

Les matrices bistochastiques et le théorème de Birkhoff pour les nuls

Ludovick Bouthat

Midi-conférence

18 septembre 2020

Remarque intéressante

L'ensemble des matrices bistochastiques forment un semi-groupe sous la multiplication matricielle usuelle.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.28 & 0.31 \\ 0.46 & 0.28 & 0.26 \\ 0.13 & 0.44 & 0.43 \end{pmatrix}$$

Théorème de Birkhoff

Théorème (Théorème de Birkhoff)

L'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de permutations de dimension n est l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices bistochastiques de dimension n , i.e.

$$\text{Conv}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{D}_n.$$

- L'ensemble des matrices de permutations de degré n est dénoté par $\mathcal{P}_n$.
- L'ensemble des matrices bistochastiques de degré n est dénoté par $\mathcal{D}_n$.

Définition (Enveloppe convexe)

Soit $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de n éléments. Alors l'*enveloppe convexe* de $\mathcal{A}$ est

$$\text{Conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k : a_k \in \mathcal{A}, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}.$$

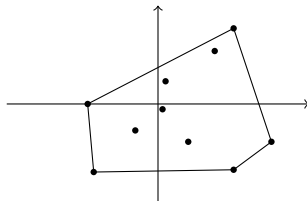


FIGURE – Enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan

Définitions

Matrices de permutations

Définition

Une *matrice de permutation* de dimension n est une matrice $n \times n$ uniquement composée de 0 et de 1 et telle que chaque ligne et chaque colonne contient un seul 1.

Exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de permutation.

Rappel : On note l'ensemble des matrices de permutation de dimension n par $\mathcal{P}_n$.

Rappel

Théorème de Birkhoff

Théorème (Théorème de Birkhoff)

L'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de permutations de dimension n est l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices bistochastiques de dimension n , i.e.

$$\text{Conv}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{D}_n.$$

$Conv(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{D}_n$

- $Conv(\mathcal{P}_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n!} \lambda_k P_k : P_k \in \mathcal{P}_n, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n!} \lambda_k = 1 \right\}.$
- Soit $A \in Conv(\mathcal{P}_n).$

$Conv(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{D}_n$

- $Conv(\mathcal{P}_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n!} \lambda_k P_k : P_k \in \mathcal{P}_n, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n!} \lambda_k = 1 \right\}.$
- Soit $A \in Conv(\mathcal{P}_n).$

$\implies A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_{n!} P_{n!}$ pour certains $\lambda_i, P_i.$

$Conv(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{D}_n$

- $Conv(\mathcal{P}_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n!} \lambda_k P_k : P_k \in \mathcal{P}_n, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n!} \lambda_k = 1 \right\}.$
- Soit $A \in Conv(\mathcal{P}_n).$

$$\implies A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_{n!} P_{n!} \text{ pour certains } \lambda_i, P_i.$$

- Soit p_i^j la $j^{\text{ième}}$ colonne de P_i et a^j la $j^{\text{ième}}$ colonne de $A.$

$$\begin{aligned} \implies \sum a^j &= \lambda_1 \sum p_1^j + \lambda_2 \sum p_2^j + \cdots + \lambda_{n!} \sum p_{n!}^j \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n!} \\ &= 1. \end{aligned}$$

La preuve pour la somme des lignes de A est très similaire. $\square$

Remarque

Remarque : $\mathcal{D}_n = \text{Conv}(\mathcal{D}_n)$.

Remarque

Remarque : $\mathcal{D}_n = \text{Conv}(\mathcal{D}_n)$.

Définition

Un ensemble $\mathcal{A}$ est convexe *si et seulement si* $\mathcal{A} = \text{Conv}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$$

Rappel :

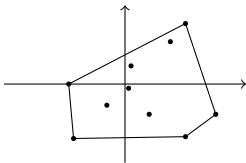


FIGURE – Enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$$

Rappel :

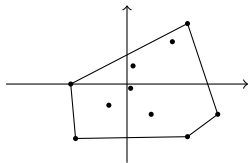


FIGURE – Enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan

Définition

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble convexe. Alors $a \in \mathcal{A}$ est un point extrémal de $\mathcal{A}$ si et seulement si

$$a = \frac{1}{2}(b + c) \implies a = b = c,$$

où $b, c \in \mathcal{A}$.

