

# La majorisation, les inégalités salariales et les matrices doublement stochastiques

Ludovick Bouthat

Université Laval

23 mai 2021

# No. 5 (1948)

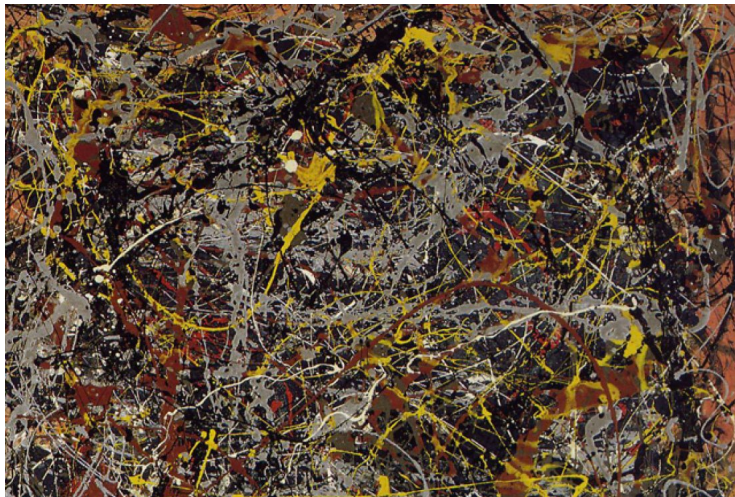


FIGURE – No. 5 (1948)

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

**Conditions à satisfaire :**

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

**Conditions à satisfaire :**

- 1 Intuitive et pratique ;

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

### Conditions à satisfaire :

- ① Intuitive et pratique ;
- ② Indépendante de la masse salariale de la population ;

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

### Conditions à satisfaire :

- ① Intuitive et pratique ;
- ② Indépendante de la masse salariale de la population ;
- ③ Indépendante de la taille de la population.

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Intuition

Supposons que les deux populations  
sont de taille égale !

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conventions

### Notations :

$x := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  — Les salaires de la population 1 ;

$y := (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$  — Les salaires de la population 2 ;

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conventions

### Notations :

$x := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  — Les salaires de la population 1 ;

$y := (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$  — Les salaires de la population 2 ;

### Suppositions :

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n ;$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{n-1} \geq y_n ;$$

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

## Conventions

### Notations :

$x := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  — Les salaires de la population 1 ;

$y := (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$  — Les salaires de la population 2 ;

### Suppositions :

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n ;$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{n-1} \geq y_n ;$$

$$\sum_{k=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n y_i = 1.$$

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ( $n = 2$ )

$(1, 0)$  vs.  $(0.6, 0.4)$  ?

$(0.6, 0.4)$  vs.  $(0.5, 0.5)$  ?

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ( $n = 2$ )

$(1, 0)$  vs.  $(0.6, 0.4)$  ?

$(0.6, 0.4)$  vs.  $(0.5, 0.5)$  ?

$y$  est plus *inégal* que  $x$  si  $y_1 \geq x_1$  (et  $y_2 \leq x_2$ ).

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ( $n = 3$ )

$(0.6, 0.2, 0.2)$  vs.  $(0.4, 0.4, 0.2)$  ?

$(0.6, 0.2, 0.2)$  vs.  $(0.\bar{3}, 0.\bar{3}, 0.\bar{3})$  ?

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ( $n = 3$ )

$(0.6, 0.2, 0.2)$  vs.  $(0.4, 0.4, 0.2)$  ?

$(0.6, 0.2, 0.2)$  vs.  $(0.\overline{3}, 0.\overline{3}, 0.\overline{3})$  ?

$y$  est plus *inégal* que  $x$  si  $y_1 \geq x_1$ ,  $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$  (et  $y_3 \leq x_3$ ).

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Le cas général, la *majorisation*

$y$  est plus *inégal* que  $x$  si

$$y_1 \geq x_1;$$

$$y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2;$$

$$\vdots$$

$$y_1 + \cdots + y_{n-1} \geq x_1 + \cdots + x_{n-1};$$

$$y_1 + \cdots + y_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

# Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Le cas général, la *majorisation*

