

Des suites qui divergent, mais pas trop

Comment les suites divergentes peuvent tendre vers une limite ?

Julien April et Ludovick Bouthat

14 octobre 2023

Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval, Québec, Canada

Table des matières

1 Introduction

2 Méthode de Cesàro

3 Généralisation

4 Conclusion

Introduction

1 Introduction

2 Méthode de Cesàro

3 Généralisation

4 Conclusion

Deux philosophes

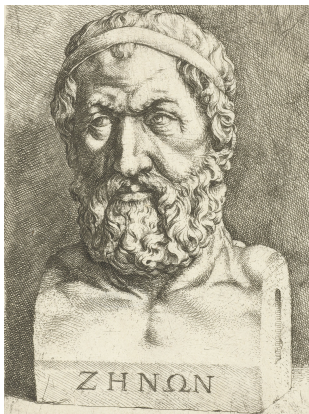


Figure 1 – Zénon d'Élée

Deux philosophes



Figure 1 – Zénon d'Élée

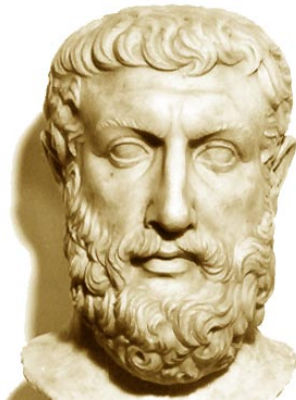


Figure 2 – Parménide

Un paradoxe ?

Un point de vue moderne

Théorème (Zénon d'Élée)

Pour toute suite $(a_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels strictement positifs,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \infty.$$

Un point de vue moderne

~~Théorème (Zénon d'Élée)~~

~~Pour toute suite $(a_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels strictement positifs,~~

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \infty.$$

Un point de vue moderne

~~Théorème (Zénon d'Élée)~~

~~Pour toute suite $(a_k)_{k \geq 1}$ de nombres réels strictement positifs,~~

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \infty.$$

Définition

Une somme infinie converge vers s si la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de ses sommes partielles $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ converge vers s , à savoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s.$$

Dans ce cas, on écrit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Exemple 1 : Fonction zêta de Riemann

Théorème

Pour tout $p > 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots < \infty.$$

De plus, cette série est proprement divergente pour tout $p \leq 1$.

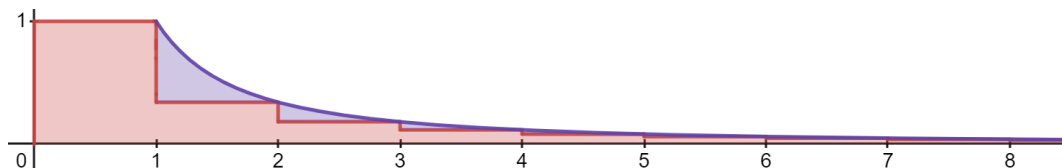
Exemple 1 : Fonction zêta de Riemann

Théorème

Pour tout $p > 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots < \infty.$$

De plus, cette série est proprement divergente pour tout $p \leq 1$.



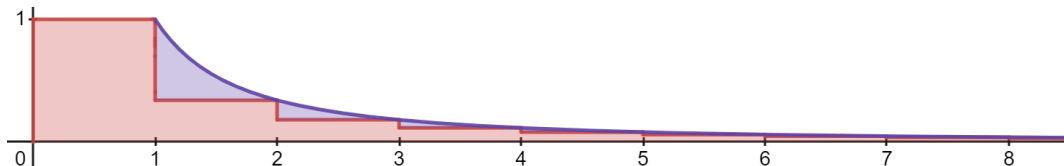
Exemple 1 : Fonction zêta de Riemann

Théorème

Pour tout $p > 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots < \infty.$$

De plus, cette série est proprement divergente pour tout $p \leq 1$.



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{p}{p-1}$$

Exemple 2 : Série géométrique

Théorème

Pour tout $r \in (-1, 1)$,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r} < \infty.$$

Exemple 2 : Série géométrique

Théorème

Pour tout $r \in (-1, 1)$,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r} < \infty.$$

Démonstration.

$$S = 1 + rS \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{1-r}$$



Série de Grandi

Définition (Série de Grandi)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Série de Grandi

Définition (Série de Grandi)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

■ $S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$

Série de Grandi

Définition (Série de Grandi)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- $S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$
- $S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - \dots = 1$

Un problème intéressant !

