



Article

Regard mathématique sur le jeu de Hex

FRÉDÉRIC MORNEAU-GUÉRIN

Département Éducation

TÉLUQ

Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

ÉLODIE TREMBLAY, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ LAVAL

Elodie.Tremblay.7@ulaval.ca

Résumé

Le mathématicien John Forbes Nash (1928-2015) – interprété par l’acteur Russell Crowe dans le film *A Beautiful Mind*, adapté de la biographie éponyme de Sylvia Nasar – est connu, entre autres, pour avoir démontré que dans le jeu combinatoire Hex le premier joueur dispose d’une stratégie gagnante. Toutefois, la preuve donnée par Nash, merveilleusement non constructive, est schématique. Dans ce texte, nous proposons de (1) préciser le sens des notions impliquées dans cette preuve et (2) fournir une preuve plus détaillée et rigoureuse.

Mots clés : Hex ; Jeux de connexion ; Jeux de société combinatoires abstraits ; Théorie des jeux ; Théorie des graphes

Classification mathématique par matières (MSC2020) : 00A08, 00A09, 05C10, 91A05, 91A46

1 Introduction

RÈGLES DU JEU DE HEX

- Le jeu de Hex est un jeu de société pour deux joueurs se jouant sur un plateau en forme de losange subdivisé en $n \times n$ hexagones réguliers. Une des paires de côtés opposés du losange est peinte en blanc et l’autre est peinte en noir.

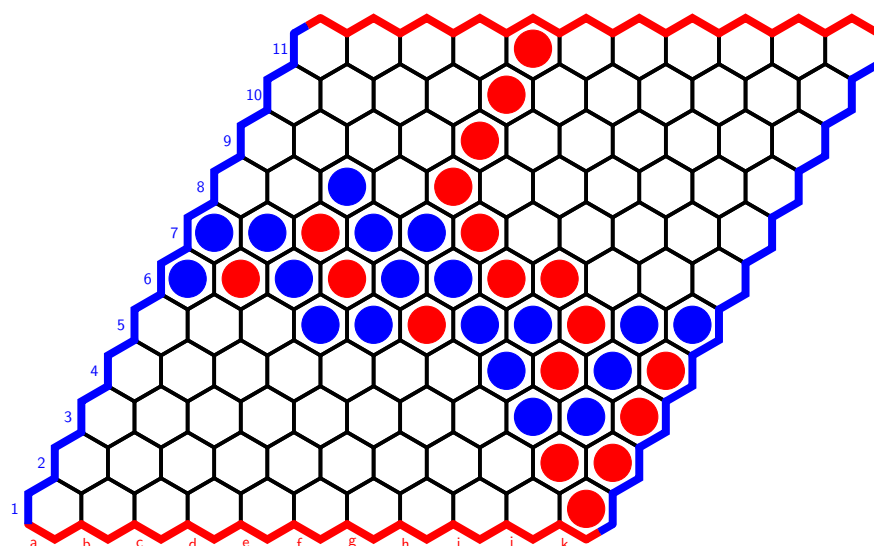


FIGURE 1 – Fin d’une partie de Hex sur un plateau 11×11 . Ici, les Noirs remportent la partie.

- Deux joueurs s’affrontent. Chacun d’eux est représenté par une couleur. Par souci de simplicité nous adopterons la même convention qu’aux échecs : le premier joueur sera le camp des blancs et le second joueur sera le camp des noirs.
- Au début de la partie, le plateau est vide. À tour de rôle, les joueurs posent un pion de leur couleur sur la case vide de leur choix (peu importe laquelle). Le tablier de jeu se remplit ainsi progressivement.
- Le premier des deux joueurs qui parvient à créer, en posant des pions de sa couleur, une configuration de cases contiguës reliant les deux côtés du losange de sa couleur remporte la partie.

Quiconque joue une partie de Hex réalisera rapidement qu’il faut considérer simultanément l’attaque et la défense : il faut tout à la fois chercher à contrecarrer les plans de l’adversaire tout en veillant à l’élaboration d’un chemin reliant nos deux pôles.

La forme symétrique du plateau de jeu peut donner l’impression trompeuse d’une certaine équité entre les deux joueurs quant aux chances de succès. Or, comme nous le verrons, le premier joueur dispose d’un avantage capital et c’est précisément cet avantage qui rend le jeu de Hex intéressant sur le plan mathématique. Il est en effet possible de démontrer relativement simplement (et nous le ferons en détail dans ce qui suit) que le premier joueur est assuré de l’emporter s’il joue *de manière optimale*.

Afin de contrebalancer l’avantage du premier joueur, une règle additionnelle a été développée. Surnommée *règle du gâteau*, cette règle incite le premier joueur à jouer un premier coup qui n’est ni trop fort ni trop faible.

RÈGLE DU GÂTEAU

- Le premier joueur joue son coup d'ouverture en plaçant un premier pion blanc sur le plateau de jeu.
- Le second joueur doit alors choisir l'une des deux options suivantes :
 - Poursuivre le jeu normalement en plaçant un premier pion noir sur le plateau de jeu.
 - Échanger irrévocablement les rôles et les couleurs. L'ancien premier joueur, maintenant devenu second joueur, place un premier pion noir sur le tablier.
- La partie se poursuit ensuite normalement.

On l'aura compris, le nom de cette règle facultative s'inspire d'une méthode assurant le partage équitable d'un gâteau entre deux personnes : si celui des deux qui ne manie pas le couteau se voit offrir la possibilité de choisir la part qui lui reviendra, alors celui qui se voit confié la tâche de trancher la pâtisserie en deux – étant virtuellement assuré de ne pas obtenir la part du lion – a tout avantage à rechercher l'équité parfaite entre les portions.

Avant de nous pencher sur la démonstration de l'avantage incontestable que possède le premier joueur, nous retracerons d'abord l'histoire rocambolesque du jeu de Hex.

