

Qu'y a-t-il entre $+$ et $\times$ et au-delà de a^b ?

Frédéric Morneau-Guérin & Tsz Hong Ip

68E ÉDITION DU CONGRÈS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

19 octobre 2024











Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}.$$

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}.$$

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fois}}.$$

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a + b = \underbrace{a + 1 + \cdots + 1}_{b \text{ fois}}.$$

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}.$$

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fois}}.$$

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a + b = \underbrace{a + 1 + \cdots + 1}_{b \text{ fois}}.$$

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}.$$

$$a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fois}}.$$

$${}_b a = \underbrace{a^{a^{\cdots^a}}}_{b \text{ fois}}.$$

Fonction *successeur*

Définissons $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$S(0) := 1,$$

$$S(1) := 2,$$

$$S(2) := 3,$$

$$S(3) := 4,$$

$$S(4) := 5,$$

$$S(5) := 6,$$

$$\vdots$$

Fonction *successeur*

Définissons $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$S(0) := 1,$$

$$S(1) := 2,$$

$$S(2) := 3,$$

$$S(3) := 4,$$

$$S(4) := 5,$$

$$S(5) := 6,$$

$$\vdots$$

On aurait envie de dire $S(n) := n + 1$, mais on aurait l'impression d'anticiper $+$.

Hyperopération de rang 0

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_0(a, b) := S(b).$$

Hyperopération de rang 1

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_1(a, b) := \begin{cases} a, & \text{si } b = 0; \\ H_0\left(a, H_1(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Hyperopération de rang 1

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_1(a, b) := \begin{cases} a, & \text{si } b = 0; \\ H_0\left(a, H_1(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$a + 0 := a$$

$$a + 1 := S(a + 0) = S(a)$$

$$a + 2 := S(a + 1) = S(S(a)) = (S \circ S)(a)$$

$$a + 3 := S(a + 2) = S(S(S(a))) = (S \circ S \circ S)(a)$$

$$\vdots$$

$$a + b := \underbrace{(S \circ \cdots \circ S)}_{b \text{ fois}}(a)$$

Hyperopération de rang 2

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_2(a, b) := \begin{cases} 0, & \text{si } b = 0; \\ H_1\left(a, H_2(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Hyperopération de rang 2

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_2(a, b) := \begin{cases} 0, & \text{si } b = 0; \\ H_1\left(a, H_2(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$a \times 0 := 0$$

$$a \times 1 := a + (a \times 0) = a + 0 = a$$

$$a \times 2 := a + (a \times 1) = a + a$$

$$a \times 3 := a + (a \times 2) = a + a + a$$

$$\vdots$$

$$a \times b := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$$

Hyperopération de rang 3

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_3(a, b) := \begin{cases} 1, & \text{si } b = 0; \\ H_2\left(a, H_3(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Hyperopération de rang 3

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_3(a, b) := \begin{cases} 1, & \text{si } b = 0; \\ H_2\left(a, H_3(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$a^0 := 1$$

$$a^1 := a \times (a^0) = a^1 = a$$

$$a^2 := a \times (a^1) = a \times a$$

$$a^3 := a \times (a^2) = a \times (a \times a)$$

$$\vdots$$

$$a^b := \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ fois}}$$

Hyperopération de rang 4

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_4(a, b) := \begin{cases} 1, & \text{si } b = 0; \\ H_3\left(a, H_4(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Hyperopération de rang 4

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, définissons $H_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit :

$$H_4(a, b) := \begin{cases} 1, & \text{si } b = 0; \\ H_3\left(a, H_4(a, S^{-1}(b))\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

$${}^0a := 1$$

$${}^1a := a^{({}^0a)} = a^1 = a$$

$${}^2a := a^{({}^1a)} = a^a$$

$${}^3a := a^{({}^2a)} = a^{(a^a)}$$

$$\vdots$$

$${}^ba := \underbrace{a^{a^{\cdots^a}}}_{b \text{ fois}}$$

Hyperopération de rang n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$,

$$H_n(a, b) := \begin{cases} S(b), & \text{si } n = 0 \\ a, & \text{si } n = 1 \text{ et } b = 0 \\ 0, & \text{si } n = 2 \text{ et } b = 0 \\ 1, & \text{si } n \geq 3 \text{ et } b = 0; \\ H_{n-1}\left(a, H_n\left(a, S^{-1}(b)\right)\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Hyperopération de rang 0

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6
4	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	6

Hyperopération de rang 1

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Hyperopération de rang 2

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	12	15
4	0	4	8	12	16	20
5	0	5	10	15	20	25

Hyperopération de rang 3

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16	32
3	1	3	9	27	81	243
4	1	4	16	64	256	1024
5	1	5	25	125	625	3125

Hyperopération de rang 4

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	16	65536	!!!
3	1	3	9	!!!	!!!	!!!
4	1	4	16	!!!	!!!	!!!
5	1	5	25	!!!	!!!	!!!

Hyperopération de rang 5

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	!!!	!!!	!!!
3	1	3	!!!	!!!	!!!	!!!
4	1	4	!!!	!!!	!!!	!!!
5	1	5	!!!	!!!	!!!	!!!

