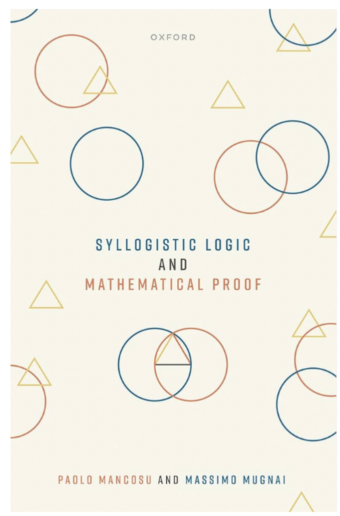
Association
mathématique
du Québec

Lu pour vous

Syllogistic Logic and Mathematical Proof

Frédéric Morneau-Guérin
Département Éducation, Université TÉLUQ
Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

Mancosu, P., & Mugnai, M. (2023). *Syllogistic Logic and Mathematical Proof.* Oxford University Press.



Parmi les réalisations intellectuelles les plus remarquables issues de la Grèce au cours de l'Antiquité, on retrouve indiscutablement la conceptualisation et l'érection de la logique en tant que discipline, codifiée par Aristote dans six traités connus sous le nom d'*Organon*, ainsi que le développement de la preuve mathématique qui s'incarne notamment dans les Éléments d'Euclide puis dans nombre d'ouvrages ultérieurs.

Curieusement, on peine à trouver, dans les écrits antiques, la moindre manifestation d'une relation soutenue entre la démonstration logique et la preuve mathématique. C'est comme si ces deux traditions s'étaient développées sur des bases relativement autonomes. Il s'avère en effet que les textes logiques grecs (et, dans la foulée, les contributions médiévales qui s'en inspirent grandement) n'accordent pratiquement aucune attention à la preuve mathématique en tant que telle. Cela est d'autant plus étonnant que, dans l'Organon, on retrouve de nombreuses déclarations programmatiques indiquant à première vue une analyse approfondie des démonstrations mathématiques sinon de la part d'Aristote, à tout le moins de ses suivants. Cependant, lorsque des exemples mathématiques sont employés, ceux-ci servent généralement à discuter de questions spécifiques qui ne remettent pas en question l'hypothèse générale, fortement soutenue par Aristote, selon laquelle tous les types d'arguments valides, y compris les preuves mathématiques, sont, ou peuvent être rendus de manière syllogistique.

Aristote a adopté, dans ses écrits, une attitude quelque peu hypocrite à l'égard du syllogisme : d'une part, il a entretenu une idée assez libérale de ce qu'est une déduction syllogistique alors même qu'il affirmait, d'autre part, que tout type de théorème mathématique pouvait être prouvé au moyen d'un syllogisme dit en B**A**rb**A**r**A** (ce type de syllogisme doit se comprendre comme ayant deux prémisses et une conclusion affirmatives et universelles : Tous les hommes sont mortels ; Or Socrate est un homme ; Donc Socrate est mortel). Cette double attitude à l'égard du syllogisme se reflète dans l'histoire de la logique dans la tradition occidentale, sans doute en bonne partie en raison de la longue, quoique subtile, persistance de l'emprise conceptuelle d'Aristote dans le domaine de la logique jusqu'au 16e siècle. Bien que la théorie du syllogisme, mais aussi plus généralement l'ensemble de la logique, soit devenue au cours du Moyen Âge une discipline articulée et profondément développée, la plupart des logiciens et des philosophes n'ont montré, jusqu'à la seconde moitié du 19e siècle, aucun intérêt particulier pour les démonstrations mathématiques et ont soutenu que le syllogisme traditionnel d'origine aristotélicienne était l'outil principal pour démontrer les théorèmes mathématiques. Seuls quelques-uns ont exprimé clairement dans leurs écrits une sorte de malaise à l'égard du syllogisme et ces affirmations furent le plus souvent suivies de propositions d'élargissement du syllogisme aristotélicien classique afin de mieux rééviger, non sans un certain empressement, le dogme qui s'était trouvé ainsi ébranlé. De leur côté, les mathématiciens de la même époque ne se souciaient pas de la doctrine logique traditionnelle d'origine aristotélicienne et ils n'hésitèrent pas, pour réaliser leurs preuves, à utiliser des arguments complexes n'ayant pas de forme syllogistique aristotélicienne canonique.

