

Exploring Hadamard multipliers on weighted Dirichlet spaces through L -matrices

Ludovick Bouthat

Université Laval

November 30th, 2024

Les matrices infinies

- Tout opérateur linéaire borné $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ admet une représentation *unique* comme matrice infinie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

où $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$.

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A , représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A , représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?
- Si oui, quelle est la valeur de sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} ?$$

Quelques questions

- Étant donné une matrice infinie A , représente-t-elle un opérateur borné sur ℓ^2 ?
- Si oui, quelle est la valeur de sa *norme d'opérateur*

$$\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} ?$$

- Si la valeur exacte de $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}$ n'est pas connue, quelles bornes supérieures peuvent être obtenues ?

Exemple : La matrice de Hilbert

La matrice de Hilbert

Définition

La matrice de Hilbert (infinie) est la matrice

$$H := \left[\frac{1}{i+j+1} \right]_{i,j \geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Exemple : La matrice de Hilbert

La matrice de Hilbert

Définition

La matrice de Hilbert (infinie) est la matrice

$$H := \left[\frac{1}{i+j+1} \right]_{i,j \geq 0} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- H est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|H\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \pi$.

Les L -matrices

Définition

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres (positifs). Une L -matrice est une matrice infinie de la forme

$$A := [a_n] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Les L -matrices

Définition

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres (positifs). Une L -matrice est une matrice infinie de la forme

$$A := [a_n] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_3 & a_3 & a_3 & a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Question : Sous quelles conditions la L -matrice $[a_n]$ agit comme un opérateur borné sur ℓ^2 , et quelle est sa norme ?

Motivation

Espaces de Dirichlet pondérés

Definition

Soient ω une fonction positive superharmonique sur $\mathbb{D}$ et $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. On définit

$$\mathcal{D}_\omega(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \omega(z) \, dA(z),$$

où dA est la mesure d'aire normalisée sur $\mathbb{D}$. L'espace de Dirichlet pondéré $\mathcal{D}_\omega$ est l'ensemble des fonctions $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ telles que $\mathcal{D}_\omega(f) < \infty$.

Example

Les poids $\omega(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, où $0 \leq \alpha \leq 1$ interpolent entre l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ (quand $\alpha = 0$) et l'espace de Hardy H^2 (quand $\alpha = 1$).

Motivation

Multiplicateur d'Hadamard

Définition

Soient $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ deux séries formelles. Leur produit d'Hadamard est définie par

$$(f * g)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k.$$

Les multiplicateurs d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$ sont les séries formelles h qui ont la propriété que $h * f \in \mathcal{D}_\omega$ pour tout $f \in \mathcal{D}_\omega$.

Motivation

Caractérisation des multiplicateurs d'Hadamard sur $\mathcal{D}_\omega$

Théorème (Mashreghi–Ransford, 2019)

$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ est un multiplicateur d'Hadamard pour l'espace de Dirichlet pondéré $\mathcal{D}_\omega$ pour toute fonction superharmonique ω si et seulement si la L -matrice

$$T_h := [c_{n+1}] - [c_n] = \begin{pmatrix} c_1 - c_0 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_2 - c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_3 - c_2 & c_3 - c_2 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \dots \\ c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & c_4 - c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

agit comme un opérateur borné sur ℓ^2 .

Une condition nécessaire

Soit $A := [a_n]$. Remarquons que

$$\begin{aligned}\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}^2 &\geq \frac{\|Ae_n\|_2^2}{\|e_n\|_2^2} \\ &= (n+1)|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + \cdots \\ &\geq n|a_n|^2.\end{aligned}$$

Une condition nécessaire

Soit $A := [a_n]$. Remarquons que

$$\begin{aligned}\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}^2 &\geq \frac{\|Ae_n\|_2^2}{\|e_n\|_2^2} \\ &= (n+1)|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + \cdots \\ &\geq n|a_n|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, pour que $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < \infty$, il est nécessaire que

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

L'optimalité de cette condition

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où

$$a_n = \begin{cases} 1/n^\alpha & \text{si } n = 2^k, k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où $\alpha > 1/2$.

L'optimalité de cette condition

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où

$$a_n = \begin{cases} 1/n^\alpha & \text{si } n = 2^k, k \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et où $\alpha > 1/2$. Alors

$$\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2 \cdot 2^k + 1) a_{2^k}^2 \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(2\alpha-1)k}} < \infty.$$

L'insuffisance de la condition

Soit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \infty$ et A n'est pas un opérateur borné sur ℓ^2 .

