Sur la représentation des matrices bistochastiques par des produits de T-transformations

Ludovick Bouthat

Université Laval

15 octobre 2022

No. 5 (1948)

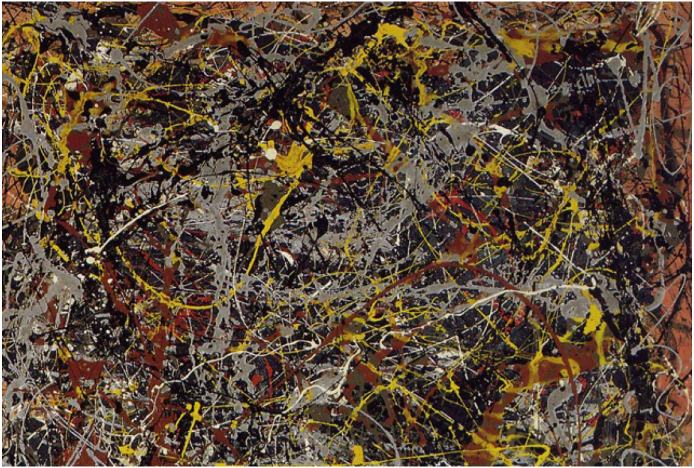


Figure – No. 5 (1948)

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

Conditions à satisfaire :

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

Conditions à satisfaire :

1. Intuitive et pratique ;

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

Conditions à satisfaire :

1. Intuitive et pratique ;
2. Indépendante de la masse salariale de la population ;

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conditions nécessaires

La mesure *n'est pas* unique.

Conditions à satisfaire :

1. Intuitive et pratique ;
2. Indépendante de la masse salariale de la population ;
3. Indépendante de la taille de la population.

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Intuition

Supposons que les deux populations sont de taille égale !

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conventions

Notations :

$x := (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ — Les salaires de la population 1 ;
$y := (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ — Les salaires de la population 2 ;

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conventions

Notations :

$x := (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ — Les salaires de la population 1 ;
$y := (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n)$ — Les salaires de la population 2 ;

Suppositions :

$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_{n-1} \geqslant x_n$;
$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y_{n-1} \geqslant y_n$;

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Conventions

Notations :

$x := (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ — Les salaires de la population 1 ;
$y := (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ — Les salaires de la population 2 ;

Suppositions :

$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{n-1} \geqslant x_n$;
$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_{n-1} \geqslant y_n$;

$\sum_{k=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n y_i = 1.$

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ($n = 2$)

$(1, 0)$ vs. $(0.6, 0.4)$?

$(0.6, 0.4)$ vs. $(0.5, 0.5)$?

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ($n = 2$)

$(1, 0)$ vs. $(0.6, 0.4)$?

$(0.6, 0.4)$ vs. $(0.5, 0.5)$?

y est plus *inégal* que x si $y_1 \geqslant x_1$.

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ($n = 3$)

$(0.6, 0.2, 0.2)$ vs. $(0.4, 0.4, 0.2)$?

$(0.4, 0.4, 0.2)$ vs. $(0.\overline{3}, 0.\overline{3}, 0.\overline{3})$?

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Exemples ($n = 3$)

$(0.6, 0.2, 0.2)$ vs. $(0.4, 0.4, 0.2)$?

$(0.4, 0.4, 0.2)$ vs. $(0.\overline{3}, 0.\overline{3}, 0.\overline{3})$?

y est plus *inégal* que x si $y_1 \geqslant x_1$ et $y_1 + y_2 \geqslant x_1 + x_2$.

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Le cas général, la *majorisation*

y est plus *inégal* que x si

$$\begin{aligned} y_1 &\geqslant x_1; \\ y_1 + y_2 &\geqslant x_1 + x_2; \\ &\vdots \\ y_1 + \cdots + y_{n-1} &\geqslant x_1 + \cdots + x_{n-1}; \\ y_1 + \cdots + y_n &= x_1 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Comment mesurer l'inégalité salariale ?