2 L'histoire mouvementée du jeu de Hex

Le jeu de Hex, qui fait l'objet d'une imposante littérature mathématique, fut commercialisé par Parker Brothers en 1952. Il sera retiré du marché après quelque temps en raison de ventes décevantes. Au moment d'écrire ces lignes, le jeu a fait un retour – sous le nom de *Hexus* – sur les tablettes des magasins de jeux de société. Toutefois, il ne fait aucun doute que ce jeu de société combinatoire abstrait pour deux joueurs ne serait plus qu'un vague souvenir s'il n'avait pas fait l'objet d'une chronique *Mathematical Games* signée par le plus grand et le plus influent vulgarisateur mathématique que le monde ait connu : l'illustre Martin Gardner [11].

L'histoire a retenu deux récits très différents de la création du jeu de Hex. Les voici.

2.1 Version 1 : Piet Hein et le jeu de *Polygon*

Bien que l'on ne sache ni quand ni comment Gardner entendit parler de Hex, il appert qu'il entreprit en janvier 1957 de rassembler le plus d'informations possible au sujet de ce jeu en prévision de la rédaction d'une chronique pour le compte du magazine *Scientific American*. L'un de ses premiers gestes fut de contacter la société *Parker Brothers* afin de s'enquérir de l'origine du jeu. Celle-ci l'informa qu'il avait été développé, sous le nom de *Polygon*, par un poète designer et physicien danois répondant au nom de Piet Hein.

Grâce à ses compétences journalistiques et à sa détermination inébranlable dans la recherche de la vérité, le vulgarisateur scientifique américain parvint à retracer le coloré danois et un long échange épistolaire s'ensuivit. Piet Hein témoigna d'abord de son vibrant intérêt pour les jeux

de société. Il soutint que le jeu de Hex marque l'aboutissement d'une longue réflexion née du désir de concevoir un jeu dans lequel deux joueurs cherchent simultanément à réaliser des objectifs mutuellement exclusifs consistant à relier deux pôles par un chemin. Le développement du jeu fut toutefois longtemps entravé par le fait que sur une grille en damier chacun des joueurs est en mesure de freiner entièrement la progression de l'autre. Ainsi, un peu comme au jeu de Tic-Tac-Toe, l'affrontement entre deux joueurs aguerris risquait fort de toujours résulter en un match nul.

Le jeu demeura donc sous forme inachevée dans l'esprit de Piet Hein pendant quelque temps. Puis, vers la fin de l'été 1942, dans un éclair de génie, le danois eut l'idée de modifier la forme du plateau de jeu. Si celui-ci était divisé en cases hexagonales plutôt qu'en cases rectangulaires ou carrées, il devenait beaucoup plus difficile pour un joueur de bloquer l'adversaire. Le jeu, qu'il nomma *Polygon*, devenait ainsi stimulant et agréable.

Parmi le petit groupe d'amis à qui Piet Hein présenta son jeu, à l'automne 1942, afin d'en vérifier la valeur ludique, figurait le jeune physicien Aage Bohr, fils du grand physicien nobélisé Niels Bohr. Conforté par le succès rencontré par son jeu au sein de son groupe témoin, Piet Hein déposa une demande de brevet et signa un contrat avec le quotidien *Politiken* qui fit paraître, en page 4 de son édition du samedi 26 décembre 1942, un entrefilet intitulé *Vil De laere Polygon ?* [Souhaitez-vous apprendre à jouer à *Polygon* ?]. Deux semaines plus tard, des calepins de jeu firent leur apparition dans les rayons des librairies danoises. En quelques mois à peine, des dizaines de milliers d'entre eux trouvèrent preneur. Le succès fut cependant de courte durée.

Le 29 août 1943, le gouvernement danois fut dissous et le pays fut soumis aux occupants nazis. Inquiet pour sa sécurité (puisqu'il avait pris part à la résistance) et celle de sa famille (puisque sa femme était juive), Piet Hein s'enfuit en Amérique du Sud et le jeu de *Polygon* sombra rapidement dans l'oubli.

2.2 Version 2 : John Forbes Nash et le jeu de *John* (ou de *Nash*)

Parallèlement à ses échanges avec Piet Hein, Gardner poursuivit un autre filon qui lui avait été signalé par un ami physicien : une rumeur circulait voulant que le jeu de Hex aurait été inventé au cours des années 1940 à l'Université Princeton par un groupe de mathématiciens. Ceux-ci, semble-t-il, y jouaient avec des pierres de jeu de Go sur les tuiles hexagonales du plancher d'une des salles de bain. Toujours selon cette source, les étudiants princetoniens réfèrent à ce jeu en utilisant le prénom ou nom de celui qu'ils croyaient être son inventeur : le mathématicien et économiste américain John Forbes Nash Jr.¹

Ce dernier, contacté par Gardner, relata comment, au cours de l'hiver 1948–49, alors qu'il était un jeune étudiant nouvellement admis au doctorat en mathématiques à l'Université de Princeton,

1. Le tortueux parcours de vie de John Forbes Nash – un spécialiste de la théorie des jeux ayant révolutionné à lui seul cette sous-discipline – est relaté dans une captivante biographie intitulée *A Beautiful Mind* de même dans un film hollywoodien qui rencontra un franc succès.

il imagina un jeu combinatoire pour lequel il était possible de démontrer rigoureusement que le premier joueur était assuré de gagner s’il jouait de façon optimale. L’embryon de jeu se présenta à son esprit sous une forme dépouillée (pour ne pas dire brute) et abstraite. Il se jouait sur les sommets d’un graphe. Excité de cette découverte, il s’était empressé d’en faire l’annonce à son camarade le mathématicien David Gale. Ce dernier reconnut l’intérêt mathématique de l’intuition inventive qu’avait eue son jeune confrère. De plus, doté d’un esprit plus pratique que Nash, Gale avait proposé une reformulation équivalente du jeu afin qu’il puisse se jouer sur une grille de cases hexagonales. Le jeu devint, pendant un temps, très populaire dans certains campus universitaires de la côte Est américaine.