■ Leonhard Euler (1707–1783)



Un problème intéressant !

- Leonhard Euler (1707–1783)
- Konrad Knopp (1882–1957)



Un problème intéressant !

- Leonhard Euler (1707–1783)
- Konrad Knopp (1882–1957)
- Niels Abel (1802–1829)



Un problème intéressant !

- Leonhard Euler (1707–1783)
- Konrad Knopp (1882–1957)
- Niels Abel (1802–1829)
- **Émile Borel (1871 – 1956)**



Un problème intéressant !

- Leonhard Euler (1707–1783)
- Konrad Knopp (1882–1957)
- Niels Abel (1802–1829)
- Émile Borel (1871 – 1956)
- **Ernesto Cesàro (1859 – 1906)**



Histoire

Dans l'ensemble, les mathématiciens avant Cauchy ne se demandaient pas
«**Comment définit-on** $1 - 1 + 1 - \dots$?», mais plutôt «**Que vaut** $1 - 1 + 1 - \dots$?».

Traduction libre de G. H. Hardy, Divergent series

Histoire

Dans l'ensemble, les mathématiciens avant Cauchy ne se demandaient pas
«**Comment définit-on** $1 - 1 + 1 - \dots$?», mais plutôt «**Que vaut** $1 - 1 + 1 - \dots$?».

Traduction libre de G. H. Hardy, Divergent series

En 1890, Ernesto Cesàro donne une définition rigoureuse de la somme d'une série divergente.

Méthode de Cesàro

1 Introduction

2 Méthode de Cesàro

3 Généralisation

4 Conclusion

Définition

Définition

Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres réels et $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ses sommes partielles.

Si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_m}{m} = s,$$

on dit que s est la somme de Cesàro de la série $\sum a_i$ et on écrit

$$s_n \rightarrow s \text{ (C)}.$$

Série de Grandi

Exemple

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Série de Grandi

Exemple

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Les sommes partielles sont données par

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Série de Grandi

Exemple

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Les sommes partielles sont données par

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Ainsi, les moyennes auxiliaires sont données par

$$\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m+2} & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

Série de Grandi

Exemple (Suite)

$$\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m+2} & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

Série de Grandi

Exemple (Suite)

$$\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m+2} & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n = \frac{1}{2}.$$

Série de Grandi

Exemple (Suite)

$$\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m+2} & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n = \frac{1}{2}.$$

Donc, la somme de Cesàro de la série de Grandi est $1/2$, ce qu'on écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1/2 \text{ (C).}$$

Méthode de sommabilité

Définition

Une méthode de sommabilité est une fonction de l'ensemble des suites de sommes partielles d'une série vers une valeur.

Méthode de sommabilité

Définition

Une méthode de sommabilité est une fonction de l'ensemble des suites de sommes partielles d'une série vers une valeur.

Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres réels, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ses sommes partielles et P une méthode de sommabilité. Si la méthode (P) associe la valeur s à la suite $(s_n)_{n \geq 1}$, on écrit

$$\sum a_k = s (P)$$

et

$$s_n \rightarrow s (P).$$

Propriétés

Définition (Régularité totale)

Une méthode de sommabilité P est dite totalement régulière si

- $s_n \rightarrow s \implies s_n \rightarrow s (P),$
- $s_n \rightarrow \infty \implies s_n \rightarrow \infty (P).$

Propriétés

Définition (Régularité totale)

Une méthode de sommabilité P est dite totalement régulière si

- $s_n \rightarrow s \implies s_n \rightarrow s (P),$
- $s_n \rightarrow \infty \implies s_n \rightarrow \infty (P).$

Définition (Linéarité)

Une méthode de sommabilité P est dite linéaire si

- $s_n \rightarrow s (P) \implies ks_n \rightarrow ks (P),$
- $s_n \rightarrow s (P) \text{ et } t_n \rightarrow t (P) \implies (s_n + t_n) \rightarrow s + t (P).$

Propriétés : Cesàro

Proposition

La méthode de Cesàro est totalement régulière et linéaire.

Propriétés : Cesàro

Proposition

La méthode de Cesàro est totalement régulière et linéaire.

Démonstration.

