

Les pavages apériodiques du plan et le *einstein*

Frédéric Morneau-Guérin

67E ÉDITION DU CONGRÈS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

14 octobre 2023



FIGURE 1 – Bloc d'ocre de la grotte de Bomblos, Afrique du Sud.

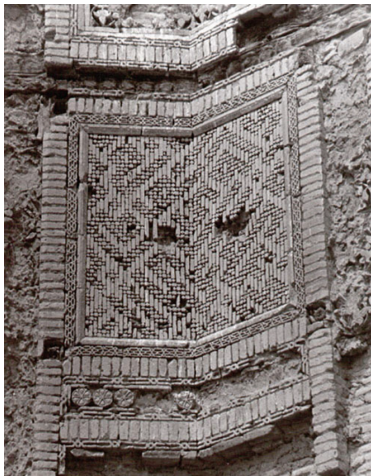


FIGURE 2 – Shatranji Kufi au minaret de Mas'ud III à Ghazni, Afghanistan.



FIGURE 3 – Panneau de mosaïque *zillij* aux palais nasrides de l'Alhambra.



FIGURE 4 – Panneau de pierre moghole incrusté dans la tombe d'I'timad al-Daula à Agra, en Inde.



FIGURE 5 – Dôme muzaffaride de la mosquée du Vendredi à Yazd, Iran.



FIGURE 6 – Drawing no. 18. 1938. M. C. Escher.



FIGURE 7 – *Reptiles*. 1943. M. C. Escher.
Lithographie.



FIGURE 8 – *Symmetry drawing A*. 1922. M. C. Escher

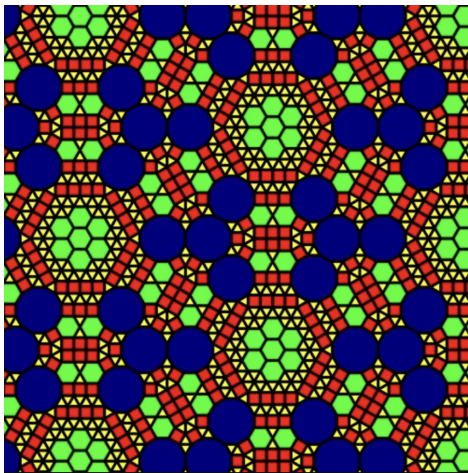


FIGURE 9 – Un exemple de pavage (mathématique) du plan.

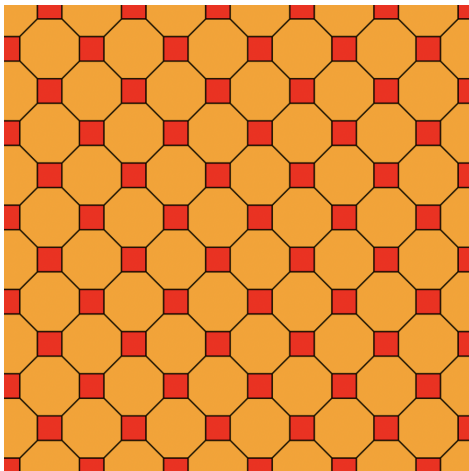


FIGURE 10 – Un exemple de pavages polyédrique du plan.

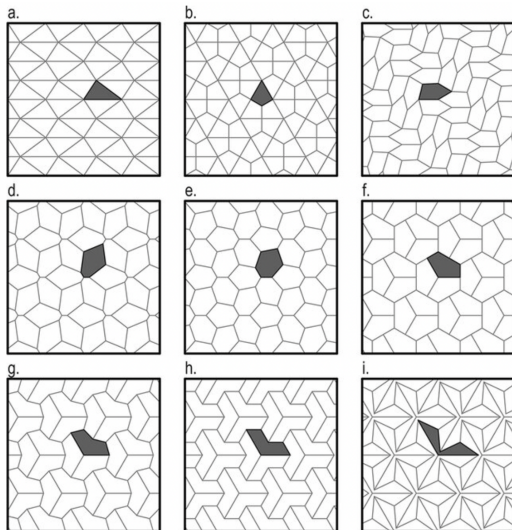


FIGURE 11 – Neuf exemples de pavages monoédriques du plan.



