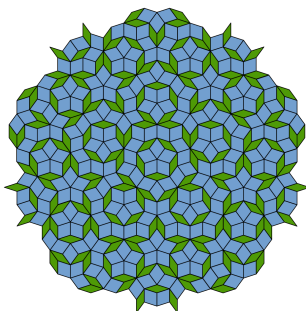


FIGURE 20 – Représentation des différentes façons d'assembler des copies de cerfs-volants et de fléchettes.

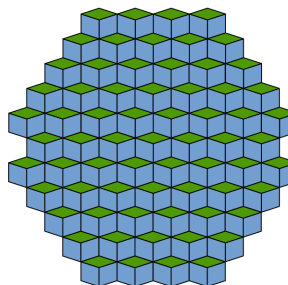
Source : Geometry guy — CC BY-SA 3.0 — Reproduite sans modification.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_vertex_figures.svg



(a) Amorce d'un pavage aperiodique du plan utilisant des tuiles (non dentelées) de Penrose.

Source : Inductiveload — Oeuvre dans le domaine public — Reproduite sans modification.

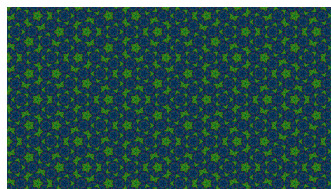
[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_\(Rhombi\).svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_(Rhombi).svg)



(b) Démonstration visuelle qu'en l'absence de petites protubérances et des petites cavités (pouvant être remplacées, par souci de simplicité de représentation, par des règles d'appariement) venant contrecarrer certaines configurations, les tuiles de Penrose non dentelées admettraient certains pavages périodiques du plan.

Source : Geometry guy — Oeuvre dans le domaine public — Reproduite sans modification.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RegularRhombs.svg>



(c) Partie du plan couverte par un pavage de Penrose. On peut y apprécier la valeur esthétique de ces pavages.

Source : Przemek Majewski — CC BY-SA 4.0 — Reproduite sans modification.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Step7wPaper600DPI.png>



(d) Roger Penrose dans le foyer du *Mitchell Institute for Fundamental Physics and Astronomy* de l'Université A&M du Texas, debout sur un sol recouvert d'un pavage de Penrose.

Source : Solarflare100 — CC BY 3.0 — Reproduite sans modification.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RogerPenroseTileTAMU2010.jpg>

FIGURE 21 – Les pavages de Penrose

Le vulgarisateur scientifique Martin Gardner se vit offrir la chance d'annoncer en primeur la nouvelle de cette découverte étonnante. Doté d'un remarquable flair pour trouver les sujets promis à un avenir radieux, Gardner se promit de faire rayonner les pavages non périodiques de son ami Penrose. Il en fit d'abord brièvement mention dans la conclusion de sa chronique *Mathematical Games* d'août 1975 [7]. Toutefois, soucieux de ne pas nuire aux démarches entreprises par Penrose pour faire breveter sa découverte – qui avait après tout un fort potentiel commercial –, il dut attendre jusqu'en janvier 1977 avant de pouvoir y consacrer l'un de ses textes [9, 10]. Penrose, pour sa part, fit éventuellement paraître deux courts articles savants portant sur ses prototiles extraordinaires [21, 22].

Le moins qu'on puisse dire est que l'attente en valut la peine. La chronique *Mathematical Games* intitulée *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles* est, parmi les centaines de textes de vulgarisation mathématique qu'écrivit Gardner au cours de sa vie, l'un de ceux qui suscitèrent le plus de réactions et qui eurent le plus de répercussions.

5 Le problème de l'*einstein*

À la suite de la découverte, par Penrose, d'un ensemble apériodique de deux prototiles, de nombreux mathématiciens réfléchirent à la possibilité de trouver un unique polygone qui permettrait de réaliser des pavages du plan en imposant suffisamment de complexité pour que cela ne puisse être accompli que de manière non périodique.