2.3 Version unifiée

Au terme de son enquête, Gardner s’estima raisonnablement convaincu que la réapparition du jeu de Hex à Princeton à l’hiver 1948-1949 ne découlait pas d’une réinvention entièrement indépendante. Dans la chronique *Mathematical Games* de juillet 1957 [4] – qu’il consacra au jeu de Hex et qui permit à ce jeu de société d’accéder à la notoriété universelle – Gardner attribua à Piet Hein l’invention du jeu *Polygon* en 1942 (après tout, un brevet et de nombreux extraits de journaux existaient pour en témoigner) et il soutint que le jeu fut probablement introduit en Amérique par le physicien Aage Bohr lors de séjours bien documentés dans diverses universités états-uniennes. Le chroniqueur souligna ensuite le rôle que joua la communauté mathématique de Princeton dans la popularisation des jeux de connexion. Enfin, il attribua à Nash la paternité de la démonstration de l’existence d’une stratégie gagnante pour le premier joueur, et ce, exclusivement sur la base de nombreux témoignages en ce sens, car Nash ne se donna jamais la peine de publier cette preuve ni même de la rédiger formellement tant il estimait que cela relevait du domaine peu sérieux des mathématiques récréatives.

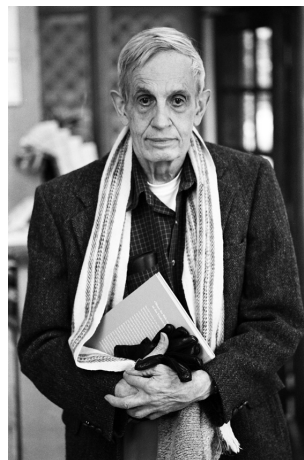
Dans la foulée de la parution de cette chronique *Mathematical Games*, Nash laissa savoir à Gardner qu’il était vexé puisque la chronique risquait d’inciter ses collègues et amis à croire qu’il avait longtemps tenté de s’arroger le crédit d’une invention dont il n’était pas l’auteur. Or, Nash était désormais catégorique : s’il avait maintenant souvenir d’avoir discuté du jeu danois *Polygon* avec Aage Bohr lors de la visite de ce dernier à Princeton, sa réinvention et son analyse du jeu qui avaient mené à sa popularisation au sein du département de mathématiques de Princeton sous le nom de *John*² ou de *Nash* furent réalisés antérieurement à la visite du physicien danois.

Étant incapable d’une part de démontrer la véracité des dires de Nash, mais n’ayant d’autre part aucune raison de douter de sa bonne foi, Gardner lui accorda le bénéfice du doute. Après tout, quel mal y avait-il à prêter crédit à ses prétentions ? Celles-ci n’étaient pas dépourvues d’un certain degré de plausibilité et, de toute façon, Nash ne remettait aucunement en question l’antériorité de l’invention de Piet Hein ! Le vulgarisateur fit donc inscrire, en guise d’épilogue à sa chronique *Mathematical Games* d’octobre 1957 [5] la mention suivante :

2. Merci à l’un des arbitres anonymes d’avoir souligné qu’il y a là un jeu de mots, puisque *John* est un mot d’argot anglais qui désigne les toilettes.



(a) Piet Hein
(16 décembre 1905 – 17 avril 1996)
Source : André Savik — CC BY 3.0



(b) John Forbes Nash Jr.
(13 juin 1928 – 23 mai 2015)
Source : Jimmy Wales — CC BY-SA 3.0

FIGURE 2 – Portrait des deux coinventeurs du jeu Hex

In the discussion of the game of Hex, to which this department was devoted in July, it was not mentioned that the game was independently invented in 1948 by John Nash, then a student at Princeton University. The popularity of the game among Princeton students of mathematics resulted from the version, which was developed and extensively analyzed before news reached Princeton of the earlier Danish invention.

En définitive, il importe peu de savoir avec certitude si l'invention de Hex fit l'objet d'une réinvention entièrement indépendante par Nash ou si l'idée a germé dans son esprit après avoir bénéficié d'une sorte d'effet d'amorce (conscient ou inconscient) à la suite de discussions avec Aage Bohr ou de conversations entendues par hasard. Un fait demeure : c'est incontestablement John Forbes Nash qui, le premier, formula une démonstration mathématique de l'existence d'une stratégie gagnante pour le premier joueur.

Revenons maintenant sur cette démonstration qui, pour John Forbes Nash Jr., constitue la caractéristique déterminante du jeu de Hex.

Lorsque Gardner s'enquit de l'endroit où il pourrait trouver cette fameuse démonstration, Nash l'informa n'avoir jamais pris le temps de coucher cette démonstration sur papier, car il la jugeait certes fascinante, mais peu sérieuse et certainement indigne de publication dans une revue savante arbitrée. À la demande pressante de Gardner, Nash accepta de rédiger – dans une lettre privée conservée dans les archives de Gardner à l'Université Stanford – l'esquisse de preuve que voici :