- $s_n \rightarrow s \implies s_n \rightarrow s (C)$, par le théorème de Cauchy.
- $s_n \rightarrow \infty \implies s_n \rightarrow \infty (C)$, trivial.
- $s_n \rightarrow s (C)$ et $t_n \rightarrow t (C) \implies (ks_n + t_n) \rightarrow ks + t (C)$,
linéarité de la moyenne arithmétique.



Pourquoi définir des méthodes de sommabilité ?

- Base solide pour des manipulations symboliques.

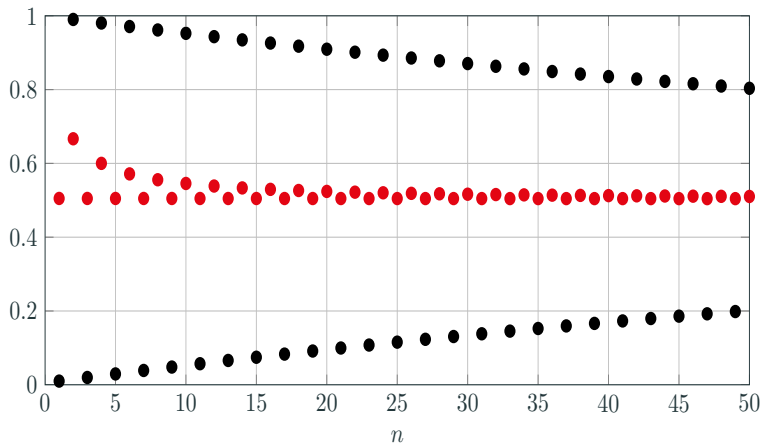
Pourquoi définir des méthodes de sommabilité ?

- Base solide pour des manipulations symboliques.
- Exemple d'application : Séries de Fourier.

Pourquoi définir des méthodes de sommabilité ?

- Base solide pour des manipulations symboliques.
- Exemple d'application : Séries de Fourier.
- Sommation efficace de séries qui convergent lentement.

Application 1 : Sommation efficace



● Sommes partielles
● Moyennes auxiliaires

$$\sum a_k = s \ (C)$$

déf $\iff \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{s_n}{m} = s$

Application 2 : Suite perturbée

Exemple

On veut connaître la limite d'une suite (s_n) convergente, mais on ne connaît pas explicitement les termes de cette suite. Toutefois, on connaît les termes de la suite perturbée (t_n) , où

$$t_n = s_n + r_n.$$

Application 2 : Suite perturbée

Exemple

On veut connaître la limite d'une suite (s_n) convergente, mais on ne connaît pas explicitement les termes de cette suite. Toutefois, on connaît les termes de la suite perturbée (t_n) , où

$$t_n = s_n + r_n.$$

Les r_n correspondent à des perturbations. En général, la suite (r_n) est divergente. Dans ce cas, la suite (t_n) est aussi divergente.

Application 2 : Suite perturbée

Exemple

On veut connaître la limite d'une suite (s_n) convergente, mais on ne connaît pas explicitement les termes de cette suite. Toutefois, on connaît les termes de la suite perturbée (t_n) , où

$$t_n = s_n + r_n.$$

Les r_n correspondent à des perturbations. En général, la suite (r_n) est divergente. Dans ce cas, la suite (t_n) est aussi divergente.

Par exemple, on pourrait avoir des (r_n) indépendants et identiquement distribués selon une loi normale centrée. Dans ce cas, on peut montrer que

$$t_n \rightarrow s \text{ (C)} \implies s_n \rightarrow s.$$

Application 2 : Suite perturbée

Exemple

- $t_n = s_n + r_n$,
- s_n converge,
- $r_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

Application 2 : Suite perturbée

Exemple

- $t_n = s_n + r_n$,
- s_n converge,
- $r_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$,
- $\sum_{n=1}^m \frac{r_n}{m} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/m)$.

Application 2 : Suite perturbée

Exemple

- $t_n = s_n + r_n,$

- s_n converge,

- $r_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$

- $\sum_{n=1}^m \frac{r_n}{m} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/m).$