Cette forme géométrique insaisissable en vint à être désignée sous le nom de *einstein*, suivant un jeu de mots astucieux du géomètre allemand Ludwig Danzer sur l'expression allemande *ein stein*, qui signifie *une pierre*.

Au fil des ans, plusieurs prototiles candidatèrent à la palme de premier *einstein*, mais aucune ne parvint à chausser la pantoufle de verre. Telle prototile, afin de convenir, se devait de remettre en question le concept de tuile ; telle autre imposait de revoir la définition de pavage ; et telle autre ne pouvait apériodiquement qu'à condition de galvauder la notion d'apériodicité.

Par exemple, au cours des années 1990, les mathématiciens Petra Gummelt [13], Paul Steinhardt et Hyeong-Chai Jeong [15, 35] ont montré comment une prototile en forme de décagone régulier peut paver le plan de façon apériodique pourvu que l'on autorise certains chevauchements selon des règles prescrites. Ces résultats ingénieux ne sont toutefois pas des pavages au sens usuel du terme. Autre exemple : la mathématicienne amateur Joan Taylor et le physicien Joshua Socolar ont quant à eux démontré en 2010 l'existence d'une prototile pavant le plan de manière apériodique [33, 34, 36]. Toutefois, leur prototile est disconnexe. Ils peinent donc à se convaincre qu'il s'agit bel et bien d'un pavage monoédrique.

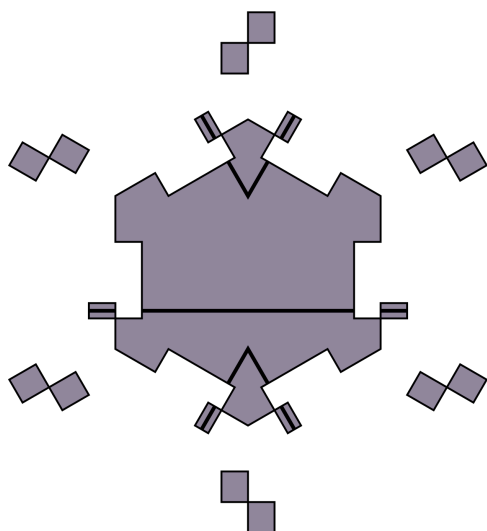


FIGURE 22 – Prototile disconnexe de Taylor–Socolar.

Source : Parcly Taxel — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Socolar-Taylor_tile.svg

En somme, personne ne semblait en mesure mettre le doigt sur une forme géométrique bidimensionnelle simple n'engendrant que des pavages non périodiques du plan, et ce, uniquement en vertu de sa géométrie (c'est-à-dire sans qu'il ne soit nécessaire d'appliquer des règles d'appariement non géométriques contraignant par décret les appariements). On en venait même à se demander si la quête de l'inaccessible *einstein* n'était pas vouée à l'échec perpétuel. Peut-être que l'existence d'une prototile ayant ces propriétés était tout simplement une hypothèse insoutenable.

À la mi-novembre 2022, contre toute attente, un rayon d'espoir perça au travers des ténèbres du désespoir.

En s'adonnant à l'un de ses passe-temps préféré – résoudre des puzzles et explorer librement l'univers géométrique des pavages à l'aide du logiciel *PolyForm Puzzle Solver* – David Smith, un technicien d'impression retraité et mathématicien amateur résidant dans le Yorkshire en Angleterre, traça un polygone convexe à 13 côtés rappelant vaguement la forme d'un chapeau. Smith s'amusa ensuite à essayer de remplir l'entièreté de son écran avec des copies de ce chapeau, et ce, sans espace et sans chevauchement [17].