Moyenne arithmétique

Étant donné $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$,

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Moyenne géométrique

Étant donné $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$,

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}.$$

Les p -moyennes de Hölder/Minkowski

Étant donné $p \in (0, \infty)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, posons

$$\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}.$$

Les p -moyennes de Hölder/Minkowski

Étant donné $p \in (0, \infty)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, posons

$$\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}.$$

Observation 1 :

$$\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Les p -moyennes de Hölder/Minkowski

Étant donné $p \in (0, \infty)$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, posons

$$\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{1/p}.$$

Observation 1 :

$$\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Observation 2 :

$$\mu_0(x_1, x_2, \dots, x_n) := \lim_{p \rightarrow 0^+} \mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv G(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Démonstration de l'observation 2

$$\begin{aligned}\mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \\ &= \exp \left(\log \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \right] \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{p} \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right) \right)\end{aligned}$$

Démonstration de l'observation 2 (suite)

Par continuité des fonctions $\exp(\cdot)$ et $\log(\cdot)$,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 0^+} \mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \exp \left(\frac{1}{p} \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)}{p} \right).\end{aligned}$$

Démonstration de l'observation 2 (suite)

Par continuité des fonctions $\exp(\cdot)$ et $\log(\cdot)$,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 0^+} \mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \exp \left(\frac{1}{p} \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)}{p} \right).\end{aligned}$$

On a donc une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.

Démonstration de l'observation 2 (suite suite)

Par la règle de L'Hôpital (où on dérive par rapport à p),

$$\begin{aligned} & \exp \left(\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)}{p} \right) \\ \stackrel{H}{=} & \exp \left(\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \log(x_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p}}{1} \right) \\ = & \exp \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \log(x_i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1} \right) \end{aligned}$$

Démonstration de l'observation 2 (suite suite suite)

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) \right) \\ &= \exp \left(\log \left(\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \right) \right) \\ &= \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \\ &= G(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Démonstration de l'observation 2 (suite suite suite suite)

En somme, on a montré que

$$\mu_0(x_1, x_2, \dots, x_n) := \lim_{p \rightarrow 0^+} \mu_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

comme voulu.



En corollaire des observations 1 et 2

Étant donné $a, b \geq 0$, on a

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}$$

et

$$G(a, b) = \sqrt{a \times b}.$$

En corollaire des observations 1 et 2

Étant donné $a, b \geq 0$, on a

$$a + b = A(a, b) \times 2$$

et

$$a \times b = G(a, b)^2.$$

En corollaire des observations 1 et 2

Étant donné $a, b \geq 0$, on a

$$H_1(a, b) = A(a, b) \times 2$$

et

$$H_2(a, b) = G(a, b)^2.$$

En corollaire des observations 1 et 2

Étant donné $a, b \geq 0$, on a

$$H_1(a, b) = H_2(A(a, b), 2)$$

et

$$H_2(a, b) = H_3(G(a, b), 2).$$

En corollaire des observations 1 et 2

Étant donné $a, b \geq 0$, on a

$$H_1(a, b) = H_2(\mu_1(a, b), 2)$$

et

$$H_2(a, b) = H_3(\mu_0(a, b), 2).$$

Cela suggère une voie vers une généralisation

Soit $r \in (1, 2)$ un rang et $p(r) : [1, 2] \rightarrow [0, 1]$ une fonction telle que $\lim_{r \rightarrow 1} p(r) = 1$ et $\lim_{r \rightarrow 2} p(r) = 0$, alors la famille

$$H_r(a, b) := H_{r+1}(\mu_{p(r)}(a, b), 2)$$

devrait interpoler entre $H_1(a, b)$ et $H_2(a, b)$.

Cela suggère une voie vers une généralisation

Soit $r \in (1, 2)$ un rang et $p(r) : [1, 2] \rightarrow [0, 1]$ une fonction telle que $\lim_{r \rightarrow 1} p(r) = 1$ et $\lim_{r \rightarrow 2} p(r) = 0$, alors la famille

$$H_r(a, b) := H_{r+1}(\mu_{p(r)}(a, b), 2)$$

devrait interpoler entre $H_1(a, b)$ et $H_2(a, b)$.

Problème : En cherchant à définir H_r , on a recours à H_{r+1} .

Cela suggère une voie vers une généralisation

Soit $r \in (1, 2)$ un rang et $p(r) : [1, 2] \rightarrow [0, 1]$ une fonction telle que $\lim_{r \rightarrow 1} p(r) = 1$ et $\lim_{r \rightarrow 2} p(r) = 0$, alors la famille

$$H_r(a, b) := H_{r+1}(\mu_{p(r)}(a, b), 2)$$

devrait interpoler entre $H_1(a, b)$ et $H_2(a, b)$.

Problème : En cherchant à définir H_r , on a recours à H_{r+1} .

Possible voie de sortie : H_{r+1} n'est pas évalué en n'importe quel point (x, y) mais en $(x, 2)$.