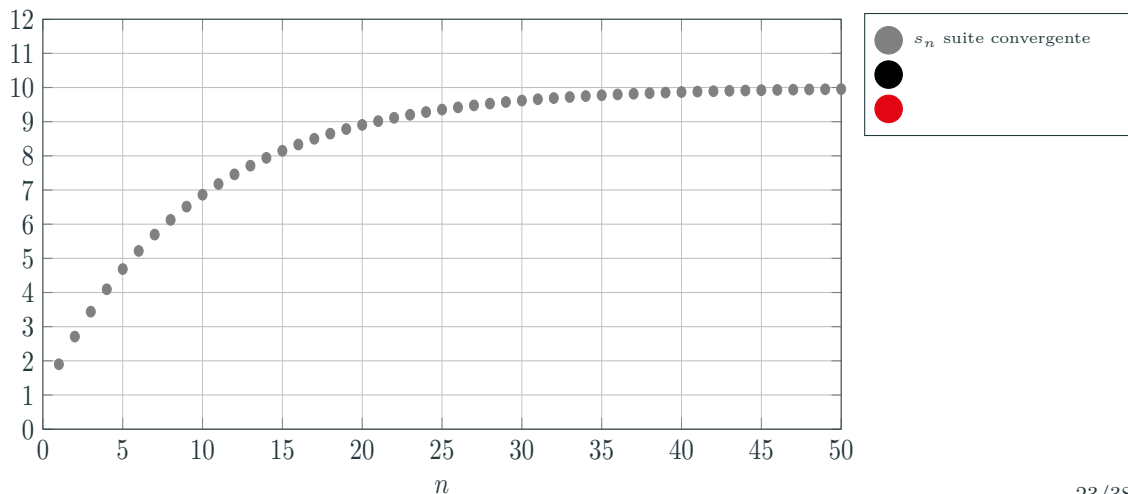
$$t_n \rightarrow s \ (C) \implies \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{t_n}{m} = t$$

$$\implies \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{s_n}{m} + \sum_{n=1}^m \frac{r_n}{m} \right) = t$$