- (1) *When the board is filled one or the other of the players will have connected but not both.* [Traduction libre : Lorsque le plateau est rempli, l'un ou l'autre des joueurs a relié ses pôles, mais pas les deux.]
- (2) *Either the first player or the second player will have a winning strategy.* [Traduction libre : Le premier joueur ou le second joueur aura une stratégie gagnante.]
- (3) *Suppose the second player could force a win.* [Traduction libre : Supposons que le deuxième joueur puisse forcer la victoire.]
- (4) *Consider a defensive strategy by first player imitating the winning second player strategy assumed in (3). The first move could be arbitrary. If the strategy ever called for a play where the arbitrary move was made another one could be made.* [Traduction libre : Considérons une stratégie défensive du premier joueur imitant la stratégie gagnante du second joueur supposée au point (3). Le premier coup peut être arbitraire. Si la stratégie prévoit de jouer là où le coup arbitraire a été joué, un autre coup peut être joué.]
- (5) *Since an extra piece on the board is always an asset, never a handicap in connecting, at the end of the game first player will be better off using the adapted second player strategy than he would have been if simply playing as second player. So he will win.* [Traduction libre : Étant donné qu'une pièce supplémentaire sur le plateau est toujours un atout, jamais un handicap, à la fin de la partie, le premier joueur sera en meilleure posture en utilisant la stratégie adaptée du second joueur qu'il ne l'aurait été en jouant simplement en tant que second joueur. Il l'emportera donc.]
- (6) *Since this contradicts the hypothesis (3) that second player can win it follows that second player cannot win. Therefore first player can always win by correct play.* [Traduction libre : Puisque cela contredit l'hypothèse (3) selon laquelle le deuxième joueur peut gagner, il s'ensuit que le deuxième joueur ne peut pas gagner. Par conséquent, le premier joueur peut toujours gagner en jouant correctement.]

3 La preuve de John Forbes Nash

À première vue, la preuve schématique donnée par Nash à Gardner, et reproduite intégralement ci-dessus, peut sembler satisfaisante puisque chacun des énoncés est intuitivement plausible, mais tout mathématicien sait que l'intuition peut parfois être trompeuse. Une vérification s'impose donc.

Notre objectif, dans ce qui suit, consiste à révéler et résoudre les nombreuses complexités qui se tapissent dans l'ombre.

Pour ce faire, nous analyserons attentivement la preuve donnée par Nash en distinguant trois arguments de différentes natures : (1) un raisonnement à caractère topologique ; (2) une déduction relevant clairement de la théorie des jeux ; et (3) une sorte de *reductio ad absurdum* inusitée.

3.1 L'argument topologique

Le premier point de la démonstration schématique donnée par Nash – qui stipule que, lorsque le plateau est rempli, un et un seul des joueurs a relié les deux pôles de sa couleur – agglomère deux affirmations qui nécessitent une démonstration rigoureuse.

Affirmation 1 : Toute partie de Hex fait au moins un gagnant³

Nous démontrerons cette affirmation à l'aide d'un argument plutôt original.

- Considérons un plateau en forme de losange subdivisé en $(n + 2) \times (n + 2)$ hexagones réguliers. Afin de faciliter la compréhension des explications qui suivront, positionnons le losange – dans notre représentation mentale de ce dernier – de sorte que deux de ses côtés soient parallèles à l'axe des abscisses du plan cartésien. Nous référerons à ceux-ci comme étant les côtés *nord* et *sud* du losange. Enfin, nous référerons aux deux autres côtés comme étant les côtés *est* et *ouest*.
- Peignons en noir les $(n + 1)$ cases les plus septentrionales de la rangée d'hexagones la plus occidentale. De même, peignons en noir les $(n + 1)$ cases les plus australes de la rangée d'hexagones la plus orientale. Ces ensembles de cases peintes en noir représentent les pôles noirs du jeu de Hex.

Peignons maintenant en blanc les $2(n + 1)$ autres cases situées le long de la frontière extérieure de la grille. On obtient ainsi deux ensembles de cases peintes en blanc qui représentent les pôles blancs du jeu de Hex.

Les n^2 cases intérieures, elles, représentent le plateau $n \times n$ du jeu de Hex.

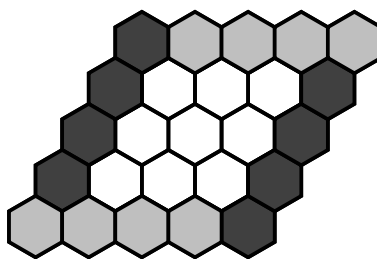


FIGURE 3 – Exemple de plateau de Hex 3×3 étendu en un plateau 5×5 dont les cases extérieures – peintes selon les règles définies ci-dessus – représentent les pôles.

3. À strictement parler, cette affirmation est trivialement vraie puisque les règles de Hex stipulent que le jeu est interrompu dès qu'un joueur atteint son objectif. Pour être plus précis, ce qui sera démontré ici est que pour tout recouvrement de *la totalité* des cases plateau de Hex par les pions blancs ou noirs, il ne peut y avoir simultanément un chemin contigu entre les deux pôles noirs et un chemin contigu entre les deux pôles blancs.

- Supposons que deux joueurs apposent à tour de rôle des pions de leur couleur jusqu'à ce que toutes les cases de la grille $n \times n$ aient été recouvertes. Notre allons maintenant montrer que, quelle que soit la configuration ainsi réalisée, il y a toujours au moins un des joueurs qui est parvenu à réaliser un chemin de cases contigües reliant ses deux pôles.
- Traçons un mince trait rouge sur chacune des arêtes séparant un hexagone noir (c'est-à-dire peint de cette couleur ou recouvert d'un pion de cette couleur) d'un hexagone blanc.

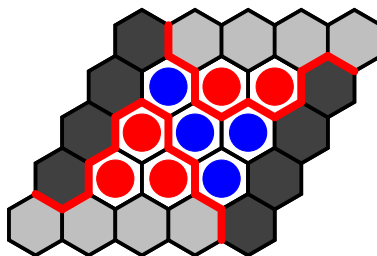


FIGURE 4 – Exemple de tracé de la ligne brisée de départage entre blanc et noir pour une partie jouée sur un plateau 3×3 (composé des cases intérieures d'une grille 5×5).