La raison pour laquelle, pendant assez longtemps, personne n'a soulevé le problème de l'adéquation de l'appareil logique pour rendre compte des preuves en mathématiques semble principalement résider dans la séparation effective des deux disciplines. Dans la tradition occidentale, depuis l'Antiquité, la logique et les mathématiques se sont en effet développées comme deux disciplines tout à fait indépendantes. D'ailleurs, suivant la division boécienne du savoir, la logique (considérée principalement comme une science du langage) fut enseignée dans ce que l'on appela le trivium, alors que l'enseignement des mathématiques (arithmétique et géométrie) fut prodigué dans le quadrivium.

L'abattement devant l'isolement existant entre ces deux solitudes ne se trouve nulle part exprimé avec plus de mélancolie (avec des pointes de frustration bien senties et aisément perceptibles) que dans un extrait d'un texte du mathématicien et logicien britannique Auguste De Morgan, paru le 18 juin 1868 dans *The Athenaeum* et reproduit en épigraphe par les auteurs de l'ouvrage lu pour vous : *We know that mathematicians care no more for logic than logicians for mathematics. The two eyes of exact sciences are mathematics and logic : the mathematical sect puts out the logical eye, the logical sect puts out the mathematical eye ; each believing that it sees better with one eye than with two. The consequences are ludicrous.*

Dans le captivant ouvrage fort bien documentée faisant l'objet de la présente analyse, les philosophes Paolo Mancosu et Massimo Mugnai tentent de reconstituer « les vicissitudes d'une conviction qui a prévalu pendant des siècles parmi les logiciens et les philosophes de la culture occidentale » (p. 1), à savoir la conviction que tous les théorèmes des Éléments d'Euclide et, plus généralement, tous les théorèmes mathématiques peuvent être prouvés au moyen du syllogisme aristotélicien traditionnel.

Pourquoi personne dans la tradition grecque ne s'est engagé en détail dans des reconstructions syllogistiques de preuves mathématiques malgré l'affirmation d'Aristote que toutes ces preuves étaient réductibles à des syllogismes ? Comment des générations de logiciens ont-ils pu affirmer que le syllogisme est le canon universel de la déduction valide, alors qu'ils n'étaient pas sûrs qu'il suffise ne serait-ce que pour le premier théorème d'Euclide ? Ou, s'ils savaient qu'il y avait des difficultés à le faire, pourquoi n'ont-ils pas compris l'importance de ce fait et n'ont-ils pas approfondi la question ? Pourquoi, avant le 17e siècle, dans l'Antiquité et au Moyen Âge, indépendamment de tout contact avec les mathématiques, les philosophes et les logiciens n'ont-ils pas pris conscience de l'importance des relations et des phrases relationnelles dans le discours ordinaire ainsi que dans le discours théologique et philosophique et, surtout, dans les arguments présentés en mathématiques, où elles jouent un rôle extrêmement important ? Sans apporter une réponse complète et définitive à ces questions, les auteurs parviennent à présenter clairement et intelligiblement les principales positions caractérisant ce débat et leurs interprétations y apportent au moins une réponse partielle convaincante.

L'étude est divisée en huit chapitres suivis d'une conclusion. Dans le chapitre 1, on examine attentivement la relation qui existait entre la logique et les mathématiques dans l'Antiquité et la période médiévale. Le chapitre 2 présente le traitement des déductions contenant des termes obliques par Guillaume d'Ockham (1285-1347) et Jean Buridan (1301-1358). Le chapitre 3 aborde l'émergence d'une analyse plus minutieuse des preuves mathématiques (principalement géométrique) à l'aide des outils de la logique syllogistique au cours de la Renaissance, notamment par Alessandro Piccolomini (1508-1578). Le chapitre 4 revient sur le problème des déductions obliques et analyse le traitement qu'ont fait de celles-ci plusieurs auteurs actifs au 17e siècle. Le chapitre 5 est consacré à la philosophie prékantienne en Allemagne, notamment chez Andreas Rüdiger (1673-1731) et Christian Wolff (1679-1754). Dans le chapitre 6 on approfondit la pensée de Kant spécifiquement en lien avec le sujet d'intérêt. Le chapitre 7 est consacré aux travaux de Bernard Bolzano (1781-1848) et, enfin, le chapitre 8 est centré sur la riche œuvre d'Auguste De Morgan (1806-1871).