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$$

- On peut montrer que les points extrémaux de $\mathcal{D}_n$ sont les matrices de permutations $\mathcal{P}_n$.

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$$

- On peut montrer que les points extrémaux de $\mathcal{D}_n$ sont les matrices de permutations $\mathcal{P}_n$.
- N'importe quelle matrice $A \in \mathcal{D}_n$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de matrices de permutations $n \times n$.

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$$

- On peut montrer que les points extrémaux de $\mathcal{D}_n$ sont les matrices de permutations $\mathcal{P}_n$.
 - N'importe quelle matrice $A \in \mathcal{D}_n$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de matrices de permutations $n \times n$.
- $\implies A \in \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$.

$$\mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n)$$

- On peut montrer que les points extrémaux de $\mathcal{D}_n$ sont les matrices de permutations $\mathcal{P}_n$.
- N'importe quelle matrice $A \in \mathcal{D}_n$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de matrices de permutations $n \times n$.

$$\implies A \in \text{Conv}(\mathcal{P}_n).$$

$$\implies \mathcal{D}_n \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P}_n).$$



Rappels

Définition

$\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* d'une matrice $n \times n$ A s'il existe un vecteur v de dimension n tel que

$$Av = \lambda v.$$

Définition

Le *spectre* d'une matrice carrée A de dimension n , dénoté par $\sigma(A)$, est l'ensemble de ses valeurs propres, i.e.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists v \in \mathbb{C}^n \text{ t.q. } Av = \lambda v\}.$$

Questions intéressantes

Question 1 : Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il une matrice bistochastique $D \in \mathcal{D}_n$ telle que λ est une valeur propre de D ?

Question 2 : Comment se caractérise l'ensemble

$$\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists D \in \mathcal{D}_n \text{ t.q. } \lambda \in \sigma(D)\} \subseteq \mathbb{C}?$$

Faits divers sur Ω_n

- Ω_n est un ensemble étoilé à partir de n'importe quel point $t \in [0, 1]$.
- Ω_n est contenu dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$.
- Ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.
- Soit Π_k l'enveloppe convexe des $k^{\text{ième}}$ racines de l'unité. Alors

$$\bigcup_{k=1}^n \Pi_k \subseteq \Omega_n.$$

Conjecture de Perfect-Mirsky

- Hazel Perfect et Leon Mirsky ont conjecturés en 1965 que pour tout n ,

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k.$$

Conjecture de Perfect-Mirsky

- Hazel Perfect et Leon Mirsky ont conjecturés en 1965 que pour tout n ,

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k.$$

- La conjecture a été démontré pour les cas $n = 1, 2, 3, 4$.

Conjecture de Perfect-Mirsky

- Hazel Perfect et Leon Mirsky ont conjecturés en 1965 que pour tout n ,

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k.$$

- La conjecture a été démontré pour les cas $n = 1, 2, 3, 4$.
- J. Mashreghi et R.Rivard ont montrés en 2007 à l'aide d'un contre-exemple que la conjecture ne tient pas pour le cas $n = 5$.

Le contre-exemple en question

La matrice

$$t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admet des valeurs propres en dehors de $\bigcup_{k=1}^n \Pi_k$ pour (environ)
 $t \in [0.4705275, 0.5490013]$.

Quelques jolies images

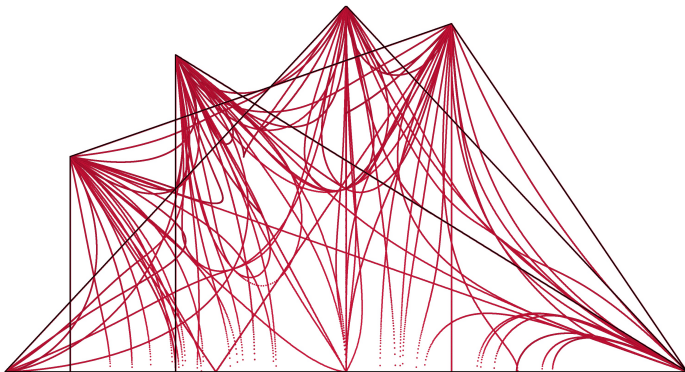


FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 5$.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

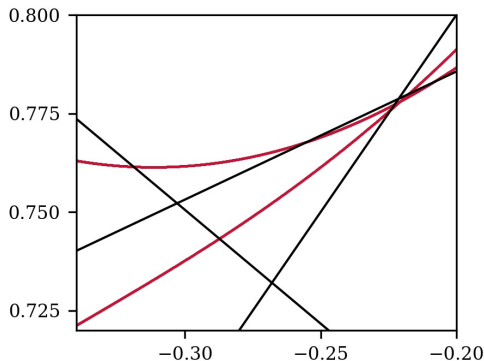


FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 5$ près du « point critique ».