FIGURE 12 – Le “théorème” de l’épicier.

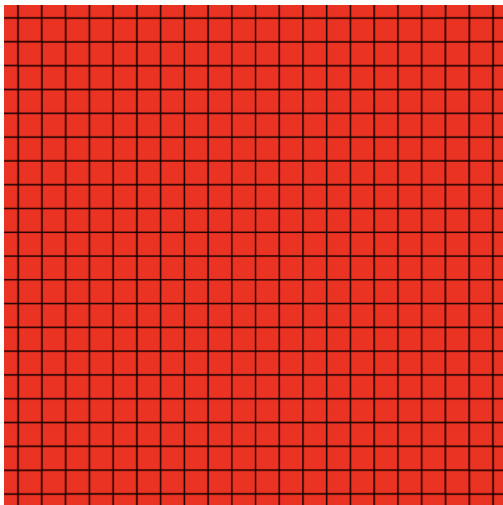


FIGURE 13 – Pavage monoédrique du plan par des quadrilatères réguliers.

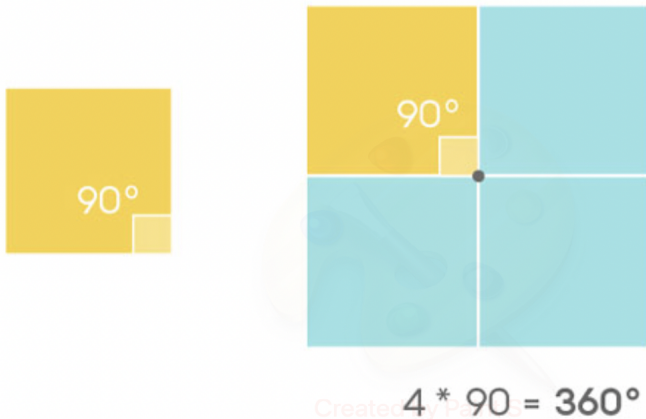


FIGURE 14 – Pavage monoédrique du plan par des quadrilatères réguliers.

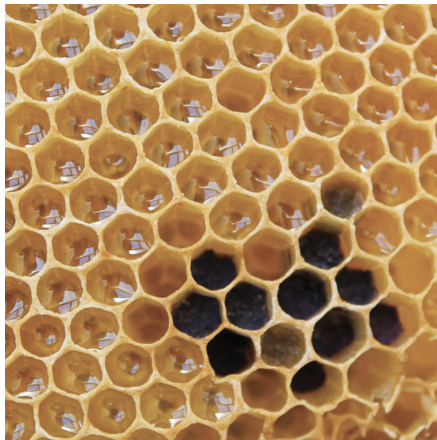


FIGURE 15 – Le “théorème” du nid d’abeille.

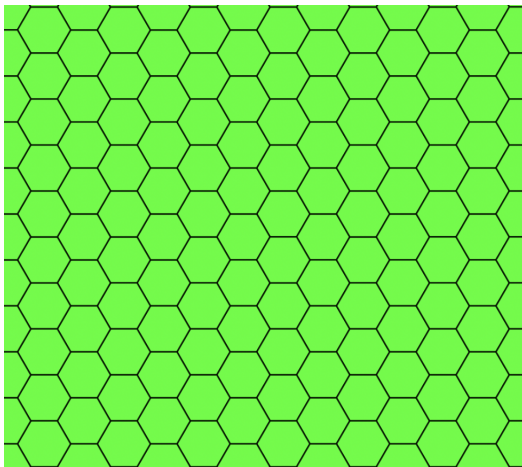


FIGURE 16 – Pavage monoédrique du plan par des hexagones réguliers.