Revenons un instant à H_1 et H_2

- **Fait.** H_1 possède un élément neutre, à savoir 0 :

$$H_1(a, 0) = a.$$

- **Proposition.** On a

$$\mu_1(H_2(a, 2), 0) = a.$$

Revenons un instant à H_1 et H_2

- **Fait.** H_1 possède un élément neutre, à savoir 0 :

$$H_1(a, 0) = a.$$

- **Proposition.** Quel que soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_1(H_2(a, 2), 0) = a.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} H_2\left(\mu_1(H_2(a, 2), 0), 2\right) &= H_2\left(A(H_2(a, 2), 0), 2\right) \\ &= H_1(H_2(a, 2), 0) \\ &= H_2(a, 2) \end{aligned}$$

Revenons un instant à H_1 et H_2

- **Fait.** H_1 possède un élément neutre, à savoir 0 :

$$H_1(a, 0) = a.$$

- **Proposition.** Quel que soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_1(H_2(a, 2), 0) = a.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} H_2(\mu_1(H_2(a, 2), 0), 2) &= H_2(A(H_2(a, 2), 0), 2) \\ &= H_1(H_2(a, 2), 0) \\ &= H_2(a, 2) \end{aligned}$$

$$\text{Monotonie de } H_2(\cdot, 2) \implies \mu_1(H_2(a, 2), 0) = a.$$

Revenons un instant à H_1 et H_2

- **Fait.** H_2 possède un élément neutre, à savoir 1 :

$$H_2(a, 1) = a.$$

- **Proposition.** Quel que soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_0(H_3(a, 2), 1) = a.$$

Revenons un instant à H_1 et H_2

- **Fait.** H_2 possède un élément neutre, à savoir 1 :

$$H_2(a, 1) = a.$$

- **Proposition.** Quel que soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_0(H_3(a, 2), 1) = a.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} H_3\left(\mu_0(H_3(a, 2), 1), 2\right) &= H_3\left(G(H_3(a, 2), 1), 2\right) \\ &= H_2(H_3(a, 2), 1) \\ &= H_3(a, 2) \end{aligned}$$

Revenons un instant à H_1 et H_2

- **Fait.** H_2 possède un élément neutre, à savoir 1 :

$$H_2(a, 1) = a.$$

- **Proposition.** Quel que soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_0(H_3(a, 2), 1) = a.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} H_3\left(\mu_0(H_3(a, 2), 1), 2\right) &= H_3\left(G(H_3(a, 2), 1), 2\right) \\ &= H_2(H_3(a, 2), 1) \\ &= H_3(a, 2) \end{aligned}$$

$$\text{Monotonie de } H_3(\cdot, 2) \implies \mu_0(H_3(a, 2), 0) = a.$$

En somme

- On a montré que, quelque soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_1(H_2(a, 2), 0) = a$$

et

$$\mu_0(H_3(a, 2), 1) = a.$$

En somme

- On a montré que, quelque soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_1(H_2(a, 2), 0) = a$$

et

$$\mu_0(H_3(a, 2), 1) = a.$$

- Les problèmes de la forme

$$\mu_1(?, y) = z$$

et

$$\mu_0(?, y) = z,$$

où y et z sont prescrits, n'admettent pas toujours une solution. Mais lorsque celle-ci existe alors elle est unique.

En somme

- On a montré que, quelque soit $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_1(H_2(a, 2), 0) = a$$

et

$$\mu_0(H_3(a, 2), 1) = a.$$

- Quitte à commettre certains abus, on pourrait dire que

$$H_2(a, 2) = \mu_1^{-1}(a, 0)$$

et

$$H_3(a, 2) = \mu_0^{-1}(a, 1)$$

Retour à H_r pour $1 < r < 2$

- Supposons qu'il existe ε_r avec $0 \leq \varepsilon_r \leq 1$ et tel que

$$H_r(a, \varepsilon_r) = a.$$

Retour à H_r pour $1 < r < 2$

- Supposons qu'il existe ε_r avec $0 \leq \varepsilon_r \leq 1$ et tel que

$$H_r(a, \varepsilon_r) = a.$$

- À supposé que cette expression ait du sens, on pose

$$H_{r+1}(a, 2) := \mu_{p(r)}^{-1}(a, \varepsilon_r).$$

Retour à H_r pour $1 < r < 2$

- Supposons qu'il existe ε_r avec $0 \leq \varepsilon_r \leq 1$ et tel que

$$H_r(a, \varepsilon_r) = a.$$

- À supposé que cette expression ait du sens, on pose

$$H_{r+1}(a, 2) := \mu_{p(r)}^{-1}(a, \varepsilon_r).$$

- Pour $a, b \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned} H_r(a, b) &= H_{r+1}(\mu_{p(r)}(a, b), 2) \\ &= \mu_{p(r)}^{-1}(\mu_{p(r)}(a, b), \varepsilon_r) \end{aligned}$$

Définition formelle de H_r pour $1 < r < 2$

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} H_r(a, b) &= \mu_{p(r)}^{-1} \left(\mu_{p(r)}(a, b), \varepsilon_r \right) \\ &= \mu_{p(r)}^{-1} \left(\left(\frac{a^{p(r)} + b^{p(r)}}{2} \right)^{\frac{1}{p(r)}}, \varepsilon_r \right) \\ &= \left(2 \cdot \left[\left(\frac{a^{p(r)} + b^{p(r)}}{2} \right)^{\frac{1}{p(r)}} \right]^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)} \right)^{\frac{1}{p(r)}} \\ &= \left(a^{p(r)} + b^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)} \right)^{\frac{1}{p(r)}} \end{aligned}$$