Le cas général, la *majorisation*

y est plus *inégal* que x si

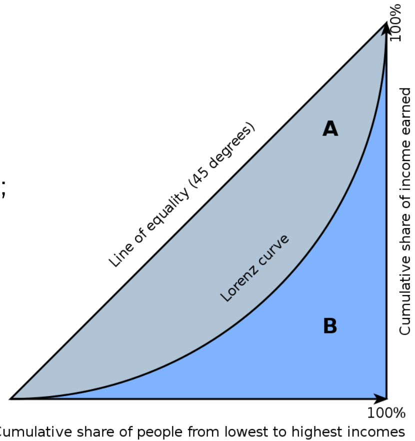
$$\begin{aligned} y_1 &\geqslant x_1; \\ y_1 + y_2 &\geqslant x_1 + x_2; \\ &\vdots \\ y_1 + \cdots + y_{n-1} &\geqslant x_1 + \cdots + x_{n-1}; \\ y_1 + \cdots + y_n &= x_1 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

On dit que y *majorise* x et on écrit $x \prec y$ si les conditions ci-dessus sont satisfaites.

Comment mesurer l'étendu de l'inégalité salariale ?

La courbe de Lorenz (1905)

- $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1}, \quad S_0 = 0;$
- $(k/n,\ S_k)$



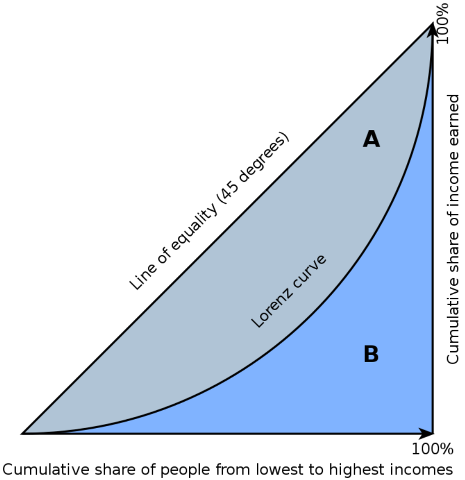
Source : http ://en.wikipedia.org/wiki/File :Economics_Gini_coefficient.svg

Comment mesurer l'étendu de l'inégalité salariale ?

Le coefficient de Gini

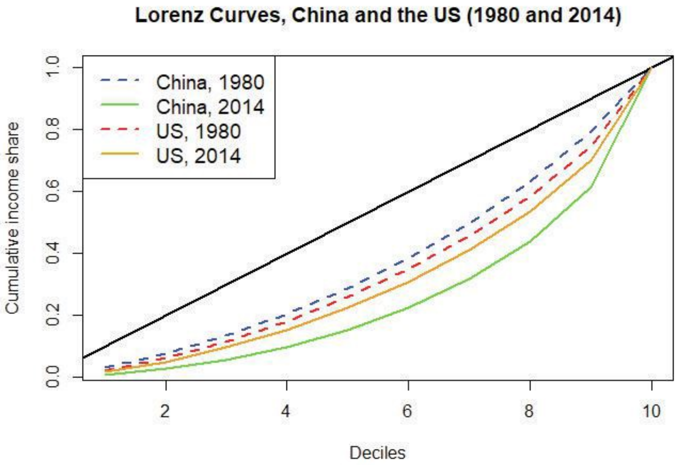
Le *coefficient de Gini* (ou *l'indice de Gini*) est donné par la formule

$$G = \frac{A}{A+B} = 2A = 1 - 2B.$$



Comment mesurer l'étendu de l'inégalité salariale ?

Exemple concret



$G = 0.300$;

$G = 0.345$;

$G = 0.407$;

$G = 0.474$.

Source : https ://www.core-econ.org/doing-economics/book/text/05-03.html#part-51-measuring-income-inequality

Peut-on concevoir des solutions ?

Solution à quoi ?

Si $x \prec y$, peut-on *obtenir* x en faisant un nombre fini de *transfert* à y ?

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 1

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 1

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

La **Personne 1** donne **0.1** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.5, 0.3, 0.2, 0)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 1

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

La **Personne 1** donne **0.1** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.5, 0.3, 0.2, 0)$$

La **Personne 1** donne **0.1** à la **Personne 3** :

$$(0.5, 0.3, 0.2, 0) \mapsto (0.4, 0.3, 0.3, 0)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 1

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

La **Personne 1** donne **0.1** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.5, 0.3, 0.2, 0)$$

La **Personne 1** donne **0.1** à la **Personne 3** :

$$(0.5, 0.3, 0.2, 0) \mapsto (0.4, 0.3, 0.3, 0)$$

La **Personne 1** donne **0.1** à la **Personne 4** :

$$(0.4, 0.3, 0.3, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 2

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

La **Personne 1** donne **0.3** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 2

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

La **Personne 1** donne **0.3** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

La **Personne 2** donne **0.2** à la **Personne 3** :

$$(0.3, 0.5, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.4, 0)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Exemple 2

Comment faire la transformation suivante ?