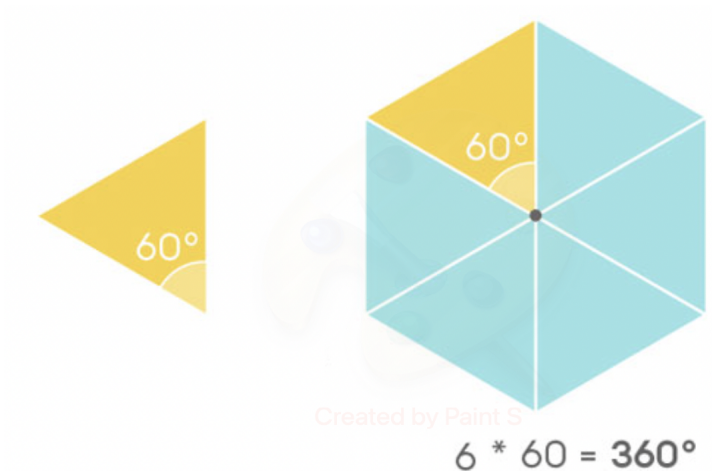


FIGURE 17 – Pavage monoédrique du plan par des hexagones réguliers.

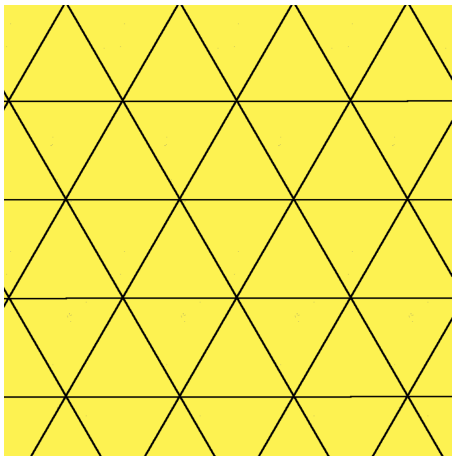


FIGURE 18 – Pavage monoédrique du plan par des triangles réguliers.

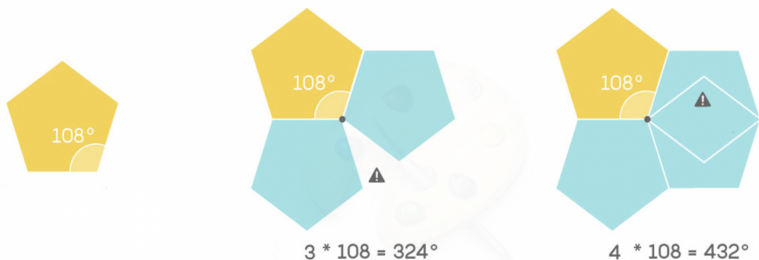


FIGURE 19 – Peut-on réaliser un pavage monoédrique du plan avec des pentagones réguliers ?

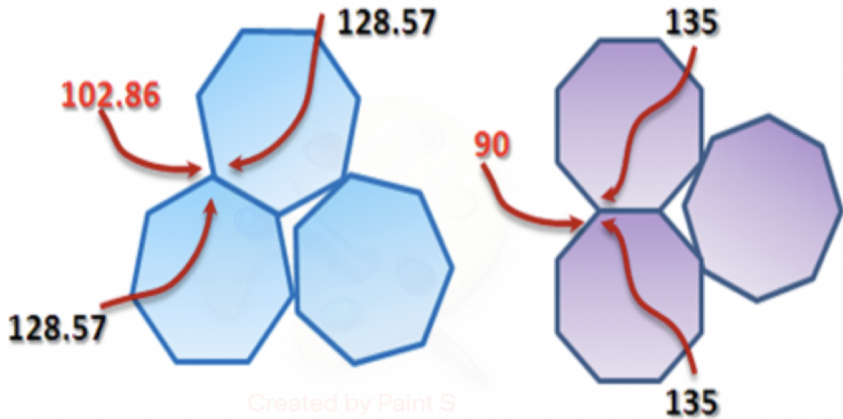


FIGURE 20 – Y a-t-il d'autres polygones réguliers admettant un pavage monoédrique du plan ?



