Le polytope de Birkhoff

Ludovick Bouthat

Université Laval

10 janvier 2021

Définition

Une matrice $n \times n$ à coefficients positifs est dite *stochastique* si la somme de chaque ligne est égale à 1.

Définition

Une matrice carrée A est dite *bistochastique* si A et A^{tr} sont des matrices stochastiques.

Exemple

$$S := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

S est stochastique et B est bistochastique.

Remarque intéressante

L'ensemble des matrices bistochastiques forme un semi-groupe sous la multiplication matricielle usuelle.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.41 & 0.28 & 0.31 \\ 0.46 & 0.28 & 0.26 \\ 0.13 & 0.44 & 0.43 \end{pmatrix}$$

Définitions

Matrices de permutations

Définition

Une *matrice de permutation* de dimension n est une matrice $n \times n$ uniquement composée de 0 et de 1 et telle que chaque ligne et chaque colonne contient un seul 1.

Exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de permutation.

Notation : On note l'ensemble des matrices de permutation de dimension n par $\mathcal{P}_n$.

Définition (Enveloppe convexe)

Soit $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n éléments. Alors l'*enveloppe convexe* de $\mathcal{A}$ est

$$\mathrm{Conv}(\mathcal{A}) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k : a_k \in \mathcal{A}, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}.$$

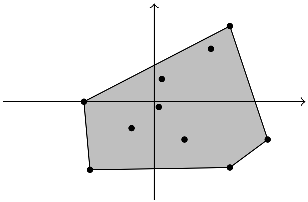

FIGURE – Enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan

Théorème de Birkhoff

Théorème (Théorème de Birkhoff)

L'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de permutations de dimension n est l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices bistochastiques de dimension n, i.e.

$$Conv(\mathcal{P}_n) = \mathcal{D}_n.$$

- L'ensemble des matrices de permutations d'ordre n est dénoté par $\mathcal{P}_n$.
- L'ensemble des matrices bistochastiques d'ordre n est dénoté par $\mathcal{D}_n$.

Rappels

Définition

$\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre* d'une matrice $n \times n$ A s'il existe un vecteur v de dimension n tel que

$$Av = \lambda v.$$

Définition

Le *spectre* d'une matrice carrée A de dimension n, dénoté par $\sigma(A)$, est l'ensemble de ses valeurs propres, i.e.

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists v \in \mathbb{C}^n \text{ t.q. } Av = \lambda v\}.$$

Questions intéressantes

Question 1 : Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ existe-t-il une matrice bistochastique $D \in \mathcal{D}_n$ telle que λ est une valeur propre de D ?

Question 2 : Comment se caractérise l'ensemble

$$\Omega_n := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists D \in \mathcal{D}_n \text{ t.q. } \lambda \in \sigma(D)\} \subseteq \mathbb{C}?$$

Faits divers sur Ω_n

- Ω_n est un ensemble étoilé à partir de n'importe quel point $s \in [0,1]$. $(t\lambda + (1-t)s \in \Omega_n)$

- Ω_n est contenu dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

- Ω_n est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.

- Soit Π_k l'enveloppe convexe des $k^{\text{ième}}$ racines de l'unité. Alors

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k \subseteq \Omega_n.$$

Conjecture de Perfect-Mirsky

- Hazel Perfect et Leon Mirsky ont conjecturés en 1965 que pour tout n,

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k.$$

Conjecture de Perfect-Mirsky

- Hazel Perfect et Leon Mirsky ont conjecturés en 1965 que pour tout n,

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k.$$

- La conjecture a été démontré pour les cas $n = 1, 2, 3, 4$.

Conjecture de Perfect-Mirsky

- Hazel Perfect et Leon Mirsky ont conjecturés en 1965 que pour tout n,

$$\Omega_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k.$$

- La conjecture a été démontré pour les cas $n = 1, 2, 3, 4$.

- J. Mashreghi et R.Rivard ont montrés en 2007 à l'aide d'un contre-exemple que la conjecture ne tient pas pour le cas $n = 5$.

Le contre-exemple en question

Les matrices

$$t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admettent des valeurs propres en dehors de $\bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k$ pour (environ) $t \in [0.4705275, 0.5490013]$.