- Les premier et deuxième hexagones les plus occidentaux de la frontière nord sont séparés par une trait rouge puisque le premier est peint en noir et que le second est peint en blanc. Notons que ce trait rouge se prolonge en fait en une ligne brisée au sujet de laquelle quelques observations peuvent être faites :
 - Cette ligne brisée ne peut se terminer à un sommet d'un hexagone intérieur. En effet, tout sommet intérieur est situé à l'interface de trois hexagones. Le fait que la ligne brisée soit incidente à ce sommet signifie que l'un de ces trois hexagones est blanc et qu'à l'autre est noir. Dépendamment de la couleur du troisième hexagone, la ligne brisée va pouvoir se prolonger le long de l'une ou de l'autre des deux autres arêtes incidentes au sommet sur lequel s'est porté notre attention.
 - Cette ligne brisée ne peut revenir sur elle-même puisqu'il y aurait alors inévitablement un segment avec, de part et d'autre, des hexagones de la même couleur (ce qui est impossible par construction).
 - Cette ligne brisée ne peut venir se terminer entre deux autres hexagones de la frontière nord puisque ceux-ci sont tous peints en blanc. Pour la même raison, cette ligne brisée ne peut venir se terminer entre deux des $(n + 1)$ hexagones les plus occidentaux le long de la frontière sud.
 - Cette ligne brisée ne peut venir se terminer entre deux des $(n + 1)$ hexagones les plus septentrionaux le long de la frontière ouest car ceux-ci sont tous peints en noir. Pour la même raison, cette ligne brisée ne peut venir se terminer entre deux des $(n + 1)$ hexagones les plus austraux le long de la frontière est.
 - Cette ligne brisée ne peut venir se terminer entre les premier et deuxième hexagones les plus orientaux de la frontière sud, car ce dernier segment aurait un hexagone blanc sur son flanc droit et un hexagone noir sur son flanc gauche. Or, tous les

segments de la ligne brisée (orientée) que nous étudions ont un hexagone noir sur leur flanc droit et un hexagone blanc sur leur flanc gauche (cette propriété, observable depuis l'origine de notre ligne brisée se préserve de segment en segment).

- À la lumière de ce qui précède, la ligne brisée peinte ne peut se terminer qu'à deux endroits, à savoir :
 - Entre les premier et deuxième hexagones les plus septentrionaux de la frontière est, auquel cas on vérifie aisément qu'il existe un chemin de cases contigües reliant les frontières orientales et occidentales qui est entièrement peint en noir.
 - Entre les premier et deuxième hexagones les plus austraux de la frontière ouest, auquel cas on vérifie aisément qu'il existe un chemin de cases contigües reliant les frontières nord et sud qui est entière peint en blanc.

Dans tous les cas, on voit qu'il existe un chemin d'une certaine couleur reliant les deux pôles de ladite couleur.

Affirmation 2 : Toute partie de Hex fait au plus un gagnant ⁴.

Chose étonnante, la démonstration la plus élémentaire de cette affirmation plutôt simple et intuitive requiert l'utilisation du résultat classique assez ancien que voici et dont la profondeur est largement sous-appréciée.

Théorème d'Euler. (1752) Si un graphe ⁵ connexe ⁶ est représenté sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre, alors il vérifie

$$s - a + f = 2,$$

où s , a et f désignent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces ⁷ du graphe.

Formulé ici pour les besoins de la cause dans le langage de la théorie des graphes, ce théorème relève en fait de la topologie algébrique. De nombreuses *preuves* élémentaires existent, toutefois celles-ci comportent souvent des lacunes ou éludent certaines complexités (à ce sujet, voir [10, 13]).

Le théorème d'Euler, dont nous omettrons la démonstration, peut être mis à profit de diverses manières dont, notamment, pour obtenir la condition que voici.

4. Plus précisément, nous montrerons que pour tout recouvrement de *la totalité* des cases plateau de Hex par les pions blancs ou noirs, il y a forcément un chemin contigu entre les deux pôles noirs ou un chemin contigu entre les deux pôles blancs. Compte tenu de l'affirmation 1, il s'agit ici d'une disjonction exclusive : l'une ou l'autre des propositions est vraie, mais pas les deux à la fois.

5. Afin de limiter le plus possible l'usage d'une terminologie spécialisée, il importe de préciser qu'on se restreint ici aux seuls graphes (non orientés) ayant un nombre fini de sommets, dont aucun sommet n'est lié à lui-même par une boucle et dont deux sommets ne peuvent être liés que par au plus une seule arête.

6. On entend par là qu'il est d'un seul tenant.

7. On appelle *face* toute région du plan délimitée par des arêtes, y compris la région extérieure non bornée et donc infiniment vaste.

Corollaire. Pour tout graphe à au moins trois sommets vérifiant les hypothèses du théorème précédent, on a

$$a \leq 3s - 6.$$

Démonstration. Nous distinguerons deux cas :

- CAS D'UN GRAPHE AYANT AU PLUS TROIS ARÊTES : L'inégalité peut être vérifiée directement (en utilisant le fait que $s \geq 3$ par hypothèse).
- CAS D'UN GRAPHE AYANT STRICTEMENT PLUS DE TROIS ARÊTES : Notons que chaque face est bornée par au moins 3 arêtes. De plus, chaque arête borne au plus deux faces. Ainsi,

$$3f \leq 2a,$$

c'est-à-dire

$$f \leq \frac{2}{3}a.$$

En utilisant la formule d'Euler et l'inégalité ci-dessus, on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} 2 &= s - a + f \\ &\leq s - a + \frac{2}{3}a \\ &= s - \frac{1}{3}a, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément l'inégalité désirée. ■

Nous disposons maintenant d'un outil qui nous permettra de rapidement convenir que toute partie de Hex ne peut faire qu'au plus un gagnant. Il reste maintenant à mathématiser le problème.

- Assimilons les quatre pôles à des sommets d'un graphe et traçons une arête entre chaque paires de sommets représentant des pôles de couleurs différentes. On obtient ainsi un cycle à 4 sommets. D'une certaine façon, on peut voir la face intérieure de ce cycle comme étant le plateau du jeu de Hex.
- Complétons ce graphe en y adjoignant un cinquième sommet que l'on situera à l'extérieur du cycle. Relions par une arête ce sommet surnuméraire à chacun des quatre autres sommets. Notons que ce cinquième sommet ne possède aucune interprétation naturelle dans le contexte du jeu de Hex. Il s'agit d'un simple artifice mathématique.