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

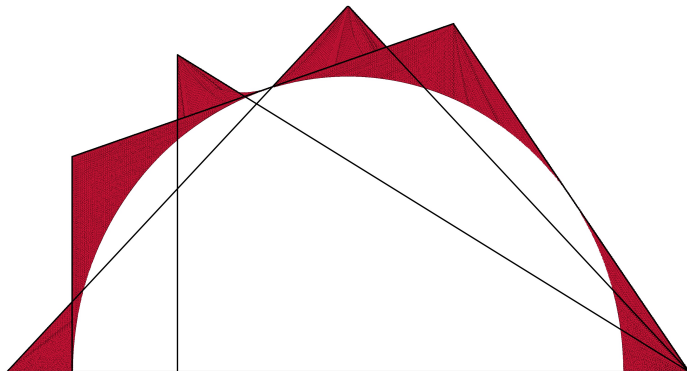


FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de triplets de matrices de permutations pour $n = 5$; le cercle inscrit a été omit.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

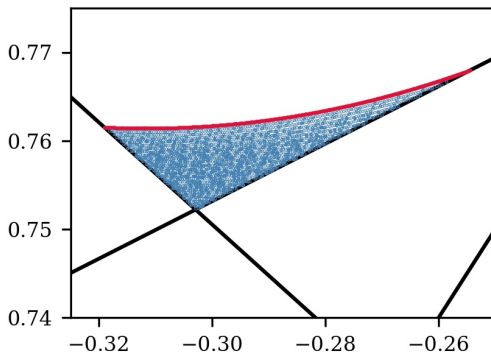


FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de triplets de matrices de permutations pour $n = 5$ près du « point critique ».

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

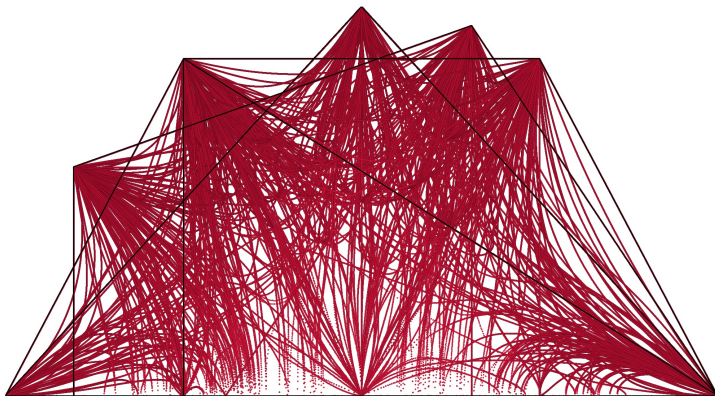


FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 6$.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

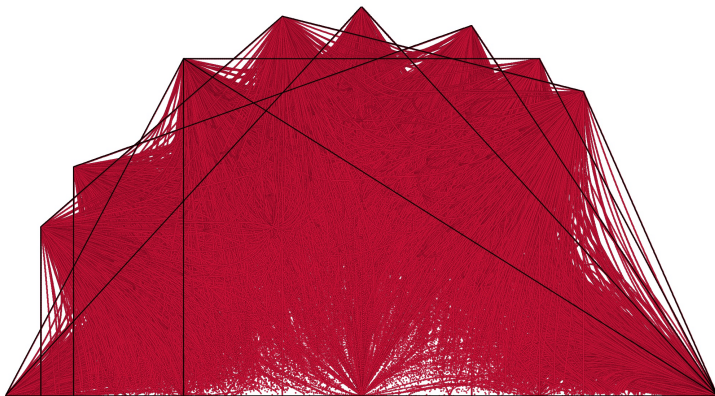


FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 7$.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.