Il suffit de considérer la suite de vecteurs

$$x_n = (1^\alpha, 2^\alpha, \dots, n^\alpha, 0, 0, \dots)^{tr}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Une condition suffisante

Un cas particulier

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Soit $A = [a_n]$ une L -matrice telle que $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite strictement décroissante. Si

$$\Delta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n(a_{n-1} + a_n)}{a_{n-1} - a_n} < \infty,$$

alors A est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \leq 2 \max\{a_0, \Delta\}$.

Une condition suffisante

Le cas général

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Soit $A = [a_n]$ une L -matrice et $(\delta_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre positifs strictement décroissants. Si

$$\Delta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a_n + \delta_{n-1})(a_n + \delta_n)}{\delta_{n-1} - \delta_n} < \infty,$$

alors A est un opérateur borné sur ℓ^2 et $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \leq \max\{a_0 + \delta_0, \Delta\}$.

Caractérisation complète de $O(n^{-\alpha})$

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où $a_n = O(1/n)$. Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < \infty$.

Caractérisation complète de $O(n^{-\alpha})$

Considérons la L -matrice $A = [a_n]$ où $a_n = O(1/n)$. Alors $\|A\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < \infty$.

Corollaire (B.–Mashreghi, 2021)

Soit $A = [a_n]$ une L -matrice. La condition $a_n = O(1/n^\alpha)$ est

- nécessaire si $\alpha = \frac{1}{2}$;
- ni nécessaire, ni suffisante si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$;
- suffisante si $\alpha = 1$;

pour que A soit un opérateur borné sur ℓ^2 .

La L -matrice de Hilbert

Définition

Soit $s \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. La L -matrice de Hilbert est la matrice

$$L_s := \left[\frac{1}{\max\{i, j\} + s} \right]_{i, j \geq 0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{1+s} & \frac{1}{1+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{2+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \frac{1}{3+s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4$.

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4$.

- $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \geq \|L_s e_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}.$

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 1)

Théorème (B.–Mashreghi, 2021)

Supposons que $s \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4$.

$$\bullet \|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \geq \|L_s e_1\|_{\ell^2} \geq a_0 = \frac{1}{s}.$$

Question : Quelle est la valeur de $s_0 := \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4\}$?

La valeur exacte de s_0

Soit ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| z\right)$ la fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2$.

Théorème (Štampach, 2021)

Soit $s_0 = \inf\{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 4\}$. Alors s_0 est l'unique racine positive de la fonction

$$s \mapsto {}_3F_2\left(\begin{matrix} -1/2, 1/2, 3/2 \\ 1, s + 1/2 \end{matrix} \middle| 1\right).$$

Numériquement, on a $s_0 \approx 0.349086$.

La norme de la L -matrice de Hilbert

(Partie 2)

Théorème (Štampach, 2021)

Si $0 < s < s_0$, alors $\|L_s\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \frac{4}{1-4x^2(s)}$, où $x(s)$ est l'unique racine dans l'intervalle $(0, 1/2)$ de la fonction

$$t \mapsto {}_3F_2\left(\begin{matrix} t - 1/2, t + 1/2, t + 3/2 \\ 2t + 1, t + s + 1/2 \end{matrix} \middle| 1\right).$$

Une extension aux espaces ℓ^p

Théorème (B.–Mashreghi, 2022)

Si $s \geq 1$ et $1 < p < \infty$, alors $\|L_s\|_{\ell^p \rightarrow \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}$.

Une extension aux espaces ℓ^p

Théorème (B.–Mashreghi, 2022)

Si $s \geq 1$ et $1 < p < \infty$, alors $\|L_s\|_{\ell^p \rightarrow \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}$.

Question : Quelle est la valeur de $s_0(p) := \inf \{s > 0 : \|L_s\|_{\ell^p \rightarrow \ell^p} = \frac{p^2}{p-1}\}$?

References

-  Mashreghi, J., Ransford, T. (2019). Hadamard multipliers on weighted Dirichlet spaces. *Integral Equations and Operator Theory*, 91(6), 1-13.
-  Bouthat, L., Mashreghi, J. (2021) The norm of an infinite L -matrix. *Operators and Matrices*. 15(4) : 47-58
-  Bouthat, L., Mashreghi, J. (2021) L -Matrices with Lacunary Coefficients. *Operators and Matrices*. 15(65) : 1045-1053
-  Bouthat, L., Mashreghi, J. (2022) The critical point and the p -norm of the Hilbert L -matrix. *Linear Algebra and Its Applications*. 634 : 1-14
-  Štampach, F. (2022) The Hilbert L -matrix. *Journal of Functional Analysis*. 282(8), 109401.