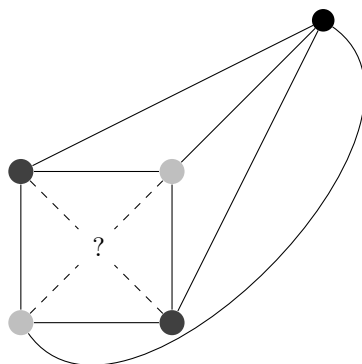


FIGURE 5 – Les quatre sommets du cycle de longueur 4 (carré) représentent les quatre pôles du jeu de Hex ; l'intérieur du cycle représente la surface de jeu ; et le cinquième sommet, situé en haut à droite, est un simple artifice mathématique. Les deux arêtes en pointillé symbolisent les chemins (de pions) liant les pôles opposés pour chacune des deux couleurs.

- Le but du jeu de Hex, on le sait, est de parvenir à relier deux pôles diamétralement opposés. Dans le contexte abstrait que nous sommes en train de définir, on peut assimiler la réalisation de cet objectif au fait d'être parvenu à tracer une arête entre les deux sommets non adjacents du cycle de longueur 4 qui représentent ces deux pôles.
- Une éventuelle configuration du jeu de Hex dans laquelle les joueurs sont tous deux parvenus à relier les pôles de leurs couleurs avec des pions de cette même couleur correspond au fait de parvenir simultanément à relier par des arêtes les deux paires de sommets non adjacents du cycle de longueur 4. Mais il y a plus ! Ces deux arêtes ne peuvent se croiser car une case donnée du plateau de Hex ne peut contenir à la fois un pion noir et un pion blanc.

En vertu de ce qui précède, il découle de la proposition qui suit qu'il est impossible que les joueurs aient tous deux relié les deux pôles de leur couleur respectives.

Proposition. Le graphe à cinq sommets dans lequel tous les sommets sont adjacents deux à deux ne peut être représenté sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

Démonstration. Dans un tel graphe, on a $s = 5$ et $a = \binom{5}{2} = 10$. Ce graphe ne saurait être planaire car il invalide la majoration stipulée au corollaire du théorème d'Euler. En effet

$$10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9.$$

3.2 L'argument relevant de la théorie des jeux

Au point (2) de la démonstration schématique partagée à Gardner, Nash affirme ceci : *Soit le premier joueur, soit le second joueur aura une stratégie gagnante.*

Cette phrase quelque peu cryptique est susceptible de faire sourciller à deux égards. D'abord, pour des raisons terminologiques (qu'entendons-nous exactement par *stratégie gagnante*?) et ensuite parce qu'on présente comme allant de soi un énoncé qui est loin d'être une évidence manifeste intuitive pouvant – tel un axiome – être tenue pour vraie sans preuve.

À la défense de Nash, cet énoncé était une évidence manifeste *pour lui*, car il s'agit d'un cas particulier de l'un des théorèmes fondateurs de la théorie des jeux qui découle, par voie de généralisation [14], de travaux du mathématicien allemand Ernst Zermelo publiés en 1913 [15] dans ce qui est généralement reconnu comme étant le tout premier article entièrement consacré à la théorie des jeux.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème de Zermelo. Dans tout jeu sans hasard ni partie nulle et à information parfaite⁸ pour deux joueurs jouant à tour de rôle et dont la fin est assurée après un nombre fini de coups, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Nous présenterons dans ce qui suit une esquisse de démonstration de ce théorème, et ce, sans trop nous appesantir avec un jargon spécialisé ou nous enliser dans le déploiement méticuleux d'un formalisme entièrement rigoureux. Mais d'abord, il nous faut spécifier ce qu'est une *stratégie* et, par la suite, ce qu'est une *stratégie gagnante*.

Une *stratégie* pour le premier (respectivement second) joueur est une fonction prenant comme intrant l'enchaînement des coups précédemment joués par les deux joueurs depuis le début de la partie et ayant comme extrant un coup valide à jouer pour le premier (respectivement second) joueur⁹. Autrement dit, la fonction appelée *stratégie* prescrit au joueur comment jouer son prochain coup en fonction de l'état actuel de la situation de jeu.

Une *stratégie gagnante* pour le premier (respectivement second) joueur est une stratégie qui – si on l'exécute (c'est-à-dire si on joue à tout coup ce qu'elle nous prescrit de jouer) – mène à la victoire pour le premier (respectivement second) joueur, et ce, quelle que soit la manière dont le second (respectivement premier) joueur choisit de répliquer.

8. Cela signifie que les deux joueurs ont en tout temps un complet accès et une complète connaissance de la façon dont le jeu a été joué jusqu'à maintenant. Le jeu de Hex et le jeu d'échecs sont deux exemples de jeu à information parfaite. Le poker, lui, est un exemple de jeu à information imparfaite, car les joueurs ne connaissent pas les cartes privées de leurs adversaires.

9. Une stratégie pour le premier joueur est donc une fonction prenant comme intrant les enchaînements de longueur paire ou nulle de coups joués par l'un ou l'autre des joueurs tandis qu'une stratégie pour le second joueur est une fonction prenant comme intrant les enchaînements impairs de coups joués par l'un ou l'autre des joueurs.

Démonstration du théorème de Zermelo.

- Considérons l'arbre suivant :
 - L'enchaînement trivial de 0 coup joué est représenté par un sommet qui fera office de racine.
 - Chacun des enchaînements de 1 coup (valide joué par le premier joueur) est représenté par un sommet distinct.
 - Chacun des enchaînements de 2 coups (valides joués en alternance par le premier puis par le second joueur) est représenté par un sommet distinct.
 - Chacun des enchaînements de 3 coups (valides joués en alternance par le premier puis par le second joueur) est représenté par un sommet distinct.
 - ...