Définition formelle de H_r pour $1 < r < 2$

Étant donné $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} H_r(a, b) &= \mu_{p(r)}^{-1} \left(\mu_{p(r)}(a, b), \varepsilon_r \right) \\ &= \mu_{p(r)}^{-1} \left(\left(\frac{a^{p(r)} + b^{p(r)}}{2} \right)^{\frac{1}{p(r)}}, \varepsilon_r \right) \\ &= \left(2 \cdot \left[\left(\frac{a^{p(r)} + b^{p(r)}}{2} \right)^{\frac{1}{p(r)}} \right]^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)} \right)^{\frac{1}{p(r)}} \\ &= \left(a^{p(r)} + b^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)} \right)^{\frac{1}{p(r)}} \end{aligned}$$

Une question importante demeure : comment associer un indice $0 < p < 1$ à un rang $1 < r < 2$ donné ?

Lien entre rang r et indice p

$$2 + 2 = H_1(2, 2) = 4$$

$$2 \times 2 = H_2(2, 2) = 4$$

$$2^2 = H_3(2, 2) = 4$$

$${}^22 = H_4(2, 2) = 4$$

$$H_n(2, 2) = 4.$$

Donc il apparaît raisonnable d'exiger que

$$H_r(2, 2) = 4.$$

Lien entre rang r et indice p

- D'une part, on veut que

$$H_r(2,2) = 4$$

- D'autre part, on a

$$H_r(2,2) = \left(2^{p(r)} + 2^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)}\right)^{\frac{1}{p(r)}}.$$

Lien entre rang r et indice p

- D'une part, on veut que

$$H_r(2, 2) = 4$$

- D'autre part, on a

$$H_r(2, 2) = \left(2^{p(r)} + 2^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)} \right)^{\frac{1}{p(r)}}.$$

- Ainsi, on peut réconcilier ces deux équations si

$$4^{p(r)} = 2 \cdot 2^{p(r)} - \varepsilon_r^{p(r)}.$$

Lien entre rang r et indice p

- Toute tentative d'attribuer directement un indice p à un rang r (ou *vice versa*) apparaît éminemment subjective.
- En revanche, il existe une façon relativement objective d'associer un élément neutre ε_r à un rang r , à savoir :

$$\varepsilon(r) := r - 1.$$

Lien entre rang r et indice p

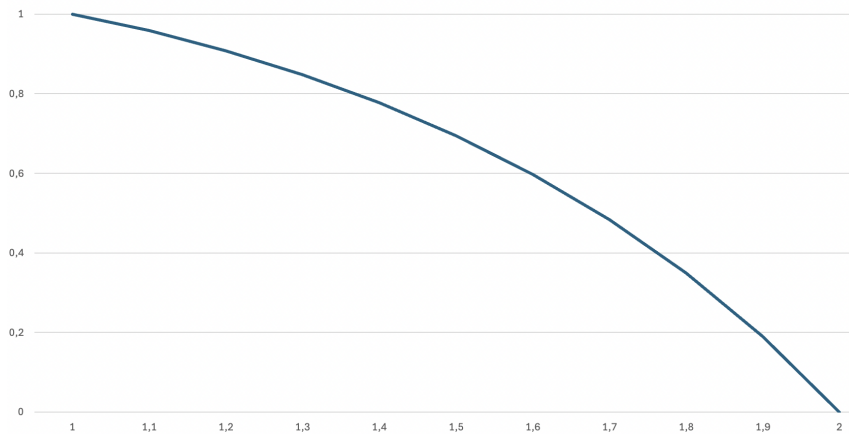
- Toute tentative d'attribuer directement un indice p à un rang r (ou *vice versa*) apparaît éminemment subjective.
- En revanche, il existe une façon relativement objective d'associer un élément neutre ε_r à un rang r , à savoir :

$$\varepsilon(r) := r - 1.$$

Ainsi, étant donné r avec $0 < r < 1$, on peut trouver l'unique p vérifiant l'équation

$$4^{p(r)} = 2 \cdot 2^{p(r)} - (r - 1)^{p(r)}.$$

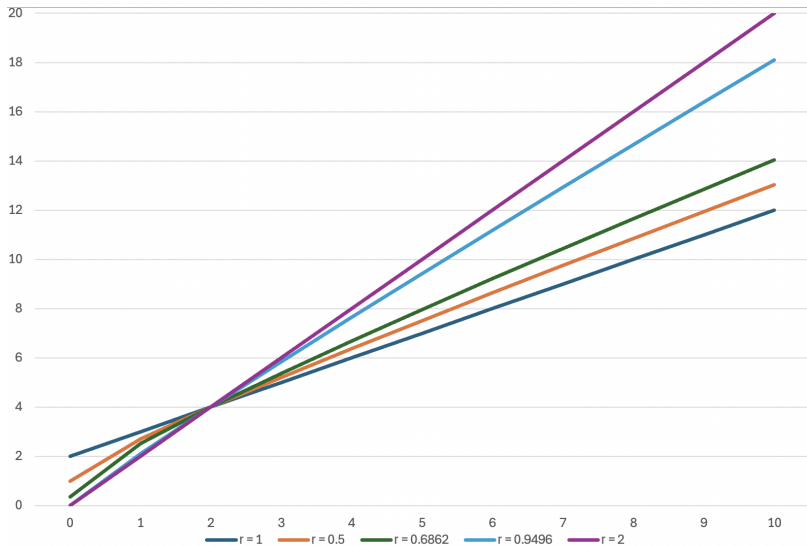
r	1	1.1	1.25	1.5	1.6862	1.75	2
$\varepsilon(r)$	0	0.1	0.25	0.5	0.6862	0.75	1
$p(r)$	1	0.9585	0.8791	0.6942	0.5	0.4189	0