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

La **Personne 1** donne **0.3** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

La **Personne 2** donne **0.2** à la **Personne 3** :

$$(0.3, 0.5, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.4, 0)$$

La **Personne 3** donne **0.1** à la **Personne 4** :

$$(0.3, 0.3, 0.4, 0) \mapsto (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Combinaison convexe

Comment représenter ces transfert ?

Peut-on concevoir des solutions ?

Combinaison convexe

Comment représenter ces transfert ?

La **Personne 1** donne **0.3** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Combinaison convexe

Comment représenter ces transfert ?

La **Personne 1** donne **0.3** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

$$\Updownarrow$$

La **Pers. 1** donne **75% de la différence** $(0.6 - 0.2) = 0.4$ à la **Pers. 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.6, 0.2, 0.2, 0) + 0.75(0.2 - 0.6, 0.6 - 0.2, 0, 0)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Combinaison convexe

Comment représenter ces transfert ?

La **Personne 1** donne **0.3** à la **Personne 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

$$\Updownarrow$$

La **Pers. 1** donne **75% de la différence** $(0.6 - 0.2) = 0.4$ à la **Pers. 2** :

$$(0.6, 0.2, 0.2, 0) \mapsto (0.6, 0.2, 0.2, 0) + 0.75(0.2 - 0.6, 0.6 - 0.2, 0, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$x := (0.6, 0.2, 0.2, 0)$ & $t = 0.75$:

$$x \mapsto x + t(x_2 - x_1, x_1 - x_2, 0, 0) = tx + (1 - t)(x_2, x_1, x_3, x_4)$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Combinaison convexe

Lemme

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *la distribution du capital d'une population et supposons que les individus* i *et* j *font un transfert de Dalton. Alors il existe un* $t \in [0, 1]$ *tel que la distribution après le transfert est donnée par*

$$\begin{aligned} y &= (x_1, \ldots, \underbrace{tx_i + (1-t)x_j}_{i^e \textit{ indice}}, \ldots, \underbrace{tx_j + (1-t)x_i}_{j^e \textit{ indice}}, \ldots, x_n) \\ &= tx + (1-t)(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i^e \textit{ indice}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j^e \textit{ indice}}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Notation matricielle

- $y = tx + (1-t)(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}} \text{ indice}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}} \text{ indice}}, \ldots, x_n)$

Peut-on concevoir des solutions ?

Notation matricielle

- $y \;=\; tx + (1-t)(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, x_n)$

Soit P la matrice de permutation qui interchange les coefficients i et j d'un vecteur :

$$Px^{tr} := (x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, x_n)^{tr}$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Notation matricielle

- $y = tx + (1-t)(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, x_n)$

Soit P la matrice de permutation qui interchange les coefficients i et j d'un vecteur :

$$Px^{tr} := (x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}}\text{ indice}}, \ldots, x_n)^{tr}$$

$$\implies y^{tr} = tx^{tr} + (1-t)Px^{tr} = (tI + (1-t)P)x^{tr} =: Tx^{tr}$$

Peut-on concevoir des solutions ?

Notation matricielle

- $y = tx + (1-t)(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}}\text{ indice}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}}\text{ indice}}, \dots, x_n)$

Soit P la matrice de permutation qui interchange les coefficients i et j d'un vecteur :

$$Px^{tr} := (x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i^{\text{e}}\text{ indice}}, \dots, \underbrace{x_i}_{j^{\text{e}}\text{ indice}}, \dots, x_n)^{tr}$$

$$\implies y^{tr} = tx^{tr} + (1-t)Px^{tr} = (tI + (1-t)P)x^{tr} =: Tx^{tr}$$

- La matrice T est appelée une *T-transformation*.

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Hypothèse et résultat

Si $x \prec y$, alors il existe un nombre fini de T-transformations $T_1, \dots, T_m$ telles que $x = T_m \dots T_1 y$.

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Hypothèse et résultat

Si $x \prec y$, alors il existe un nombre fini de T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$.

Théorème

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors $x \prec y$ si et seulement s'il existe au plus $n - 1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$.

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Hypothèse et résultat

Si $x \prec y$, alors il existe un nombre fini de T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$.

Théorème

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Alors $x \prec y$ si et seulement s'il existe au plus $n-1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$.

Démonstration.