Par hypothèse, le jeu prend fin après un nombre fini de coups. Ainsi, la procédure décrite ci-dessus est assurée de prendre fin à un moment ou un autre.

En ce qui concerne les arêtes, deux sommets seront adjacents si et seulement s'ils représentent respectivement des enchaînements de longueur k et $k + 1$ où le plus long est une continuation¹⁰ du plus court.

- Décrivons maintenant une procédure de coloration des sommets de cet arbre.
 - Considérons les sommets associés à des enchaînements de coups correspondant à une partie complète. Par hypothèse, toute partie fait un vainqueur. Peignons en blanc les sommets représentant une partie se soldant par une victoire du premier joueur et peignons en noir ceux représentant une partie résultant en une victoire du second joueur.
 - Si un sommet représentant un enchaînement de longueur impaire est tel que toutes ses continuations adjacentes sont de couleur noire, alors on le peindra en noir. Sinon on le peindra en blanc.
 - Si un sommet représentant un enchaînement de longueur paire est tel que toutes ses continuations adjacentes sont de couleur blanche, alors on le peindra en blanc. Sinon on le peindra en noir.

La procédure que nous venons de décrire attribue une couleur à chacun des sommets de l'arbre, y compris la racine.

Par construction, si la racine est blanche, alors cela signifie que le premier joueur a une stratégie gagnante. Si, au contraire, la racine est noire alors c'est le deuxième joueur qui a une stratégie gagnante.

10. Cela signifie que les k premiers termes des ces deux enchaînements de coup coïncident.

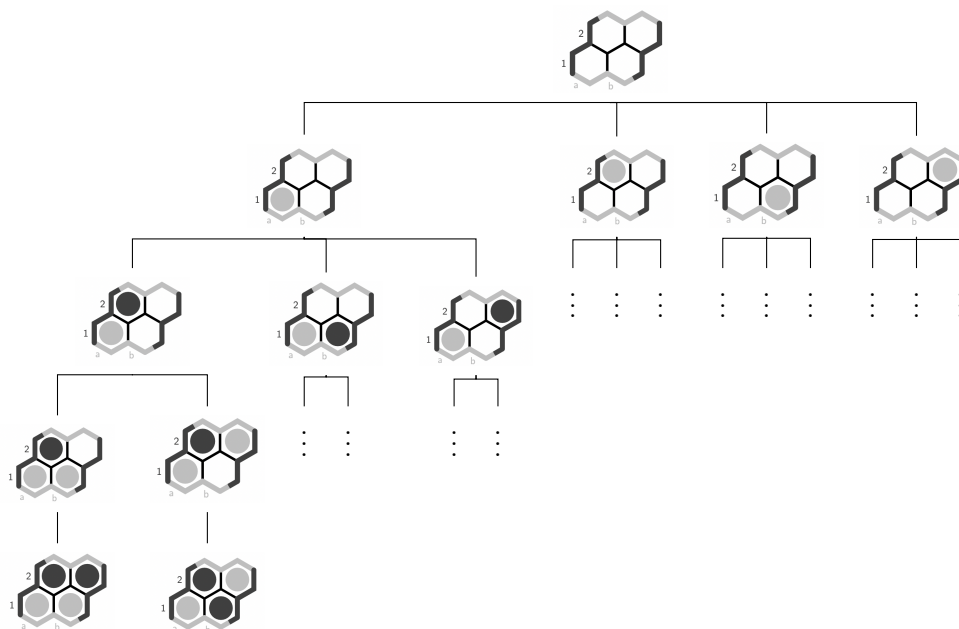


FIGURE 6 – Portion de l’arbre obtenu pour le jeu de Hex sur un plateau 2×2 . Ici, les deux sommets pendants (résultants en une victoire du deuxième joueur) devraient être peints en noir. Il doit donc en aller de même pour leurs sommets parents respectifs ainsi que pour leur sommet grand-père commun. En revanche, quiconque développera l’arbre dans son entièreté pourra vérifier que le sommet arrière arrière-grand-père devra être peint en blanc.

3.3 L’argument du vol de stratégie

Les points (3) à (6) de la preuve schématique donnée par Nash décrivent en détail sa contribution originale. Il s’agit essentiellement d’une preuve par contradiction assez simple mais ingénieuse.

L’argument va comme suit :

- On commence par supposer que le deuxième joueur est celui qui possède une stratégie gagnante.
- Le premier joueur peut alors adopter la stratégie suivante :
 - Il appose son premier pion de façon arbitraire ;
 - Par la suite, chaque fois que ce sera à son tour de jouer, il imitera la stratégie gagnante du second joueur. Autrement dit, il procède à l’expérience de pensée suivante : on néglige complètement le coup d’ouverture joué par le premier joueur et on inverse les couleurs (les pièces blanches deviennent noire et les pièces noires deviennent blanches). Ce faisant, on obtient une configuration pour laquelle la stratégie gagnante

prescrit une réplique optimale. On met alors fin à cette expérience de pensée et le premier joueur appose son prochain pion sur la case identifiée au cours de son expérimentation mentale.

- D'une part, puisque le second joueur applique la stratégie gagnante, il doit forcément arriver à relier les deux pôles de sa couleur avec des pièces de sa couleur. D'autre part, comme le premier joueur a d'une certaine façon subtilisé la stratégie gagnante et que le coup joué arbitrairement d'entrée de jeu ne peut qu'être un atout, le premier joueur sera en encore meilleure posture en utilisant la stratégie adaptée du second joueur qu'il ne l'aurait été en jouant simplement en tant que second joueur. Il devrait donc parvenir à relier les deux pôles de sa couleur avec des pièces de sa couleur. Or, nous avons vu qu'il est impossible, au jeu de Hex, que les deux joueurs parviennent simultanément à réaliser l'objectif ultime.
- Étant parvenu à une évidente contradiction, force est d'admettre que l'hypothèse de départ – celle voulant que le deuxième joueur est celui qui possède une stratégie gagnante – est insoutenable et doit donc être rejetée.