Hyperopération de rang ≈ 1.6862

(c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 12 - 8\sqrt{2} \approx 0.6862$)

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	ε	0.029	0.343	0.816	1.372	1.981
1	0.029	1.372	2,514	3,523	4,715	5,796
2	0.343	2,514	4	5,372	6,686	7,962
3	0.816	3,623	5,372	6,946	8,431	9,857
4	1.372	4,715	6,686	8,431	10,058	11,612
5	1.981	5,796	7,962	9,857	11,612	13,276



Propriétés des hyperopérations de rang r pour $1 < r < 2$

- Commutativité (tout comme H_1 et H_2) :

$$H_r(a, b) = H_r(b, a)$$

- Unifarité (tout comme H_1 et H_2) :

$$H_r(a, \varepsilon_r) = a \quad \text{et} \quad H_r(\varepsilon_r, b) = b.$$

- Admet une extension naturelle sur $[0, \infty) \times [0, \infty)$ (tout comme H_1 et H_2).

Observations au sujet des hyperopérations de rang r pour $1 < r < 2$

- Étant “qualifiée” à l’aide de

$$H_r(2,2) = 4,$$

le comportement de $H_r(a,b)$ pour $a,b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ est tel qu’attendu (c-à-d c’est l’interpolation souhaitée).

- Sur $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ le comportement est plus imprévisible.

Question : Étant donné $H_r(a, b)$ avec $1 < r < 2$, peut-on définir $H_{r+1}(a, b)$?

Question : Étant donné $H_r(a, b)$ avec $1 < r < 2$, peut-on définir $H_{r+1}(a, b)$?

Réponse : Oui, grâce à

- La formule récursive

$$H_{r+1}(a, b) = H_r\left(a, H_{r+1}\left(a, S^{-1}(b)\right)\right);$$

- La relation

$$H_{r+1}(a, 2) = H_r(a, a).$$

Hyperopération de rang ≈ 1.6862

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	ε	0.029	0.343	0.816	1.372	1.981
1	0.029	1.372	2,514	3,523	4,715	5,796
2	0.343	2,514	4	5,372	6,686	7,962
3	0.816	3,623	5,372	6,946	8,431	9,857
4	1.372	4,715	6,686	8,431	10,058	11,612
5	1.981	5,796	7,962	9,857	11,612	13,276

Hyperopération de rang ≈ 2.6862

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	ε	0	ε	0	ε	0
1	ε	1	1.372	1.804	2.294	2.843
2	ε	2	4	6.686	10.058	14.117
3	ε	3	6.946	12.526	19.739	28.585
4	ε	4	10.058	18.862	30.412	44.706
5	ε	5	13.276	25.516	41.718	61.883

Exemple de calcul :

$$\begin{aligned}H_{2.6862}(4,3) &= H_{1.6862}\left(4, H_{2.6862}(4,2)\right) \\&= H_{1.6862}(4, 10.0588) \\&= \mu_{1/2}^{-1}\left(\mu_{1/2}(4, 10.0588), \varepsilon_{0.6862}\right) \\&= \left(4^{1/2} + 10.0588^{1/2} - (0.6862)^{1/2}\right)^{1/2} \\&= 18.86291.\end{aligned}$$

Exemple de calcul à rebours :

$$H_{2.6862}(4, 2) = H_{1.6862}\left(4, H_{2.6862}(4, 1)\right)$$

$$\Longleftrightarrow 10.0588 = H_{1.6862}(4, x)$$

$$\Longleftrightarrow 10.0588 = \mu_{1/2}^{-1}(\mu_{1/2}(4, x), \epsilon_{0.6862})$$

$$\Longleftrightarrow 10.0588 = \left(4^{1/2} + x^{1/2} - \epsilon_{0.6862}^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\Longleftrightarrow x = \left((10.0588)^{1/2} - 4^{1/2} + \epsilon_{0.6862}^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\Longleftrightarrow H_{2.6862}(4, 1) = 4.$$

Second exemple de calcul à rebours :

$$H_{2.6862}(4, 1) = H_{1.6862}\left(4, H_{2.6862}(4, 0)\right)$$

$$\Longleftrightarrow 4 = H_{1.6862}(4, x)$$

$$\Longleftrightarrow 4 = \mu_{1/2}^{-1}(\mu_{1/2}(4, x), \varepsilon_{0.6862})$$

$$\Longleftrightarrow 4 = \left(4^{1/2} + x^{1/2} - \varepsilon_{0.6862}^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\Longleftrightarrow x = \left((4)^{1/2} - 4^{1/2} + \varepsilon_{0.6862}^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\Longleftrightarrow H_{2.6862}(4, 0) = \varepsilon_{0.6862}.$$

Propriétés des hyperopérations de rang r pour $1 < r < 2$

- Pour $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, on a l'interpolation souhaitée entre $H_2(a, b)$ et $H_3(a, b)$.
- Tout comme H_3 , cette hyperopération n'est pas commutative.
- Tout comme H_3 , on a $H_{r+1}(a, 1) = a$, et ce, quel que soit a .
- Tout comme H_3 , on a $H_{r+1}(a, 0)$ est l'élément neutre de H_r , et ce, quel que soit a .