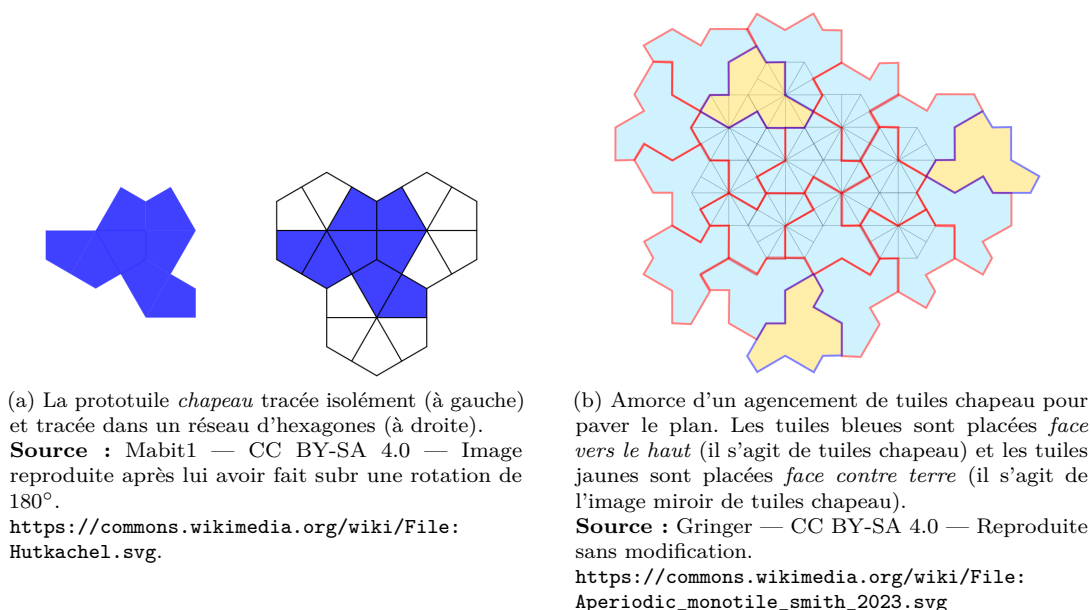


FIGURE 23 – La prototuille $T(1, \sqrt{3})$ et une amorce d'un pavage qu'elle engendre

Habituellement, cet exercice menait assez rapidement à la découverte d'un motif répétitif. D'autre fois, il aboutissait tout aussi rapidement dans un cul-de-sac. Cette fois, cependant, le chapeau ne semblait mener ni à l'un ni à l'autre de ces dénouements.

Perplexe, Smith envoya une description de sa prototuille à son ami, le professeur d'informatique à l'université de Waterloo, Craig S. Kaplan. Ce dernier employa un programme informatique qu'il avait écrit afin de réaliser une exploration plus systématique des configurations possibles. Plus il recueillait de données, plus cela devenait intéressant. Se pouvait-il que le chapeau, cette figure géométrique anodine soit le saint Graal ?

En janvier 2023, Smith et Kaplan furent rejoints dans leurs efforts par deux autres chercheurs : Chaim Goodman-Strass, un professeur retraité de l'université de l'Arkansas agissant comme mathématicien en résidence pour le Musée national des mathématiques de New York, et Joseph Samuel Myers, un ingénieur logiciel de Cambridge, en Angleterre, détenant un doctorat en combinatoire [17].

Quelques jours suffirent à Myers pour parvenir à démontrer que la prototuille chapeau pouvait le plan et le faisait uniquement de manière non périodique. À moins d'une coquille dans sa preuve (qui se veut une adaptation de l'approche développée par Berger dans ses travaux pionniers datant des années 1960 et consistant à assembler des tuiles afin de produire à une échelle supérieure des versions d'elles-mêmes, créant ainsi une structure hiérarchique incarnant suffisamment de complexité pour perturber l'ordre périodique à toutes les échelles), le chapeau était donc bel et bien un *einstein* !

Entre-temps, à la stupéfaction générale, Smith découvrit une seconde prototuille (dont la forme, outre le fait qu'elle rappelait vaguement celle d'une tortue, présentait de nettes ressemblances avec celle du chapeau) qui semblait paver le plan mais uniquement de façon non périodique [17].