FIGURE 21 – Pavage monoédrique du plan par des triangles non réguliers.



FIGURE 22 – Pavage monoédrique du plan par des quadrilatères non réguliers convexes.

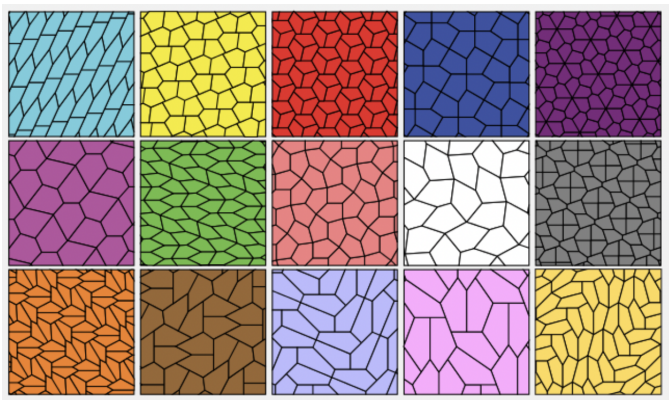


FIGURE 23 – Les quinze types de pentagones convexes admettant un pavage monoédrique du plan.

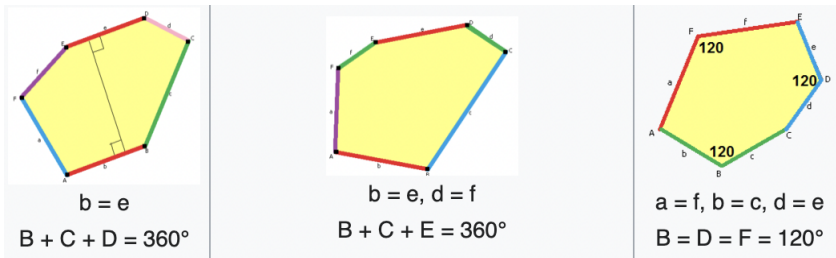


FIGURE 24 – Les trois types d'hexagones convexes admettant un pavage monoédrique du plan. Chacun possède des variations paramétriques à l'intérieur d'une symétrie fixe.

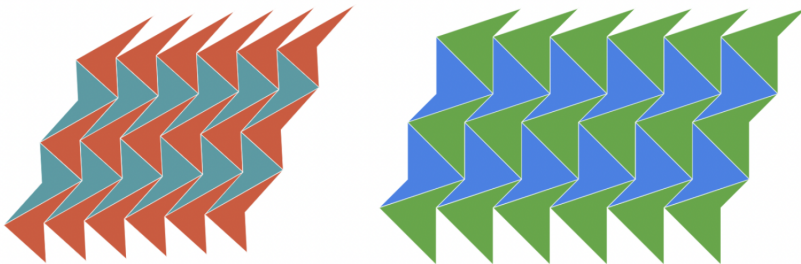


FIGURE 25 – Deux pavages monoédriques du plan par des quadrilatères non réguliers non convexes.

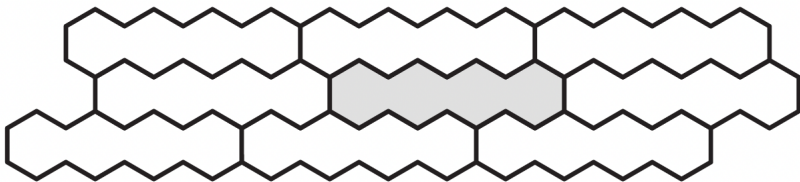


FIGURE 26 – Il n'y a pas de limite au nombre de côtés qu'un polygone non convexe peut avoir tout en admettant un pavage monoédrique du plan.