Preuve triviale par la méthode *d'intuition*. □

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Résultats supplémentaires

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe au plus $n - 1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que* $x = T_m \ldots T_1 y$;

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Résultats supplémentaires

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe au plus $n-1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$;*
3. *Il existe une matrice hermitienne d'éléments diagonaux x et de valeurs propres y ;*

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Résultats supplémentaires

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe au plus $n-1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$;*
3. *Il existe une matrice hermitienne d'éléments diagonaux x et de valeurs propres y ;*
4. $\Phi(x_1) + \cdots + \Phi(x_n) \leqslant \Phi(y_1) + \cdots + \Phi(y_n)$ *pour toute fonction convexe Φ ;*

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Résultats supplémentaires

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe au plus $n-1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$;*
3. *Il existe une matrice hermitienne d'éléments diagonaux x et de valeurs propres y ;*
4. $\Phi(x_1) + \cdots + \Phi(x_n) \leqslant \Phi(y_1) + \cdots + \Phi(y_n)$ *pour toute fonction convexe Φ ;*
5. *Il existe une matrice* ***bistochastique*** *B satisfaisant $x = By$;*

Équivalence entre la majorisation et les T-transformations

Résultats supplémentaires

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe au plus $n-1$ T-transformations $T_1, \ldots, T_m$ telles que $x = T_m \ldots T_1 y$;*
3. *Il existe une matrice hermitienne d'éléments diagonaux x et de valeurs propres y ;*
4. $\Phi(x_1) + \cdots + \Phi(x_n) \leqslant \Phi(y_1) + \cdots + \Phi(y_n)$ *pour toute fonction convexe Φ ;*
5. *Il existe une matrice* ***bistochastique*** *B satisfaisant $x = By$;*
6. *Il existe une matrice* ***unistochastique*** *U satisfaisant $x = Uy$.*

Matrice bistochastique

Définition

Définition

Une matrice carrée est *bistochastique* si ses coefficients sont non-négatifs et si la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est égale à 1. L'ensemble des matrices bistochastiques de dimension $n \times n$ est dénoté par $\mathcal{B}_n$.

Matrice bistochastique

Exemples

- La matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrice bistochastique

Exemples

- La matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Les matrices de permutations : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrice bistochastique

Exemples

- La matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Les matrices de permutations : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Les T-transformations.

Matrice bistochastique

Exemples

- La matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Les matrices de permutations : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Les T-transformations.
- La matrice uniforme J_n : $J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Matrices bistochastiques

Structure algébrique

Proposition

Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_n$ sont deux matrices bistochastiques d'ordre n, alors $B_1 B_2$ est aussi une matrice bistochastique.

Matrices bistochastiques

Structure algébrique

Proposition

Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_n$ sont deux matrices bistochastiques d'ordre n, alors $B_1 B_2$ est aussi une matrice bistochastique.

Proposition

Soit $J_n = \begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$. *Alors pour toute matrice bistochastique B,* $J_n B = B J_n = J_n$.

Matrice unistochastique

Définition

Définition

Une matrice $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *unistochastique* s'il existe une matrice unitaire $U = (u_{ij})$ telle que $d_{ij} = |u_{ij}|^2$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. L'ensemble des matrices unistochastique est dénoté par $\mathcal{U}_n$.

Rappel : Une matrice est unitaire si $UU^* = U^*U = I$.

Exemple

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Matrice unistochastique

Motivation

- Supposons qu'il existe une matrice hermitienne H d'éléments diagonaux $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et de valeurs propres $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Matrice unistochastique

Motivation

• Supposons qu'il existe une matrice hermitienne H d'éléments diagonaux $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et de valeurs propres $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

$\Longrightarrow$ Il existe une matrice unitaire U satisfaisant

$$H = U^* \operatorname{diag}(y_1, y_2, \ldots, y_n) U.$$

Matrice unistochastique

Motivation

• Supposons qu'il existe une matrice hermitienne H d'éléments diagonaux $x = (x_1, \dots, x_n)$ et de valeurs propres $y = (y_1, \dots, y_n)$.

$\Longrightarrow$ Il existe une matrice unitaire U satisfaisant

$$H = U^* \operatorname{diag}(y_1, y_2, \dots, y_n) U.$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u_{11}|^2 & \cdots & |u_{1n}|^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |u_{n1}|^2 & \cdots & |u_{nn}|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

□

Matrice T-décomposables

Définition

Définition

Une matrice bistochastique B est *T-décomposable* s'il existe des T-transformations $T_1, T_2, \ldots, T_m$ satisfaisant $B = T_1 T_2 \cdots T_m$. L'ensemble des matrices T-décomposables est dénoté par $\mathcal{T}_n$.