Étant admis que l'un des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante et ayant prouvé qu'il ne peut s'agir du second joueur, on convient donc – à la suite de Nash – que c'est le premier joueur qui l'emportera toujours sur son adversaire en jouant de façon optimale.

Un point demeure à éclaircir : comment pouvons-nous être certains que le coup d'ouverture effectué arbitrairement par le premier joueur ne peut jamais se révéler être un handicap ? Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que si la stratégie du premier joueur décrite plus haut prescrit d'apposer un pion là où il avait joué son coup d'ouverture, alors, comme l'un de ses pions occupe déjà cette case, il lui suffira de jouer ce coup arbitrairement. Si ce nouveau coup joué arbitrairement devait à son tour avoir été joué sur une case où la stratégie prévoit à un moment ou à un autre de jouer un coup, alors il suffira à nouveau de déroger temporairement à la stratégie lorsque celle-ci prescrit de jouer là où un pion a été joué par anticipation et de jouer un coup arbitrairement. Comme toute partie se termine après un nombre fini de coup, cette astuce n'est donc appelée à être employée qu'un nombre fini de fois, le tout sans conséquence déplorable.

4 Conclusion

Bien que l'on sache que le premier joueur a l'assurance de pouvoir battre le second en jouant de façon optimale, le jeu de Hex demeure source de divertissement car le résultat obtenu par Nash en est un d'existence, mais il est hautement non constructif. Il nous assure de l'existence d'une stratégie gagnante pour le premier joueur, mais il ne nous donne pas la moindre information au sujet de ladite stratégie.

Si celle-ci peut être trouvée empiriquement en employant la force brute sur un plateau de très petite taille, le problème consistant à décrire explicitement la stratégie gagnante du premier joueur sur un plateau de très grande taille demeure à ce jour non résolu. De toute façon, la règle

du gâteau dissuade le premier joueur de réaliser un coup d'ouverture optimal. Cet auto-sabotage forcé a pour effet de renforcer l'agentivité des joueurs et leurs possibilités d'expression de leurs capacités stratégiques, tactiques et logiques.

Cet article, nous l'espérons, aura permis de mieux comprendre la logique sous-jacente à la preuve d'un joli résultat mathématique concernant le jeu de Hex. Il convient cependant de préciser que le jeu de Hex se révèle mathématiquement intéressant à de nombreux autres égards.

Le lecteur intéressé à en savoir davantage au sujet du jeu de Hex, de ses diverses variantes ludiques (dont le jeu de Rex [9], un mot-valise formé par la fusion de *Reverse Hex* ; dans cette variante, le premier joueur à relier les deux pôles de sa couleur avec des pions de sa couleur *perd*) et des stratégies de jeu, pourra consulter les ouvrages suivants [1, 7, 8]. Pour explorer les structures mathématiques communes au jeu de Hex et à d'autres jeux de connexion apparentés, on pourra se tourner vers l'ouvrage de référence suivant [2]. Pour découvrir comment le jeu de Hex usuel peut être adapté de façon plutôt naturelle de sorte à donner lieu à un jeu se jouant sur une grille hexagonale infinie, on consultera [6]. Cet article propose également un surprenant analogue partiel au résultat de Nash pour ce jeu de Hex infini. Enfin, et c'est peut-être là l'aspect le plus mathématiquement époustouflant, l'article suivant [3] propose une approche à rebrousse-poil remarquablement fructueuse : plutôt que d'employer des théorèmes mathématiques afin d'obtenir des résultats au sujet du jeu de Hex, on utilise un analogue direct du théorème de Nash, s'appliquant à une généralisation n -dimensionnelle du jeu de Hex pour n joueurs, afin de démontrer un théorème mathématique classique, à savoir le théorème du point fixe de Brouwer.

Bibliographie

- [1] Cameron BROWNE : *Hex Strategy : Making the right connections*. AK Peters/CRC Press, 2009.
- [2] Cameron BROWNE : *Connection Games : Variations on a Theme*. AK Peters/CRC Press, 2018.
- [3] David GALE : The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *The American mathematical monthly*, 86(10):818–827, 1979.
- [4] Martin GARDNER : Mathematical Games : Concerning the game of Hex, which may be played on the tiles of the bathroom floor. *Scientific American*, 197(1):145–151, 1957.
- [5] Martin GARDNER : Mathematical Games : How to remember numbers by mnemonic devices such as cuff links and red zebras. *Scientific American*, 197(4):130–140, 1957.
- [6] Joel David HAMKINS et Davide LEONESSI : Infinite Hex is a draw. *arXiv preprint arXiv :2201.06475*, 2022.
- [7] Ryan B HAYWARD : *Hex : A Playful Introduction*, volume 54. American Mathematical Society, 2022.
- [8] Ryan B HAYWARD et Bjarne TOFT : *Hex : The Full Story*. CRC Press, 2019.

- [9] Ryan B HAYWARD, Bjarne TOFT et Philip HENDERSON : How to play reverse Hex. *Discrete mathematics*, 312(1):148–156, 2012.
- [10] Imre LAKATOS : *Proofs and Refutations : The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, 2015.
- [11] Frédéric MORNEAU-GUÉRIN : Martin Gardner : vulgarisateur et passeur culturel extraordinaire. *Bulletin AMQ*, 62(2):24–42, 2022.
- [12] John F. NASH : Some games and machines for playing them. *In Rpt. D-1164*. Rand Corp. Tech, 1952.
- [13] David S. RICHESON : *Euler's Gem*. Princeton Science Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, paperback édition, 2019.
- [14] Ulrich SCHWALBE et Paul WALKER : Zermelo and the Early History of Game Theory. *Games and economic behavior*, 34(1):123–137, 2001.
- [15] Ernst ZERMELO : Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. *In Proceedings of the fifth international congress of mathematicians*, volume 2, pages 501–504. Cambridge University Press, 1913.