Observations au sujet des hyperopérations de rang $r+1$ où $1 < r < 2$

- Tout comme H_4 , les valeurs le long de la ligne $H_{r+1}(0, b)$ alternent entre l'élément neutre de H_r et 0.
- On peut aisément exploiter la relation $H_{r+1}(a, 2) = H_r(a, a)$ et le fait que $H_r(a, a)$ peut être défini pour tout $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ afin d'étendre la définition de $H_{r+1}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}$.

Question : Étant donné $H_r(a, b)$ avec $1 < r < 2$ et $H_{r+1}(a, b)$, peut-on définir $H_{r+2}(a, b)$?

Question : Étant donné $H_r(a,b)$ avec $1 < r < 2$ et $H_{r+1}(a,b)$, peut-on définir $H_{r+2}(a,b)$?

Réponse : (un peu) oui et (surtout) non.

- La relation $H_{r+2}(a,2) = H_{r+1}(a,a)$ nous permet de définir H_{r+2} sur le domaine $\mathbb{N} \times \{2\}$.
- En appliquant à rebours la formule récursive

$$H_{r+1}(a,b) = H_r\left(a, H_{r+1}(a, S^{-1}(b))\right),$$

on peut montrer que

$$H_{r+2}(a,1) = a,$$

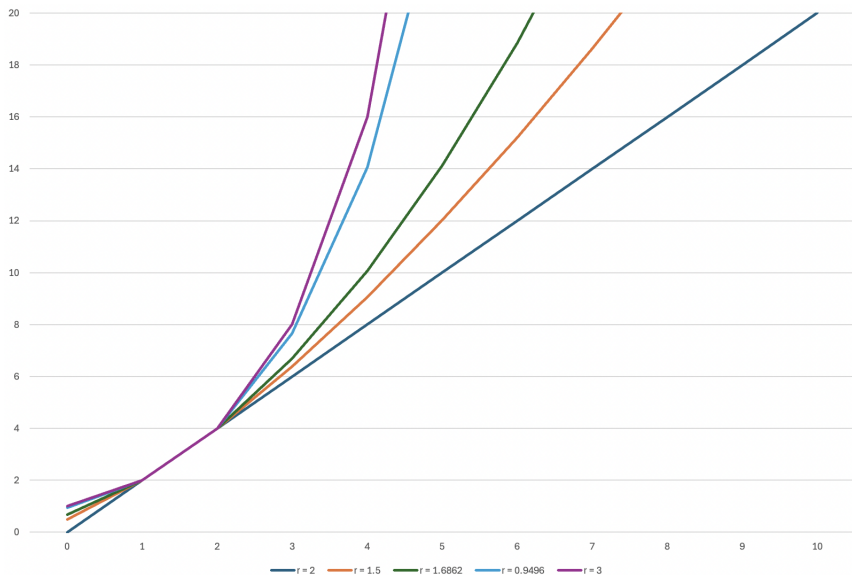
$$H_{r+2}(a,0) = 1,$$

$$H_{r+2}(1,b) = 1.$$

- En revanche, il nous est présentement impossible de déterminer la valeur de $H_{r+2}(a,b)$ pour quel que autre couple (a,b) que ce soit car le calcul implique des termes de la forme $H_r(a,b)$, où $b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$.

Hyperopération de rang ≈ 3.6862

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	1	0	ε	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
3	1	3	12.526	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
4	1	4	30.412	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
5	1	5	61.883	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$



Question : Étant donné $1 < r < 2$, existe-t-il une façon d'étendre $H_{r+1}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$?

Question : Étant donné $1 < r < 2$, existe-t-il une façon d'étendre $H_{r+1}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$?

Réponse : Oui. Notons que H_{r+1} est une interpolation entre H_2 et H_3 . Or

- H_2 vérifie la loi

$$(a \times x) + (a \times y) = a \times (x + y).$$

- H_3 vérifie la loi

$$a^x \times a^y = a^{x+y}.$$

Question : Étant donné $1 < r < 2$, existe-t-il une façon d'étendre $H_{r+1}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$?

Réponse : Oui. Notons que H_{r+1} est une interpolation entre H_2 et H_3 . Or

- H_2 vérifie la loi

$$H_1\left(H_2(a, x), H_2(a, y)\right) = H_2(a, H_1(x, y)).$$

- H_3 vérifie la loi

$$H_2\left(H_3(a, x), H_3(a, y)\right) = H_3(a, H_1(x, y)).$$

Question : Étant donné $1 < r < 2$, existe-t-il une façon d'étendre $H_{r+1}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$?