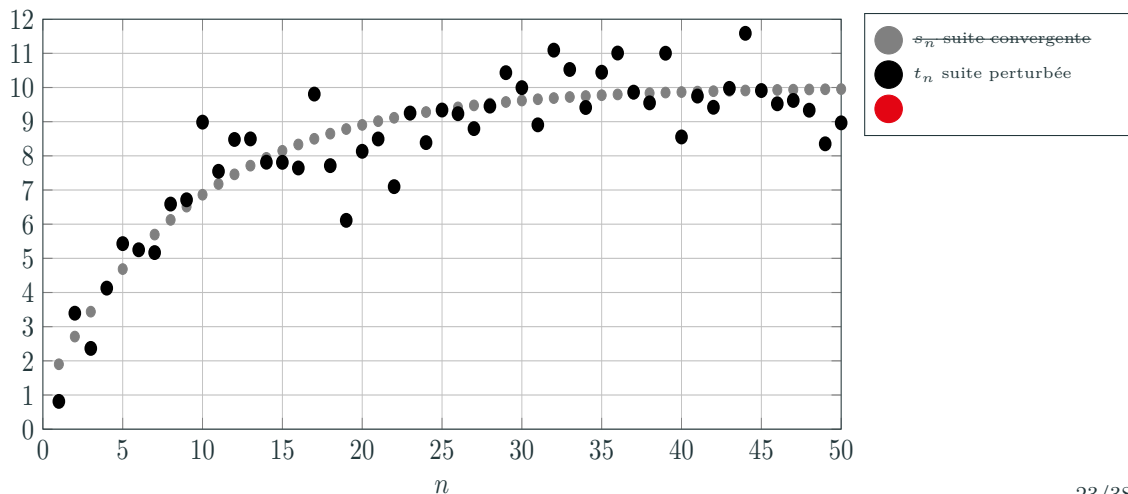
$$\implies s_n \rightarrow t \ (C)$$

$$\implies s_n \rightarrow s.$$

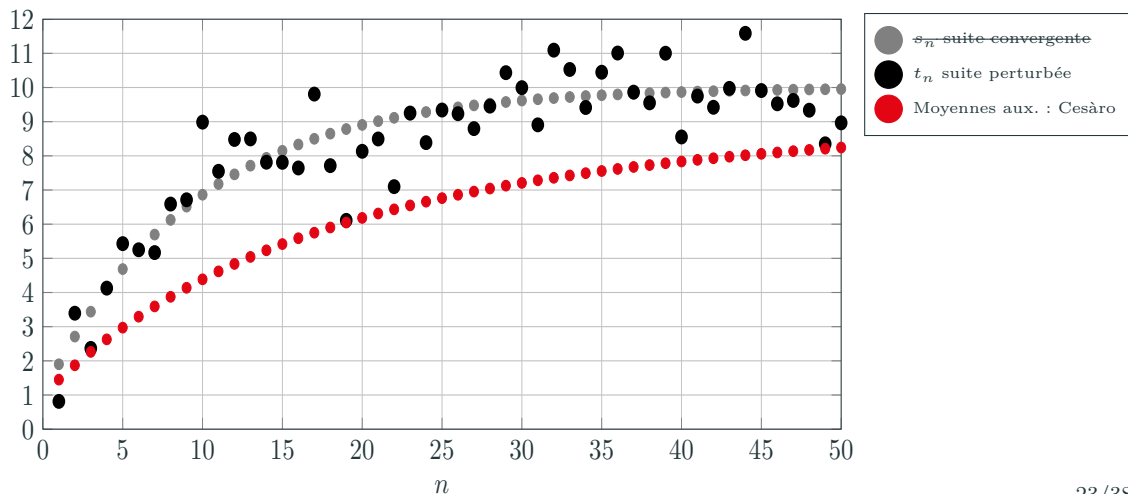
Application 2 : Suite perturbée



Application 2 : Suite perturbée



Application 2 : Suite perturbée



Analogie

La méthode de Cesàro repose en fait sur la moyenne arithmétique (MA).

Analogie

La méthode de Cesàro repose en fait sur la moyenne arithmétique (MA).

$$\begin{aligned}\sum a_k = s \text{ (C)} &\stackrel{\text{déf}}{\iff} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{s_n}{m} = s \\ &\iff \lim_{m \rightarrow \infty} \text{MA}(s_1, s_2, \dots, s_m) = s\end{aligned}$$

Généralisation

1 Introduction

2 Méthode de Cesàro

3 Généralisation

4 Conclusion

Les p-moyennes

Définition

Soit p un nombre réel non-nul. On définit la p-moyenne des réels strictement positifs $s_1, s_2, \dots, s_m$ par

$$M_p(s_1, s_2, \dots, s_m) = \left(\frac{s_1^p + s_2^p + \dots + s_m^p}{m} \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^m \frac{s_n^p}{m} \right)^{1/p}.$$

Les p-moyennes

Définition

Soit p un nombre réel non-nul. On définit la p-moyenne des réels strictement positifs $s_1, s_2, \dots, s_m$ par

$$M_p(s_1, s_2, \dots, s_m) = \left(\frac{s_1^p + s_2^p + \dots + s_m^p}{m} \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^m \frac{s_n^p}{m} \right)^{1/p}.$$

Pour $p = 0$, on définit la p -moyenne par la moyenne géométrique, soit

$$M_0(s_1, s_2, \dots, s_m) = (s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_m)^{\frac{1}{m}} = \left(\prod_{n=1}^m s_n \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Les p-moyennes comme méthode de sommation

Définition (Méthode M_p)

Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite. Si $s_n = \sum_{k=1}^n a_k > 0$ pour tout n et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_p(s_1, s_2, \dots, s_m) = s,$$

on dit que s est la M_p -somme de $\sum a_k$, et on écrit

$$s_n \rightarrow s (M_p).$$

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

1. $M_0(1) = 1,$
2. $M_0(1, 4) = (1 \cdot 4)^{1/2} = 2,$

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

1. $M_0(1) = 1,$
2. $M_0(1, 4) = (1 \cdot 4)^{1/2} = 2,$
3. $M_0(1, 4, 1) = 4^{1/3},$

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

1. $M_0(1) = 1,$
2. $M_0(1, 4) = (1 \cdot 4)^{1/2} = 2,$
3. $M_0(1, 4, 1) = 4^{1/3},$
4. $M_0(1, 4, 1, 4) = 16^{1/4} = 2,$

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

1. $M_0(1) = 1,$
2. $M_0(1, 4) = (1 \cdot 4)^{1/2} = 2,$
3. $M_0(1, 4, 1) = 4^{1/3},$
4. $M_0(1, 4, 1, 4) = 16^{1/4} = 2,$
- ...

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

1. $M_0(1) = 1,$
2. $M_0(1, 4) = (1 \cdot 4)^{1/2} = 2,$
3. $M_0(1, 4, 1) = 4^{1/3},$
4. $M_0(1, 4, 1, 4) = 16^{1/4} = 2,$
- ...
- 2n. $M_0(1, 4, \dots, 4) = (4^n)^{1/2n} = 2,$

Un exemple

Exemple

Supposons que la suite des sommes partielles est $(1, 4, 1, 4, \dots)$.