Estimant peu probable que deux solutions entièrement indépendantes à un problème resté en suspens pendant un demi-siècle puissent être trouvées en quelques semaines, les quatre chercheurs se mirent à la recherche d'un lien unissant la tortue au chapeau et ils ne tardèrent pas à le découvrir.

Il s'avère que la prototuille chapeau et la prototuille tortue font toutes deux partie d'un continuum de formes géométriques à 13 côtés admettant toutes des pavages combinatoirement équivalents. Ainsi, tout pavage apériodique du plan formé avec des tuiles chapeau peut être transformé de façon naturelle en un pavage apériodique du plan composé avec de tuiles tortue. En somme, ce n'est pas *un einstein* que Smith a découvert mais une infinité indénombrable d'*einsteins*. Cela vaut bien la marque du pluriel !

Chacun des membres de ce continuum possédant 13 côtés – soit, deux sextuplets de côtés congruents et un côté exceptionnel dont la mesure est le double de celle des éléments de l'un des groupements de côtés congruents –, on peut donc paramétrer le continuum par deux nombres non négatifs $a, b > 0$ représentant la mesure de la longueur des deux sextuplets de côtés congruents.

Il convient de noter $T(a, b)$ la prototuille dont six des côtés mesurent a , six autres mesurent b et le dernier mesure $2b$. Clairement les prototuites $T(a, b)$ et $T(ka, kb)$, où k désigne un nombre naturel quelconque, sont identiques à un changement d'échelle près. On peut donc supposer sans perte de généralité que $a = 1$.

Un seul des membres de ce continuum présente un comportement atypique. Il s'agit de la prototuille $T(1, 1)$. Celle-ci peut être assimilée à un polygone convexe équilatéral à 14 côtés dont deux des côtés sont colinéaires. En raison de l'isométrie de la totalité de leurs côtés, les copies de la prototuille $T(1, 1)$ peuvent s'emboîter de plus de façons que les autres membres du continuum. Ce faisant, certains pavages périodiques deviennent réalisables. Le prototuille $T(1, 1)$ est donc la seule à ne pas être un *einstein*.

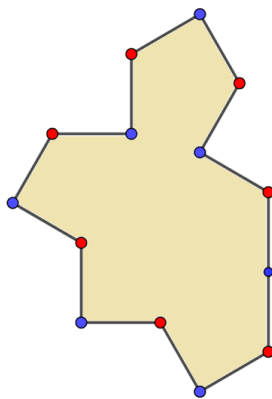


FIGURE 24 – Prototile $T(1, 1)$, à savoir un polygone à 14 côtés d'égales longueurs dont les angles mesurent 90° , 120° ou 180° .

Source : VonHaarberg — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MonotilePolygon.svg>.

Le 20 mars 2023, Smith, Myers, Kaplan et Goodman-Strauss révélèrent au monde entier leur découverte en publiant sur le répertoire électronique en accès libre *arXiv* une prépublication [31] présentant le chapeau et son infinité de congénères, une démonstration détaillée que ceux-ci pavent le plan¹¹ et deux démonstrations distinctes qu'ils le font de façon non périodique uniquement.

La nouvelle de cette découverte aurait difficilement pu arriver à un meilleur moment pour le premier auteur du présent article, car il en était alors investi dans la rédaction, sous la supervision du second auteur du présent article, d'un mémoire de baccalauréat portant sur le pavage de Penrose et le problème – jusque-là en suspens depuis près d'un demi-siècle – de l'*einstein*. Est-il nécessaire de préciser qu'il aura fallu réécrire le dernier chapitre du mémoire sur les chapeaux (!) de roues ?

6 Conclusion : le problème de l'*einstein* vampire

Contre toute attente, Smith, Myers, Kaplan et Goodman-Strauss n'en avaient pas fini avec le problème de l'*einstein*.