Majorisation

Retour sur le théorème de Hardy, Littlewood et Pólya

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe une matrice $B \in \mathcal{B}_n$ satisfaisant $x = By$;*
3. *Il existe une matrice $U \in \mathcal{U}_n$ satisfaisant $x = Uy$;*
4. *Il existe une matrice $T \in \mathcal{T}_n$ satisfaisant $x = Ty$.*

Majorisation

Retour sur le théorème de Hardy, Littlewood et Pólya

Théorème (Hardy–Littlewood–Pólya)

Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $x \prec y$;
2. *Il existe une matrice $B \in \mathcal{B}_n$ satisfaisant $x = By$;*
3. *Il existe une matrice $U \in \mathcal{U}_n$ satisfaisant $x = Uy$;*
4. *Il existe une matrice $T \in \mathcal{T}_n$ satisfaisant $x = Ty$.*

Question : Quel est le lien entre $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$?

Quelques liens entre $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Les bases

1. $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}_n$;

Quelques liens entre $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Les bases

1. $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}_n$;
2. Si $n = 2$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{T}_2$;

Quelques liens entre $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Les bases

1. $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}_n$;
2. Si $n = 2$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{T}_2$;
3. Si $n > 2$, $\mathcal{U}_n \subsetneq \mathcal{B}_n$; $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{U}_3$;

Quelques liens entre $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Les bases

1. $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}_n$;
2. Si $n = 2$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{T}_2$;
3. Si $n > 2$, $\mathcal{U}_n \subsetneq \mathcal{B}_n$; $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{U}_3$;
4. Si $n > 2$, $\mathcal{T}_n \subsetneq \mathcal{B}_n$.

Quelques liens entre $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Les bases

1. $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ et $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}_n$;
2. Si $n = 2$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{T}_2$;
3. Si $n > 2$, $\mathcal{U}_n \subsetneq \mathcal{B}_n$; $\longrightarrow$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{U}_3$;
4. Si $n > 2$, $\mathcal{T}_n \subsetneq \mathcal{B}_n$.

Théorème (Marcus–Kidman–Sandy, 1983)

Soit $B \in \mathcal{B}_n$ une matrice bistochastique avec $n \geqslant 3$. Si la diagonale de B est nulle et les $n^2 - n$ coefficients restants sont strictement positifs, alors B n'est pas T-décomposable.

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Quel est le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$ $(n \geqslant 3)$?

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Résultats connus

Théorème (Marcus–Kidman–Sandy, 1983)

Soit $B \in \mathcal{B}_n$ une matrice bistochastique avec $n \geqslant 3$. Si la diagonale de B est nulle et les $n^2 - n$ coefficients restants sont strictement positifs, alors B n'est pas T-décomposable.

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Résultats connus

Théorème (Marcus–Kidman–Sandy, 1983)

Soit $B \in \mathcal{B}_n$ une matrice bistochastique avec $n \geqslant 3$. Si la diagonale de B est nulle et les $n^2 - n$ coefficients restants sont strictement positifs, alors B n'est pas T-décomposable.

Corollaire (Marcus–Kidman–Sandy, 1983)

Pour tout $n \geqslant 4$, il existe une matrice unistochastique qui n'est pas T-décomposable. En particulier, $\mathcal{U}_n \not\subseteq \mathcal{T}_n$ pour tout $n \geqslant 4$.

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Résultats connus (suite)

Théorème (Poon–Tsing, 1987)

Soient $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{U}_n$ définis comme précédemment. Alors

1. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{U}_2$;

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Résultats connus (suite)

Théorème (Poon–Tsing, 1987)

Soient $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{U}_n$ définis comme précédemment. Alors

1. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{U}_2$;
2. $\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{U}_3$;

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Résultats connus (suite)

Théorème (Poon–Tsing, 1987)

Soient $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{U}_n$ définis comme précédemment. Alors

1. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{U}_2$;
2. $\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{U}_3$;
3. $\mathcal{T}_n \nsubseteq \mathcal{U}_n$ *pour tout* $n \geqslant 4$;
4. $\mathcal{U}_n \nsubseteq \mathcal{T}_n$ *pour tout* $n \geqslant 4$.