1. $M_0(1) = 1,$

2. $M_0(1, 4) = (1 \cdot 4)^{1/2} = 2,$

3. $M_0(1, 4, 1) = 4^{1/3},$

4. $M_0(1, 4, 1, 4) = 16^{1/4} = 2,$

...

2n. $M_0(1, 4, \dots, 4) = (4^n)^{1/2n} = 2,$

2n + 1. $M_0(1, 4, \dots, 1) = (4^n)^{1/(2n+1)} \rightarrow 2.$

Propriétés

Proposition

La méthode M_p est totalement régulière.

Propriétés

Proposition

La méthode M_p est totalement régulière.

Proposition

La méthode M_p n'est pas linéaire. Par contre, on a les résultats partiels suivants.

- $s_n \rightarrow s (M_p) \implies ks_n \rightarrow ks (M_p) \quad \forall k > 0$
- $s_n \rightarrow s (M_p) \text{ et } t_n \rightarrow t (M_p) \not\Rightarrow s_n + t_n \rightarrow s + t (M_p)$

Propriétés

Proposition

La méthode M_p est totalement régulière.

Proposition

La méthode M_p n'est pas linéaire. Par contre, on a les résultats partiels suivants.

- $s_n \rightarrow s (M_p) \implies ks_n \rightarrow ks (M_p) \quad \forall k > 0,$
- $s_n \rightarrow s (M_p) \text{ et } t_n \rightarrow t (M_p) \implies M_p(s_n, t_n) \rightarrow M_p(s, t) (M_p).$

Propriétés

Proposition

Si $p < q$,

$$\blacksquare \quad s_n \rightarrow s \ (M_p) \text{ et } s_n \rightarrow s^* \ (M_q) \implies s \leq s^*.$$

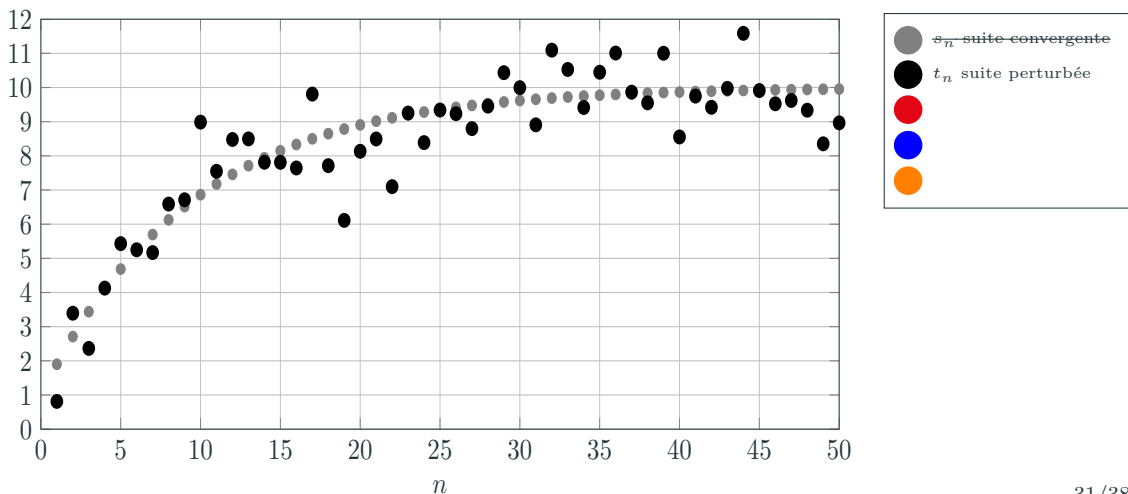
Démonstration.