Puisque tous les pavages du plan pouvant être formés avec le chapeau (ou avec n'importe quel des membres du continuum de formes géométriques $T(a, b)$ où $a, b > 0$ et $\frac{a}{b} \neq 1$) font intervenir des tuiles *face vers le haut* et des tuiles *face vers le bas* (ou, pour le dire autrement, ils font

¹¹. Cette démonstration tire profit de l'étroite relation qui existe – et que personne n'aurait pu anticiper – entre les pavages non périodiques avec des tuiles chapeau et le pavage périodique avec des hexagones réguliers.

intervenir la prototuille et son image miroir) et puisque celles-ci ne sont pas superposables¹², certain mathématiciens ont fait part de leur réticence à considérer ces pavages comme étant monoédriques et donc, par voie de conséquence, à considérer le problème de l'*einstein* comme étant résolu.

Pour leur part, Smith, Myers, Kaplan et Goodman-Strauss étaient tous d'avis que ces réserves étaient injustifiées. Ils estimaient en effet que, dans le plan euclidien, sauf indication contraire on se devait de supposer que deux tuiles sont identiques si elles peuvent être superposées par l'exécution de toute isométrie affine (ces isométries, rappelons-le, comprennent les rotations, les translations, les réflexions ou toute composée d'un nombre fini de celles-ci).

Toutefois, même si l'opinion voulant que le problème de l'*einstein* soit bel et bien résolu devait prévaloir, il n'en demeurerait pas moins que l'on était en droit de s'interroger sur l'existence ou l'inexistence d'une prototuille pavant le plan de manière apériodique en n'employant que des tuiles *face vers le haut*.

Désignons cette nouvelle variante plus restrictive du problème de l'*einstein* comme étant le *problème de l'einstein vampire* puisque la forme géométrique recherchée n'est pas accompagnée d'une image miroir. En fait, pour être plus précis, il convient de distinguer les deux variantes du problème de l'*einstein vampire* que voici :

1. PROBLÈME DE L'EINSTEIN FAIBLEMENT VAMPIRE. Existe-t-il une prototuille qui (1) pave le plan sans que l'on ait besoin de recourir à des tuiles *face vers le bas* ; et (2) ne le fait que de manière non périodique ?
2. PROBLÈME DE L'EINSTEIN STRICTEMENT VAMPIRE. Existe-t-il une prototuille qui (1) pave le plan sans que l'on ait besoin de recourir à des tuiles *face vers le bas* ; (2) ne le fait que de manière non périodique ; et (3) n'admet aucun pavage périodique du plan même si l'on s'autorise à faire intervenir des tuiles *face vers le bas* ?

En mai 2023, Smith, Myers, Kaplan et Goodman-Strauss réussirent un second tour de force. Dans une nouvelle longue prépublication dense et soignée [32], ils apportèrent une réponse complète et définitive au problème *einstein* dans un contexte où l'on se restreint aux seules isométries du plan euclidien préservant l'orientation topologique. En guise de conclusion au présent article, nous proposons un court survol de cette seconde parution.

Rappelons que toutes les formes géométriques du continuum $T(a, b)$, où $a, b > 0$ et $a = 1$ qu'ils avaient définies dans leur premier article pavent le plan et ne le font que de manière non périodique, à une seule exception près du polygone équilatéral $T(1, 1)$.

Les doutes exprimés dans la communauté scientifique quant à savoir si la prototuille chapeau devrait être considérée comme une solution au problème de l'*einstein* ont mené Smith, Myers,

12. En géométrie euclidienne, une figure est dite *chirale* si elle ne peut pas être superposée à son image miroir uniquement par l'exécution de rotations et de translations. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si elle est superposable à son image miroir, alors elle est dite *achirale*. D'un point de vue étymologique, la notion de *chiralité* tire son origine du grec $\chiειρ$ (*cheir*) qui signifie *main*. Cela ne devrait pas être une surprise étant donné que l'empreinte d'une main est, avec celle d'un pied, la forme chirale familière qui s'impose le plus naturellement à l'esprit.