$y$  est plus *inégal* que  $x$  si

$$y_1 \geq x_1;$$

$$y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2;$$

$$\vdots$$

$$y_1 + \cdots + y_{n-1} \geq x_1 + \cdots + x_{n-1};$$

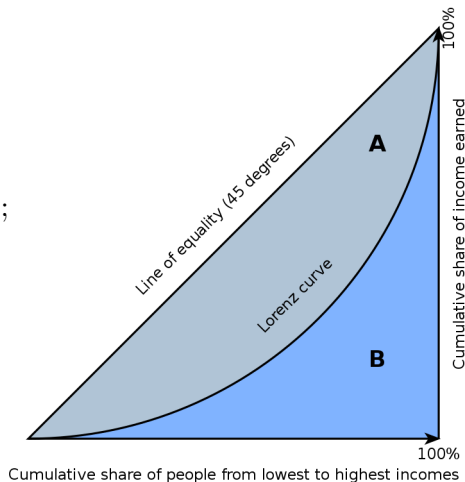
$$y_1 + \cdots + y_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

On dit que  $y$  *majorise*  $x$  et on écrit  $x \prec y$  si les conditions ci-dessus sont satisfaites.

# Comment mesurer l'étendu de l'inégalité salariale ?

La courbe de Lorenz (1905)

- $S_k = \sum_{i=1}^k x_i^\uparrow, \quad S_0 = 0;$
- $(k/n, S_k/S_n)$



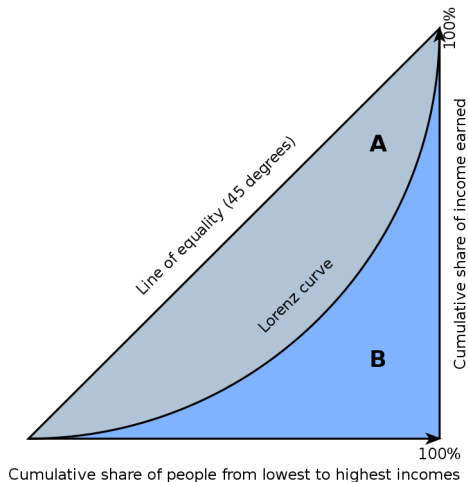
Source : [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Economics\\_Gini\\_coefficient.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Economics_Gini_coefficient.svg)

# Comment mesurer l'étendu de l'inégalité salariale ?

## Le coefficient de Gini

Le *coefficient de Gini*  
(ou *l'indice de Gini*) est  
donné par la formule

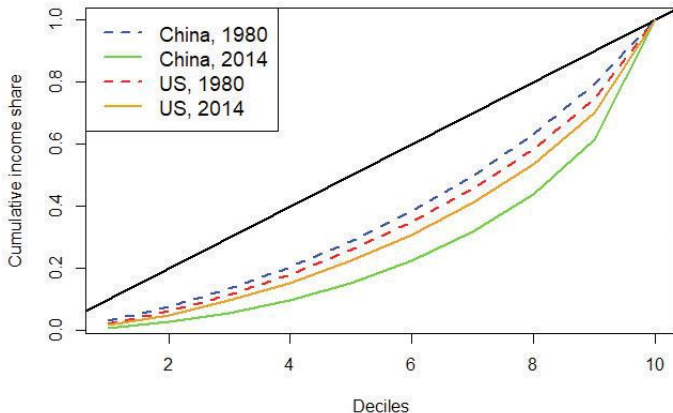
$$G = \frac{A}{A+B} = 2A = 1 - 2B.$$



# Comment mesurer l'étendu de l'inégalité salariale ?

## Exemple concret

Lorenz Curves, China and the US (1980 and 2014)



$G=0.300$  ;  
 $G=0.345$  ;  
 $G=0.407$  ;  
 $G=0.474$  .

Source : <https://www.core-econ.org/doing-economics/book/text/05-03.html#part-51-measuring-income-inequality>

# Peut-on concevoir des solutions ?

Solution à quoi ?

Si  $x \prec y$ , peut-on *obtenir*  $x$  en faisant un nombre *fini* de transferts à  $y$  ?

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Exemple

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Exemple

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

- $P1 \xrightarrow{0.1} P2 \quad \& \quad P1 \xrightarrow{0.1} P3 \quad \& \quad P1 \xrightarrow{0.1} P4;$

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Exemple

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

- $P1 \xrightarrow{0.1} P2$  &  $P1 \xrightarrow{0.1} P3$  &  $P1 \xrightarrow{0.1} P4$ ;
- $P1 \xrightarrow{0.3} P2$  &  $P2 \xrightarrow{0.2} P3$  &  $P3 \xrightarrow{0.1} P4$ .

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Exemple

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

- $P1 \xrightarrow{0.1} P2$  &  $P1 \xrightarrow{0.1} P3$  &  $P1 \xrightarrow{0.1} P4$ ;
- $P1 \xrightarrow{0.3} P2$  &  $P2 \xrightarrow{0.2} P3$  &  $P3 \xrightarrow{0.1} P4$ .