Si $p < q$, on a l'inégalité des p-moyennes

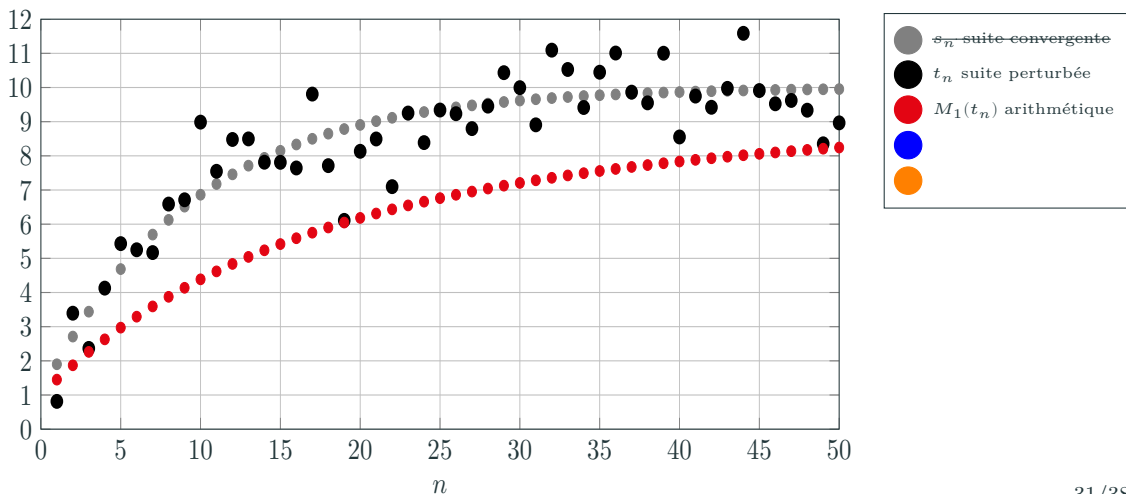
$$M_p(s_1, \dots, s_n) \leq M_q(s_1, \dots, s_n).$$