Kaplan et Goodman-Strauss à étudier de plus près les propriétés de la prototuille $T(1,1)$ et les pavages qu'elle engendre.

Cette nouvelle attention soutenue portée à une prototuille jusque-là jugée inintéressante les a amenés à constater que si l'on ne s'autorise qu'à utiliser des tuiles $T(1,1)$ *face en l'air* (c'est-à-dire si l'on décrète que les translations et les rotations sont permises mais que les réflexions sont interdites) alors il n'est possible de réaliser que des pavages non périodiques. Cela signifie donc que la prototuille $T(1,1)$ est un *einstein* faiblement vampire.

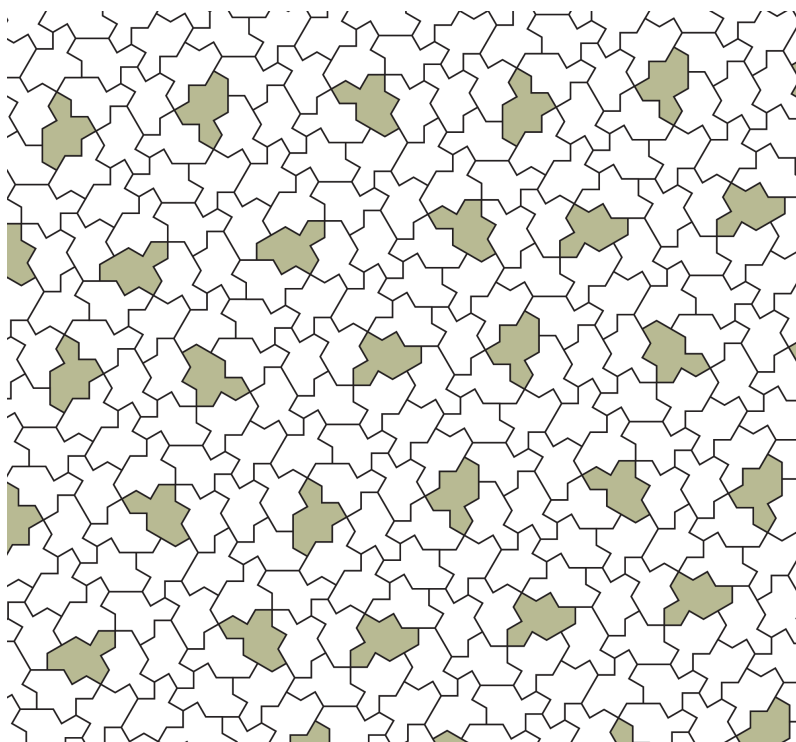


FIGURE 25 – Agencement de tuiles $T(1,1)$ pour un pavage du plan.

Source : David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan et Chaim Goodman-Strauss — CC BY 4.0 — Reproduite sans modification.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aperiodic_monotile_tiling.png.

Partant de là, Smith, Myers, Kaplan et Goodman-Strauss montrèrent qu'il est possible de modifier les arêtes de la prototuille $T(1,1)$ afin d'obtenir une forme géométrique – qu'ils nommèrent *spectre* – qui pave le plan mais uniquement de manière non périodique. Qui plus est, il n'existe pas de pavage du plan qui utilise à la fois la tuile spectre *face vers le haut* et la tuile spectre *face vers le bas*. En d'autres termes, la prototuille spectre est un *einstein* strictement vampire.