Si le choix des penseurs dont la pensée est approfondie dans cet ouvrage peut initialement surprendre quelque peu, le tout tombe sous le sens dès lors que l'on examine le critère d'inclusion : on traite de tous les auteurs qui ont contribué au débat sur la question de savoir si les preuves mathématiques peuvent être syllogisées en mettant l'accent sur ceux qui ont innové sur le plan conceptuel et en accordant moins d'espace à ceux (parmi lesquels on retrouve bon nombre de penseurs bien connus occupant une place prépondérante dans l'histoire et la philosophie des mathématiques) qui ont simplement répété des points qui avaient déjà été soulevés par d'autres chercheurs avant eux.

Les auteurs nous font voir, en particulier, que les premières formes embryonnaires d'une logique des relations ont été développées au cours du 14e siècle par des philosophes comme Guillaume d'Ockham et Jean Buridan dans le cadre de leur discussion au sujet des déductions dans lesquelles des termes dits obliques (*terminus obliquus*) apparaissent. La distinction entre ces termes obliques et les termes dits droits (*terminus rectus*) était grammaticale et trouvait son origine dans les travaux des grammairiens latins de l'Antiquité. Les logiciens médiévaux savaient que les termes obliques impliquaient une référence à des relations et ont tenté de développer un traitement des termes obliques dans le cadre du syllogisme traditionnel. Cependant, étant donné leur faible intérêt pour les mathématiques, ils n'associaient pas les inférences obliques aux inférences habituellement effectuées par les mathématiciens lorsqu'ils prouvaient des théorèmes. Ce n'est qu'avec les travaux de Joachim Jungius (1587-1657) et de Johannes Vagetius (1633-1691), au 17e siècle, qu'il devient aussi flagrant qu'indéniable, soulignent les deux auteurs, que les déductions obliques nécessaires pour prouver des théorèmes mathématiques ne sont, pour la plupart, pas réductibles à des syllogismes. À partir du 17e siècle, les mathématiques et le symbolisme mathématique ont commencé à s'emparer, bien que lentement, du domaine de la logique, ce processus culminant avec les travaux de George Boole (1815-1864) et de Gottlob Frege (1848-1925).

Au milieu de cette effervescence, la question des inférences contenant des relations refait surface avec une certaine force dans la seconde moitié du 19e siècle au Royaume-Uni, notamment à partir des travaux du philosophe écossais Thomas Reid (1710-1796) qui a clairement affirmé que certaines inférences relationnelles ne peuvent être réduites à des syllogismes et que la doctrine syllogistique traditionnelle est impropre à représenter des preuves mathématiques. Les thèses de Reid ont ainsi déclenché une discussion dans laquelle Auguste De Morgan fut impliqué.

De Morgan a été l'un des derniers logiciens dans la tradition de la logique occidentale à tenter de transformer une démonstration mathématique (géométrique) en une chaîne de syllogismes et il a clairement reconnu que le syllogisme aristotélicien traditionnel n'était pas adapté à cette tâche. Il soutenait cependant que, correctement amélioré, le syllogisme peut encore être un outil de base pour démontrer des théorèmes mathématiques, l'amélioration consistant à considérer le syllogisme sous l'aspect de la combinaison des relations. Ainsi, ses vues particulières sur le syllogisme ont conduit De Morgan à porter son attention sur le concept général de relations et à en reconnaître pleinement l'importance. En outre, il a fait le premier pas substantiel vers la construction d'une logique des relations, une théorie qui a été développée plus tard par Charles Sanders Peirce (1839-1914) et Ernst Schröder (1841-1902).