Ce type de transfert se nomme un *Transfert de Dalton*. Si le transfert est d'un individu plus riche à un individu plus pauvre on dit qu'il s'agit d'un *Transfert de Robin des Bois*, ou bien un *Transfert de Dalton altruiste*.

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

Comment représenter ces transferts ?

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

Comment représenter ces transferts ?

Soient  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$  et  $1 \leq i < j \leq n$  deux indices.

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

Comment représenter ces transferts ?

Soient  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$  et  $1 \leq i < j \leq n$  deux indices.

$$x^* := (x_1, \dots, \underbrace{tx_i + (1-t)x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{tx_j + (1-t)x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)$$

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

$$x^* := (x_1, \dots, \underbrace{tx_i + (1-t)x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{tx_j + (1-t)x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t$$

Soit  $P$  la matrice de permutation qui interchange les coefficients  $i$  et  $j$ .

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

$$x^* := (x_1, \dots, \underbrace{tx_i + (1-t)x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{tx_j + (1-t)x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t$$

Soit  $P$  la matrice de permutation qui interchange les coefficients  $i$  et  $j$ .

$$Px^t := (x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t$$

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

$$x^* := (x_1, \dots, \underbrace{tx_i + (1-t)x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{tx_j + (1-t)x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t$$

Soit  $P$  la matrice de permutation qui interchange les coefficients  $i$  et  $j$ .

$$Px^t := (x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t$$

$$\implies x^* = tx^t + (1-t)Px^t = (tI + (1-t)P)x^t =: Tx^t$$

# Peut-on concevoir des solutions ?

## Notation matricielle

$$x^* := (x_1, \dots, \underbrace{tx_i + (1-t)x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{tx_j + (1-t)x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t$$

Soit  $P$  la matrice de permutation qui interchange les coefficients  $i$  et  $j$ .

$$\begin{aligned} Px^t &:= (x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \dots, x_n)^t \\ \implies x^* &= tx^t + (1-t)Px^t = (tI + (1-t)P)x^t =: Tx^t \end{aligned}$$

La matrice  $T$  est appelée une  $T$ -transformation.

# Équivalence entre la majorisation et les $T$ -transformations

## Hypothèse et résultat

Si  $x \prec y$ , alors il existe un nombre fini de  $T$ -transformations  $T_1, \dots, T_m$  telles que  $x = T_m \dots T_1 y$ .

# Équivalence entre la majorisation et les $T$ -transformations

## Hypothèse et résultat

Si  $x \prec y$ , alors il existe un nombre fini de  $T$ -transformations  $T_1, \dots, T_m$  telles que  $x = T_m \dots T_1 y$ .

### Théorème

*Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $x \prec y$  si et seulement s'il existe au plus  $n - 1$   $T$ -transformations  $T_1, \dots, T_m$  telles que  $x = T_m \dots T_1 y$ .*

# Équivalence entre la majorisation et les $T$ -transformations

## Hypothèse et résultat

Si  $x \prec y$ , alors il existe un nombre fini de  $T$ -transformations  $T_1, \dots, T_m$  telles que  $x = T_m \dots T_1 y$ .

### Théorème

*Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $x \prec y$  si et seulement s'il existe au plus  $n - 1$   $T$ -transformations  $T_1, \dots, T_m$  telles que  $x = T_m \dots T_1 y$ .*

### Démonstration.

Preuve triviale par la méthode *d'intuition*. □

# Équivalence entre la majorisation et les $T$ -transformations

## Résultats supplémentaires

### Théorème

Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- ❶  $x \prec y$  ;
- ❷ Il existe au plus  $n - 1$   $T$ -transformations  $T_1, \dots, T_m$  telles que  $x = T_m \dots T_1 y$  ;
- ❸  $x = Dy$  pour une certaine matrice bistochastique  $D$  ;
- ❹ Il existe une matrice hermitienne d'éléments diagonaux  $x$  et de valeurs propres  $y$  ;
- ❺  $\Phi(x_1) + \dots + \Phi(x_n) \leq \Phi(y_1) + \dots + \Phi(y_n)$  pour toute fonction convexe  $\Phi$ .

# Références

- [1] Albert W. Marshall, Ingram Olkin, and Barry C. Arnold.  
*Inequalities : theory of majorization and its applications.*  
Springer Series in Statistics. Springer, New York, second  
edition, 2011.