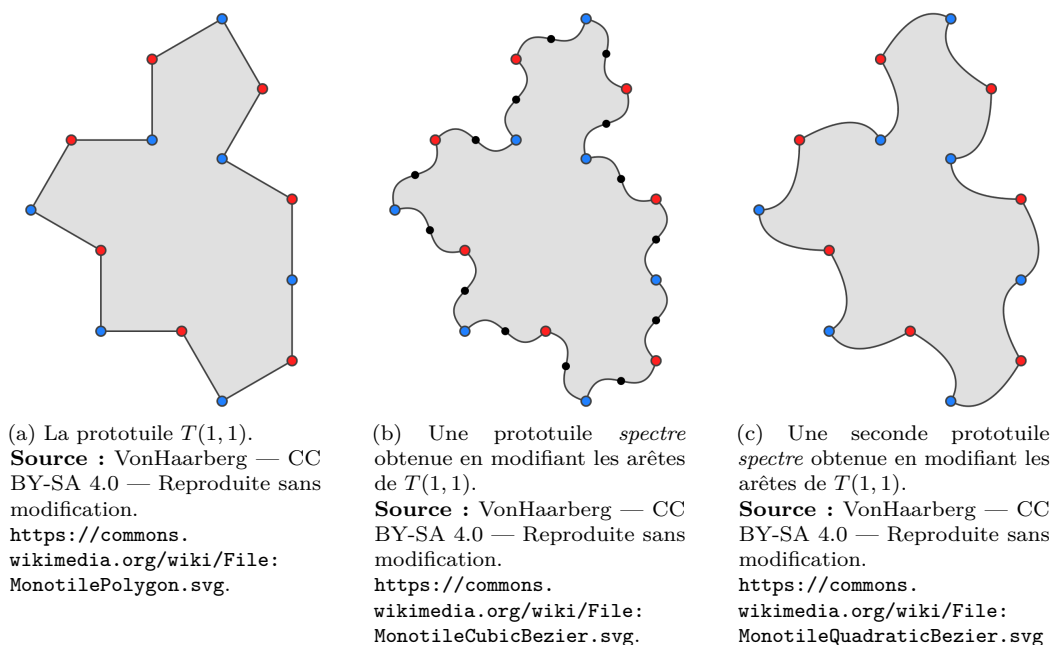


FIGURE 26 – La prototile $T(1,1)$ et certains de ses *spectres*

À moins qu'il y ait une erreur fatale dans le raisonnement de Smith, Myers, Kaplan et Goodman-Strauss (ce qui semble peu probable puisqu'il a, vu la grande attention que sa publication a suscitée, fait l'objet d'une analyse méticuleuse menée indépendamment par plusieurs des plus éminents spécialistes du sujet), le problème *einstein* semble donc indiscutablement résolu, et ce, que l'on admette les réflexions ou non.

Bibliographie

- [1] Robert BERGER : The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 66:72, 1966.
- [2] Jay BONNER : *Islamic geometric patterns : Their historical development and traditional methods of construction*. Springer, 2017.
- [3] Karel CULIK II et Jarkko KARI : An aperiodic set of Wang cubes. *J.UCS*, 1(10):675–686, 1995.
- [4] Karel CULIK II et Jarkko KARI : An aperiodic set of Wang cubes. In *STACS 96 (Grenoble, 1996)*, volume 1046 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 137–146. Springer, Berlin, 1996.
- [5] Francesco D’ANDREA : *A guide to Penrose tilings*. Springer, 2023.
- [6] Martin GARDNER : Mathematical Games : A random assortment of puzzles, together with readers responses to earlier problems. *Scientific American*, 233(6):116–119, 1975.
- [7] Martin GARDNER : Mathematical Games : More about tiling the plane : the possibilities of polyominoes, polyiamonds, and polyhexes. *Scientific American*, 233(2):112–115, 1975.
- [8] Martin GARDNER : Mathematical Games : On tessellating the plane with convex polygon tiles. *Scientific American*, pages 112–117, 1975.
- [9] Martin GARDNER : Mathematical Games : Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American*, 236(1):110–121, 1977.
- [10] Martin GARDNER : *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers : And the Return of Dr Matrix*. Cambridge University Press, 1997.
- [11] Chaim GOODMAN-STRAUSS : Tessellations. *Prépublication arXiv :1606.04459*, 2016.
- [12] Branko GRÜNBAUM et G. C. SHEPHARD : *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [13] Petra GUMMELT : Penrose tilings as coverings of congruent decagons. *Geometriae Dedicata*, 62:1–17, 1996.
- [14] Emmanuel JEANDEL et Michaël RAO : An aperiodic set of 11 Wang tiles. *Advances in Combinatorics*, pages Paper No. 1, 37, 2021.
- [15] Hyeong-Chai JEONG et Paul J STEINHARDT : Constructing penrose-like tilings from a single prototile and the implications for quasicrystals. *Physical Review B*, 55(6):3520, 1997.
- [16] Richard B KERSHNER : On paving the plane. *The American Mathematical Monthly*, 75(8):839–844, 1968.
- [17] Erica KLARREICH : Hobbyist finds math’s elusive ‘Einstein’ tile. *Quanta Magazine*, 2023.
- [18] Donald E KNUTH : *The Art of Computer Programming : Fundamental Algorithms, Vol. 1*. Addison-Wesley, 1968.
- [19] Casey MANN, Jennifer McLOUD-MANN et David VON DERAU : Convex pentagons that admit i-block transitive tilings. *Geometriae Dedicata*, 194(1):141–167, 2018.
- [20] Roger PENROSE : The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 10:266–271, 1974.
- [21] Roger PENROSE : Pentaplexity : a class of nonperiodic tilings of the plane. *Eureka*, 39:16–22, 1978.