N'ayant pas pu trouver, après les tentatives réussies de De Morgan en matière de logique des relations, d'autres tentatives significatives de syllogiser des théorèmes géométriques, les auteurs y ont vu un point d'arrêt naturel pour leur récit et leur étude. Ils ne passent pas pour autant sous silence le fait que depuis les travaux de De Morgan – grâce notamment à Charles Sanders Peirce, Ernst Schröder, Gottlob Frege, Giuseppe Peano et Bertrand Russell – le syllogisme a perdu, pour les logiciens et les philosophes, une partie de son attrait particulier et a été relégué au rang de petite partie d'une théorie plus générale de la logique.

Mancosu et Mugnai prennent grand soin de souligner qu'il faut se garder de commettre l'erreur de croire que dès qu'une théorie appropriée de la quantification et des inférences relationnelles a été développée par les logiciens mathématiciens, cela a immédiatement entraîné une reconnaissance générale de l'insuffisance des syllogismes pour rendre compte de la logique du raisonnement mathématique. Ils nous font voir, exemples à l'appui (notamment l'intriguant cas de la Allgemeine Erkenntnislehre du philosophe allemand Moritz Schlick, le maître à penser du Cercle de Vienne) que de nombreux ouvrages de logique publiés dans la seconde moitié du 19e siècle et dans la première moitié du 20e ont continué à présenter des arguments défendants l'idée que toutes les connaissances scientifiques, et les mathématiques en particulier, peuvent être présentées de manière syllogistiques.

En définitive, l'ouvrage soumis à l'analyse représente un remarquable travail d'érudition. Rédigée dans une prose tout à la fois limpide, accessible, précise et vivante, cette monographie – compte tenu, pour le sujet traité, de sa large portée obtenue sans rien sacrifier quant à la profondeur d'analyse – est sans pareille. On appréciera en particulier l'important nombre de citations d'auteurs anciens méconnus, mises dans le contexte qui en révèle le sens et suivies d'interprétations et d'analyses bien ficelées et convaincantes.

Les auteurs font preuve, tout au long de cet ouvrage, d'une connaissance approfondie et d'une impressionnante maîtrise tant d'une abondance de sources primaires assorties d'informations contextuelles pertinentes (parmi lesquelles on retrouve un bon nombre d'auteurs connus tels qu'Aristote, Avicenne, Bernard Bolzano, Emmanuel Kant, Gottfried Wilhelm Leibniz, Augustus De Morgan, John Stuart Mill, mais aussi plusieurs penseurs moins connus tels que Albert de Saxe, Jean Buridan, Christophorus Clavius, Guillaume d'Ockham, Alessandro Piccolomini, Proclus, Marcus Fabius Quintilianus, Thomas Reid, Andreas Rüdiger, Girolamo Saccheri, Christian Wolff, etc.) que de sources secondaires relativement récentes (philosophes et logiciens R. Lanier Anderson, E. Jennifer Ashworth, Lewis White Beck, Jonathan Barnes, Alonzo Church, Michael Friedman, Jaakko Hintikka, Henry Mendell, Daniel D. Merrill, Gabriel Nuchelmans, Paul Thom, etc.) ou plus anciennes.

Il va sans dire qu'avancer une définition de ce qu'est un syllogisme est une question délicate qui soulève de profonds problèmes philosophiques et logiques. C'est d'autant plus malaisé dans le présent contexte que nombre des auteurs auxquels Mancosu et Mugnai réfèrent dans cet ouvrage n'ont pas laissé d'explications approfondies sur leur conception du syllogisme. Notons, toutefois, que les auteurs sont habilement parvenus à esquiver ce problème la plupart du temps et, rarement, l'angle par lequel ils abordent leur sujet d'intérêt a-t-il nécessité d'eux qu'ils reconstruisent la conception précise du syllogisme défendue par l'un ou l'autre des penseurs considérés.

Que le lecteur intéressé soit toutefois averti : bien que les auteurs aient fait de leur mieux pour introduire et expliquer les concepts qui pourraient être peu familiers au lecteur (surtout ceux provenant davantage des disciplines relevant des mathématiques que de celles relevant de la philosophie ou de la logique dans son acception la plus large), on présuppose néanmoins que le lecteur a déjà une connaissance assez fine des syllogismes aristotéliciens et du style de preuve d'Euclide dans *Les Éléments*.