Réponse : Oui. Notons que H_{r+1} est une interpolation entre H_2 et H_3 . Or

- H_2 vérifie la loi

$$H_1\left(H_2(a, x), H_2(a, y)\right) = H_2(a, H_1(x, y)).$$

- H_3 vérifie la loi

$$H_2\left(H_3(a, x), H_3(a, y)\right) = H_3(a, H_1(x, y)).$$

- Cela suggère que H_{r+1} devrait vérifier la loi

$$H_r\left(H_{r+1}(a, x), H_{r+1}(a, y)\right) = H_{r+1}(a, H_1(x, y)).$$

Si on applique la loi

$$H_r\left(H_{r+1}(a,x) , H_{r+1}(a,y)\right) = H_{r+1}\left(a,H_1(x,y)\right)$$

avec $x = y = \frac{1}{2}$, on obtient

$$H_r\left(H_{r+1}(a,1/2) , H_{r+1}(a,1/2)\right) = H_{r+1}\left(a,H_1(1/2,1/2)\right)$$

c'est-à-dire

$$H_r\left(H_{r+1}(a,1/2) , H_{r+1}(a,1/2)\right) = H_{r+1}(a,1).$$

Si on applique la loi

$$H_r\left(H_{r+1}(a,x) , H_{r+1}(a,y)\right) = H_{r+1}\left(a,H_1(x,y)\right)$$

avec $x = y = \frac{1}{2}$, on obtient

$$H_r\left(H_{r+1}(a,1/2) , H_{r+1}(a,1/2)\right) = H_{r+1}\left(a,H_1(1/2,1/2)\right)$$

c'est-à-dire

$$H_r\left(H_{r+1}(a,1/2) , H_{r+1}(a,1/2)\right) = H_{r+1}(a,1).$$

Or, on connaît les valeurs de $H_r(a,1)$ et le terme de gauche est de la forme $H_r(z,z)$.

On pourra donc définir une valeur pour $H_{r+1}(a, 1/2)$ si on parvient à résoudre un problème de la forme

$$H_r(z, z) = w.$$

Ce problème admet une solution unique pour tout $w \in [\varepsilon_r, \infty)$.

Une fois ce problème résolu – c'est-à-dire une fois qu'on aura défini $H_{r+1}(a, 1/2)$ – on peut employer la même astuce pour définir

$$H_{r+1}(a, 1/4)$$

puis

$$H_{r+1}(a, 1/8)$$

puis

$$H_{r+1}(a, 1/16)$$

puis n'importe quel

$$H_{r+1}(a, \frac{1}{2^k}).$$

On peut ensuite se servir de la *loi*

$$H_r\left(H_{r+1}(a,x) , H_{r+1}(a,y)\right) = H_{r+1}\left(a,H_1(x,y)\right)$$

pour étendre la définition H_{r+1} sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]_{\geq \varepsilon_r}$.

Note : On utilise implicitement la commutativité de H_r .
Par exemple,

$$H_{r+1}\left(a,3/4\right) := H_r\left(H_{r+1}(a,1/4) , H_{r+1}(a,1/2)\right).$$

Comme les rationnels dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$, cette approche est susceptible de nous permettre d'étendre le domaine de H_{r+1} à $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq \varepsilon_r}$.

Hyperopération de rang ≈ 3.6862

a \ b	0	1	2	3	4	5
0	1	0	ε	???	???	???
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	≈ 10.0589	???	???
3	1	3	12.526	???	???	???
4	1	4	30.412	???	???	???
5	1	5	61.883	???	???	???

Question : Est-il possible d'étendre $H_{r+2}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq \varepsilon_r}$ en employant la même astuce que pour étendre $H_{r+1}(a, b)$?

Question : Est-il possible d'étendre $H_{r+2}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq \varepsilon_r}$ en employant la même astuce que pour étendre $H_{r+1}(a, b)$?

Réponse : Non. La commutativité de H_r fut requise. Or, l'hyperopération H_{r+1} n'est pas commutative.

Question : Existe-t-il une astuce permettant d'étendre $H_{r+2}(a,b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq \varepsilon_r}$?

Question : Existe-t-il une astuce permettant d'étendre $H_{r+2}(a, b)$ sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq \varepsilon_r}$?

Réponse : Oui. Cette fois l'inspiration nous vient de H_4 .

Le cas de la tétration

Si $b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$, que peut bien signifier ${}^b a$?

Le cas de la tétration

Si $b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$, que peut bien signifier ${}^b a$?

Toutefois,

$$[b]_a = \underbrace{a^{a^{\cdots a}}}_{[b] \text{ copies de } a}$$

et

$$([b]+1)_a = \underbrace{a^{a^{\cdots a}}}_{[b]+1 \text{ copies de } a} .$$

Le cas de la tétration

Si $b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$, que peut bien signifier ${}^b a$?

Toutefois,

$$[b]_a = \underbrace{a^{a^{\dots a^{a^0}}}}_{[b] + 1 \text{ copies de } a}$$

et

$$([b]+1)_a = \underbrace{a^{a^{\dots a^{a^1}}}}_{[b] + 1 \text{ copies de } a} .$$

Le cas de la tétration

Si $b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$, que peut bien signifier ${}^b a$?