Le lien entre $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{T}_n$

Résultats connus (suite)

Théorème (Poon–Tsing, 1987)

Soient $\mathcal{T}_n$ et $\mathcal{U}_n$ définis comme précédemment. Alors

1. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{U}_2$;
2. $\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{U}_3$;
3. $\mathcal{T}_n \not\subseteq \mathcal{U}_n$ *pour tout* $n \geqslant 4$;
4. $\mathcal{U}_n \not\subseteq \mathcal{T}_n$ *pour tout* $n \geqslant 4$.

En particulier, la matrice unistochastique

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas T-décomposable.

Les matrices unistochastiques d'ordre 3

Caractérisation

En 1996, Nakazato fourni une paramétrisation des matrices unistochastiques d'ordre 3.

Théorème (Nakazato, 1996)

L'ensemble des matrices unistochastiques d'ordre 3 est paramétrisé par

$$\lambda J_3 + (1-\lambda)\begin{pmatrix} x & (1-x)t & * \\ (1-x)s & \left(\sqrt{xst} \pm \sqrt{(1-s)(1-t)}\right)^2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

où $0 \leqslant \lambda, x, s, t \leqslant 1$.

Les matrices T-décomposables d'ordre 3

Solution partielle

Théorème

Si B est une matrice bistochastique ayant au moins un 0, alors B est T-décomposable si et seulement si elle est de la forme

$$B = P\begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & \alpha\beta & \beta(1-\alpha) \\ \beta & \alpha(1-\beta) & (1-\alpha)(1-\beta) \end{bmatrix} Q,$$

où $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ et P, Q sont des matrices de permutation.

Corollaire

Si $U \in \mathcal{U}_3 \setminus \mathcal{T}_3$, alors tous ses coefficients sont strictement positifs.

Les matrices T-décomposables d'ordre 3

Solution complète ?

Lemme

Pour tout $\lambda \in [0,1]$, la matrice $\lambda I_3 + (1-\lambda)J_3$, où $J_3 = (1/3)_{1\leq i,j\leq 3}$, est T-décomposable.

Les matrices T-décomposables d'ordre 3

Solution complète ?

Lemme

Pour tout $\lambda \in [0,1]$, la matrice $\lambda I_3 + (1-\lambda)J_3$, où $J_3 = (1/3)_{1\leq i,j\leq 3}$, est T-décomposable.

Remarque

Soient $B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_3$ *et* $\lambda := 3\min\{b_{ij}\} = 0.3$. *Alors la matrice*

$$D := \frac{B - \lambda J_3}{1-\lambda} = \frac{B - 0.3J_3}{0.7} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est bistochastique et possède un zéro. De plus,

$$B = (1-\lambda)D + \lambda J_3 = D\big((1-\lambda)I_3 + \lambda J_3\big).$$

Les matrices T-décomposables d'ordre 3

Solution complète ?

Corollaire

Soient $B \in \mathcal{B}_3$ et μ le plus petit coefficient de B. Alors la matrice $D := \frac{B-3\mu J_3}{1-3\mu}$ est bistochastique et possède au moins un coefficient nul. De plus, si D est T-décomposable, alors B l'est aussi.

Les matrices T-décomposables d'ordre 3

Solution complète ?

Corollaire

Soient $B \in \mathcal{B}_3$ et μ le plus petit coefficient de B. Alors la matrice $D := \frac{B-3\mu J_3}{1-3\mu}$ est bistochastique et possède au moins un coefficient nul. De plus, si D est T-décomposable, alors B l'est aussi.

Conjecture

L'ensemble des matrices T-décomposables d'ordre 3 est paramétrisé par

$$\lambda J_3 + (1-\lambda) P \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & \alpha\beta & \beta(1-\alpha) \\ \beta & \alpha(1-\beta) & (1-\alpha)(1-\beta) \end{bmatrix} Q,$$

où $0 \leq \alpha, \beta, \lambda \leq 1$ et P, Q sont des matrices de permutation.

References

- L. Bouthat, A. Khare, J. Mashreghi, F. Morneau-Guérin (2021). *The p-norm of circulant matrices*, Linear and Multilinear Algebra. 12 pages.
- M. Marcus, K. Kidman, and M. Sandy (1984). *Products of elementary doubly stochastic matrices*, Linear and Multilinear Algebra. 15 :3-4, 331-340.
- H. Nakazato (1996). *Set of* 3×3 *Orthostochastic Matrices*, Nihonkai Math. J. 7, 83-100.,
- Y. Poon, N. Tsing (1987). *Inclusion relations between orthostochastic matrices and products of pinching matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 21 :3, 253-259.