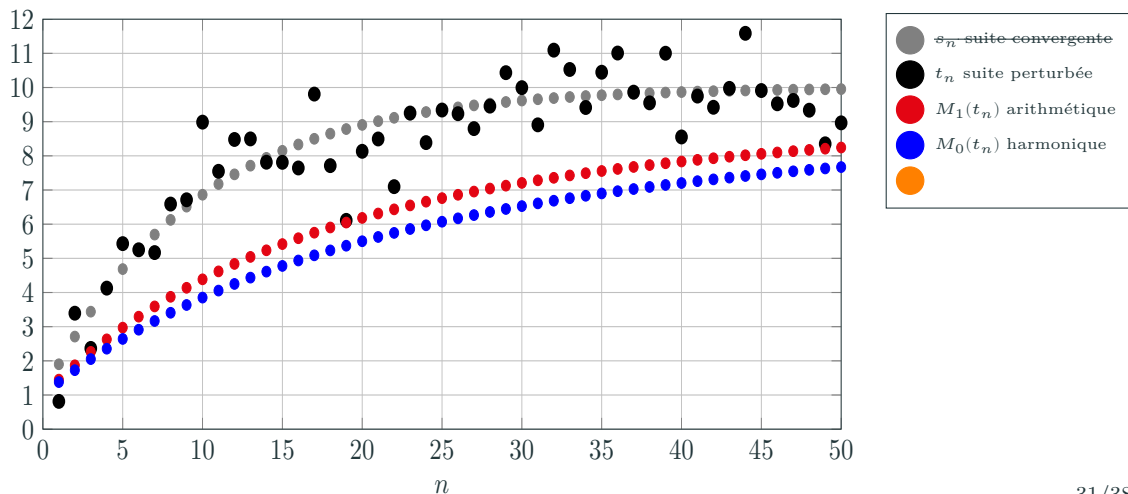
Retour : Suite perturbée



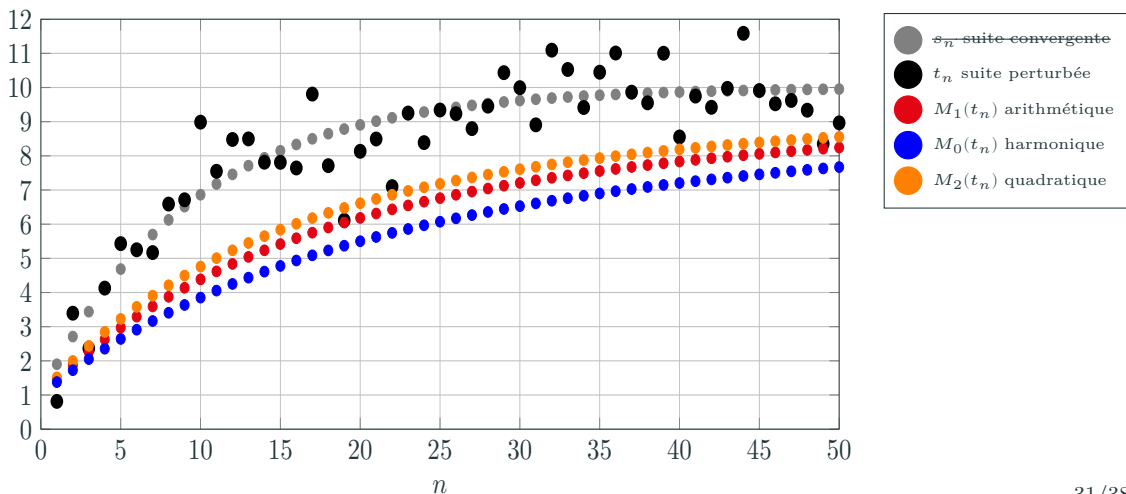
Retour : Suite perturbée



Retour : Suite perturbée



Retour : Suite perturbée



Les moyennes quasi-arithmétiques (MQAs)

Définition (Moyenne quasi-arithmétique)

Soit f une fonction d'un intervalle non-vide $I \subset \mathbb{R}$ dans les nombres réels continue et strictement monotone. On définit la f -moyenne des réels $s_1, s_2, \dots, s_m \in I$ par

$$M_f(s_1, s_2, \dots, s_m) = f^{-1} \left(\frac{f(s_1) + f(s_2) + \dots + f(s_m)}{m} \right) = f^{-1} \left(\sum_{n=1}^m \frac{f(s_n)}{m} \right).$$

Les moyennes quasi-arithmétiques (MQAs)

Définition (Moyenne quasi-arithmétique)

Soit f une fonction d'un intervalle non-vide $I \subset \mathbb{R}$ dans les nombres réels continue et strictement monotone. On définit la f -moyenne des réels $s_1, s_2, \dots, s_m \in I$ par

$$M_f(s_1, s_2, \dots, s_m) = f^{-1} \left(\frac{f(s_1) + f(s_2) + \dots + f(s_m)}{m} \right) = f^{-1} \left(\sum_{n=1}^m \frac{f(s_n)}{m} \right).$$

Remarque

Les p -moyennes sont un cas particulier des MQAs. Il suffit de prendre $f(x) = x^p$ et $I = (0, \infty)$. La moyenne géométrique est également un cas particulier des MQAs, avec $f(x) = \ln(x)$.

Les MQAs comme méthodes de sommation

Définition (Méthode M_f)

Soit (a_k) une suite, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Si $s_n = \sum_{k=1}^n a_k \in I$ pour tout n et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_f(s_1, s_2, \dots, s_m) = s,$$

on dit que s est la M_f -somme de $\sum a_k$ et on écrit

$$s_n \rightarrow s (M_f).$$

Propriétés

Proposition

La méthode M_f est totalement régulière.

Propriétés

Proposition

La méthode M_f est totalement régulière.

Remarque

La méthode M_f n'est pas linéaire. On a plutôt :

- $s_n \rightarrow s (M_f) \not\Rightarrow ks_n = ks (M_f),$
- $s_n \rightarrow s (M_f) \text{ et } t_n \rightarrow t (M_f) \implies M_f(s_n, t_n) \rightarrow M_f(s, t) (M_f).$

Propriétés

Proposition

Soit f une fonction d'un intervalle non-vide $I \subset \mathbb{R}$ dans les nombres réels continue et strictement monotone. Si I contient deux éléments distincts, la méthode M_f ne transforme pas toutes les suites bornées vers des suites convergentes.

Conclusion

1 Introduction

2 Méthode de Cesàro

3 Généralisation

4 Conclusion

Conclusion

- La théorie de la sommabilité est un exemple intéressant de la combinaison entre la flexibilité et la rigueur de la notion de définition.

Conclusion

- La théorie de la sommabilité est un exemple intéressant de la combinaison entre la flexibilité et la rigueur de la notion de définition.
- Plusieurs généralisations différentes de la méthode de Cesàro existent : méthode de Nörlund, transformations linéaires.

Conclusion

- La théorie de la sommabilité est un exemple intéressant de la combinaison entre la flexibilité et la rigueur de la notion de définition.
- Plusieurs généralisations différentes de la méthode de Cesàro existent : méthode de Nörlund, transformations linéaires.
- Il existe une panoplie d'autres méthodes de sommabilité. Il est possible de comparer leur force respective !

Références