Toutefois,

$$[b]_a = \underbrace{a^{a^{a^{\dots a^0}}}}_{[b] + 1 \text{ copies de } a}$$

et

$$([b]+1)_a = \underbrace{a^{a^{a^{\dots a^1}}}}_{[b] + 1 \text{ copies de } a} .$$

Cela suggère de définir

$${}^b a := \underbrace{a^{a^{a^{\dots a^{a^{(b-[b])}}}}}}_{[b] + 1 \text{ copies de } a} .$$

Exemples de calcul

- Si $b = \frac{1}{2}$, alors

$$H_4(a, 1/2) = a^{\frac{1}{2}} = H_3(a, 1/2).$$

- Si $b = \frac{3}{2}$, alors

$$H_4(a, 3/2) = a^{a^{\frac{1}{2}}} = H_3\left(a, H_3(a, 1/2)\right) = H_3\left(a, H_4(a, 1/2)\right).$$

Exemples de calcul

- Si $b = \frac{1}{2}$, alors

$$H_4(a, 1/2) = a^{\frac{1}{2}} = H_3(a, 1/2).$$

- Si $b = \frac{3}{2}$, alors

$$H_4(a, 3/2) = a^{a^{\frac{1}{2}}} = H_3\left(a, H_3(a, 1/2)\right) = H_3\left(a, H_4(a, 1/2)\right).$$

Mais

$$H_4(a, 3/2) = H_3\left(a, H_4(a, 1/2)\right)$$

est précisément la formule récursive !

Exemples de calcul

- Si $b = \frac{1}{2}$, alors

$$H_4(a, 1/2) = a^{\frac{1}{2}} = H_3(a, 1/2).$$

- Si $b = \frac{3}{2}$, alors

$$H_4(a, 3/2) = a^{a^{\frac{1}{2}}} = H_3\left(a, H_3(a, 1/2)\right) = H_3\left(a, H_4(a, 1/2)\right).$$

Mais

$$H_4(a, 3/2) = H_3\left(a, H_4(a, 1/2)\right)$$

est précisément la formule récursive !

Il suffit donc de définir $H_4(a, b)$ pour b vérifiant $0 < b < 1$ et le reste découle de l'application de la formule récursive.

Tentative d'extension de la définition de H_{r+2} où $1 < r < 2$

Étant donné b vérifiant $0 < b < 1$, puisque

$$H_4(a, b) = H_3(a, b),$$

on aurait envi de simplement poser

$$H_{r+2}(a, b) := H_{r+1}(a, b).$$

Tentative d'extension de la définition de H_{r+2} où $1 < r < 2$

Étant donné b vérifiant $0 < b < 1$, puisque

$$H_4(a, b) := H_3(a, b),$$

on aurait envi de simplement poser

$$H_{r+2}(a, b) := H_{r+1}(a, b).$$

Problème : D'une part,

$$\lim_{b \rightarrow 0} H_{r+2}(a, b) = H_{r+1}(a, b) = \varepsilon_r < 1$$

mais d'autre part

$$H_{r+2}(a, 0) = 1.$$

Tentative d'extension de la définition de H_{r+2} où $1 < r < 2$

Ainsi, il serait plus exact de dire que

$$H_4(a, b) := H_3(a, (1 - b) \cdot x + b \cdot y),$$

où

- x est l'unique nombre réel positif pour lequel

$$H_3(a, x) = \underbrace{H_4(a, 0)}_{=1} \text{ (c'est-à-dire } x = 0 \text{)};$$

- y est l'unique nombre réel positif pour lequel

$$H_3(a, y) = \underbrace{H_4(a, 1)}_{=a} \text{ (c'est-à-dire que } y = 1 \text{)}.$$

D'où

$$H_4(a, b) := H_3(a, (1 - b) \cdot x + b \cdot y) = H_3(a, (1 - b) \cdot 0 + b \cdot 1) = H_3(a, b).$$

Extension de la définition de H_{r+2} où $1 < r < 2$

On pose

$$H_{r+2}(a, b) := H_{r+1}\left(a, (1-b)x + by\right),$$

où

- x est l'unique nombre réel positif pour lequel $H_{r+1}(a, x) = \underbrace{H_{r+2}(a, 0)}_{=1}$ (cette valeur dépend de a);
- y est l'unique nombre réel positif pour lequel $H_{r+1}(a, y) = \underbrace{H_{r+2}(a, 1)}_{=a}$ (c'est-à-dire que $y = 1$).

D'où

$$H_{r+2}(a, b) := H_{r+1}\left(a, (1-b) \cdot x + b\right).$$

En conclusion.

- Pour H_{r+k} , où $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$, cette difficulté s'estompe. On retombe sur un cas similaire à celui de H_4 où

$$(1 - b) \cdot x + b \cdot y = (1 - b) \cdot 0 + b \cdot 1 = b.$$

- Ainsi H_{r+k} peut être défini pour tout $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sans devoir faire appel à de nouvelles lois et de nouvelles astuces.
- C'est donc dire qu'on est parvenu à définir des hyperopérations d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.

**MERCI DE
VOTRE
ATTENTION**