Quelques jolies images

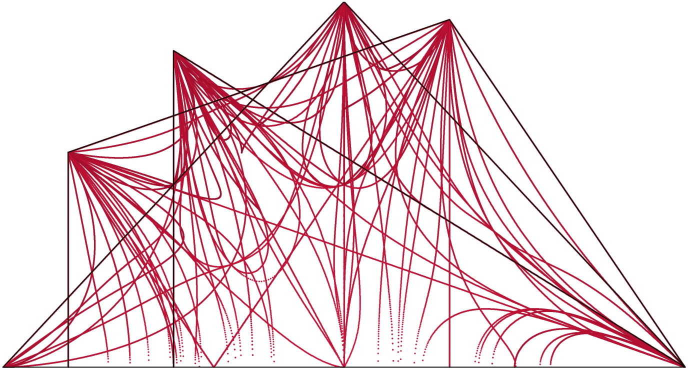

FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 5$.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

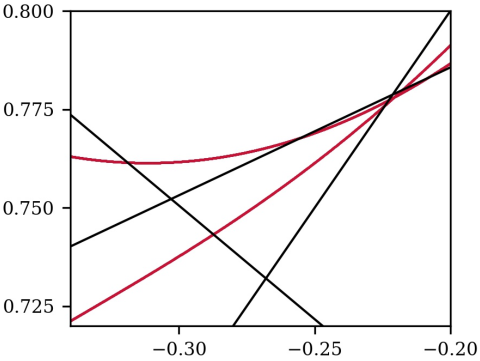

Figure – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 5$ près du « point critique ».

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

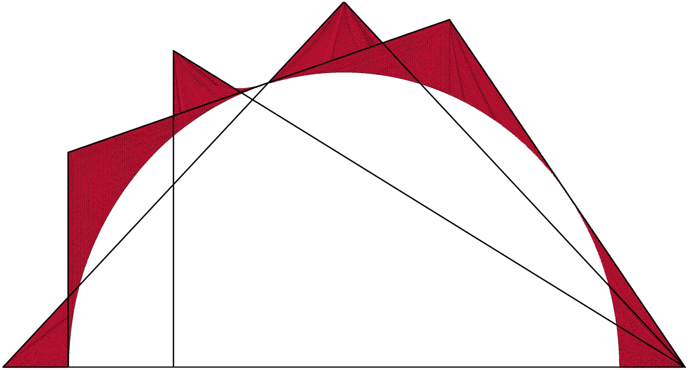

Figure – Valeurs propres des combinaisons de triplets de matrices de permutations pour $n = 5$; le cercle inscrit a été omit.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

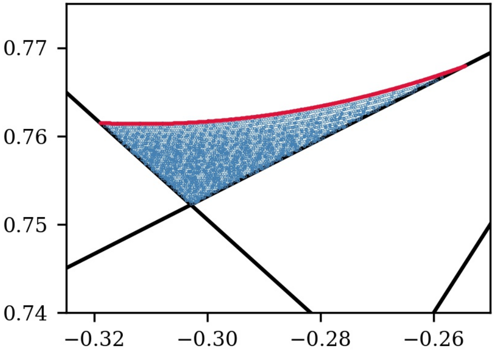

FIGURE – Valeurs propres des combinaisons de triplets de matrices de permutations pour $n = 5$ près du « point critique ».

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

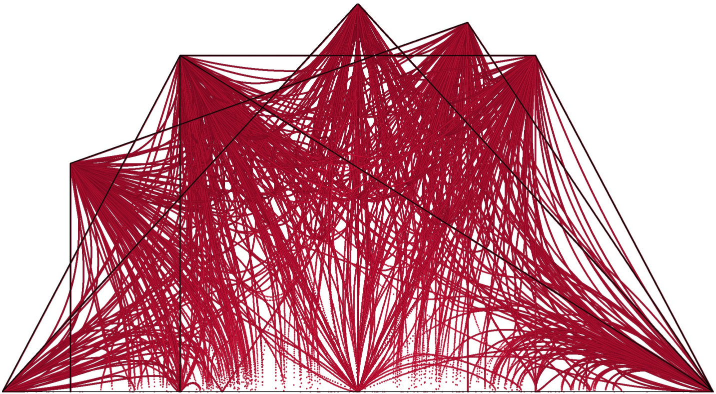

Figure – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 6$.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.

Quelques jolies images

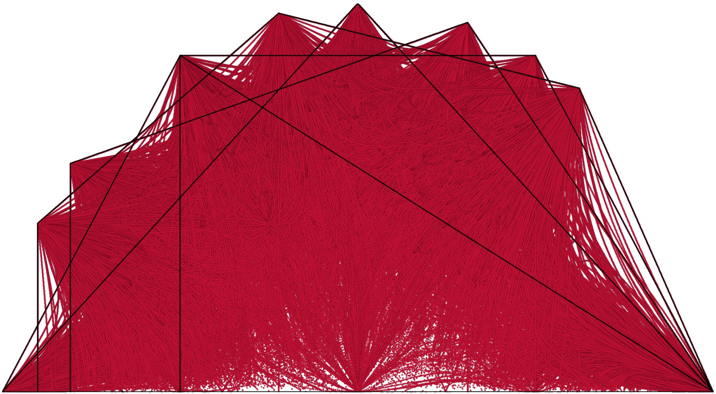

Figure – Valeurs propres des combinaisons de paires de matrices de permutations pour $n = 7$.

Source : Amit Harlev, Charles R. Johnson et Derek Lim ; 2020.