- [22] Roger PENROSE : Pentaplexity : a class of nonperiodic tilings of the plane. *The Mathematical Intelligencer*, 2(1):32–37, 1979/80.
- [23] Michael RAO : Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane. *Prépublication arXiv :1708.00274*, 2017.
- [24] Karl REINHARDT : Über die Zerlegung der Ebene in Polygone. *Dissertation, Universitat Frankfurt*, 1918.
- [25] Siobhan ROBERTS : *Genius at play : the curious mind of John Horton Conway*. Bloomsbury Publishing USA, 2015.
- [26] Raphael M. ROBINSON : Seven polygons which admit only nonperiodic tilings of the plane. *Notices Of The American Mathematical Society*, 14:835, 1967.
- [27] Raphael M. ROBINSON : Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.
- [28] Raphael M ROBINSON : Undecidable tiling problems in the hyperbolic plane. *Inventiones mathematicae*, 44(3):259–264, 1978.
- [29] Doris SCHATTSCHEIDER : In praise of amateurs. *The Mathematical Gardner*, pages 140–166, 1981.
- [30] Doris SCHATTSCHEIDER : A new pentagon tiler. *Mathematics Magazine*, 58(5):308, 1985.
- [31] David SMITH, Joseph Samuel MYERS, Craig S KAPLAN et Chaim GOODMAN-STRAUSS : An Aperiodic Monotile. *Prépublication arXiv :2303.10798*, 2023.
- [32] David SMITH, Joseph Samuel MYERS, Craig S KAPLAN et Chaim GOODMAN-STRAUSS : A Chiral Aperiodic Monotile. *Prépublication arXiv :2305.17743*, 2023.
- [33] Joshua SOCOLAR et Joan M TAYLOR : Forcing nonperiodicity with a single tile. *Prépublication arXiv :1009.1419*, 2010.
- [34] Joshua SOCOLAR et Joan M TAYLOR : An aperiodic hexagonal tile. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 118(8):2207–2231, 2011.
- [35] Paul J STEINHARDT et Hyeong-Chai JEONG : A simpler approach to penrose tiling with implications for quasicrystal formation. *Nature*, 382(6590):431–433, 1996.
- [36] Joan M. TAYLOR : Aperiodicity of a functional monotile. *Prépublication [http ://www.math.uni-bielefeld.de/sfb701/preprints/view/420](http://www.math.uni-bielefeld.de/sfb701/preprints/view/420)*, 20141211, 2010.
- [37] Hao WANG : Proving theorems by pattern recognition — II. *Bell System Technical Journal*, 40(1):1–41, 1961.
- [38] Hao WANG : Notes on a class of tiling problems. *Fundamenta Mathematicae*, 82:295–305, 1975.