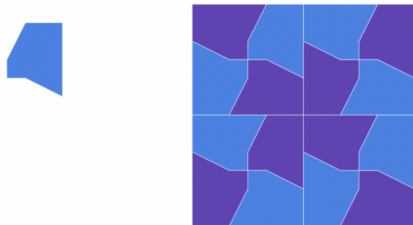


FIGURE 27 – Exemple d'un pavage monoédrique présentant des symétries de type *rotation*.

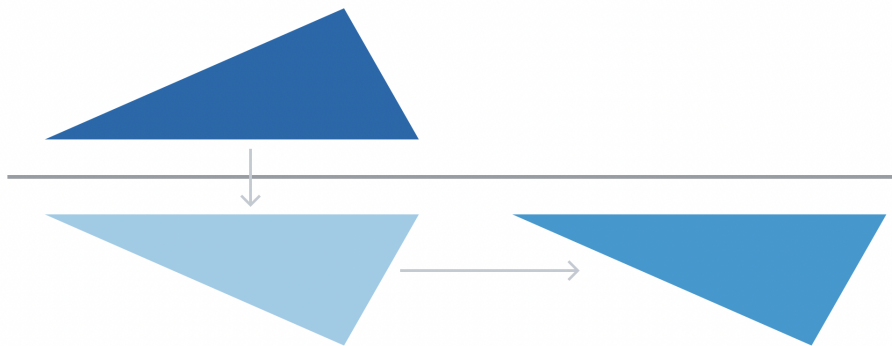


FIGURE 28 – La *réflexion glissée* est la composition d'une réflexion par rapport à un axe et d'une translation parallèle à l'axe de réflexion.

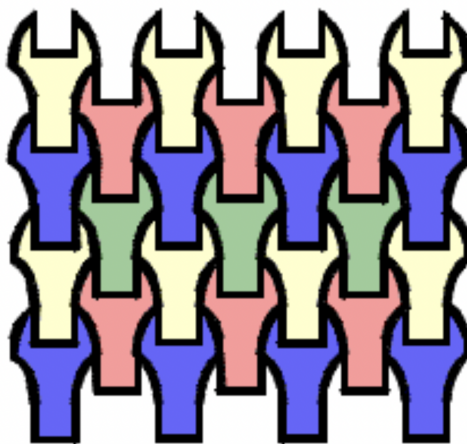


FIGURE 29 – Exemple d'un pavage monoédrique présentant des symétries de type *réflexion glissée*.

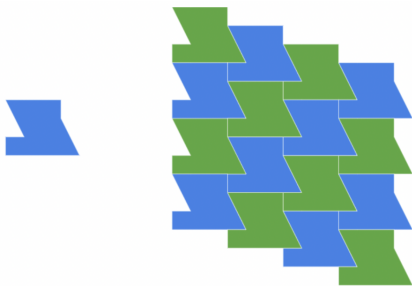


FIGURE 30 – Exemple d'un pavage monoédrique présentant des symétries de type *translation*.

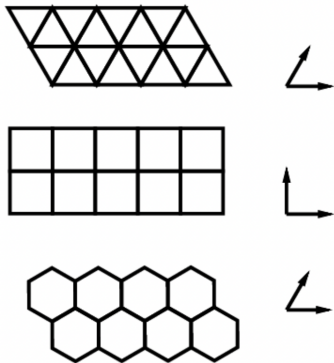


FIGURE 31 – Propriété de périodicité de certains pavages du plan.

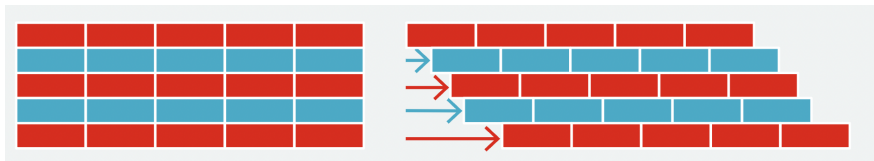


FIGURE 32 – Exemple de façon de briser la périodicité.

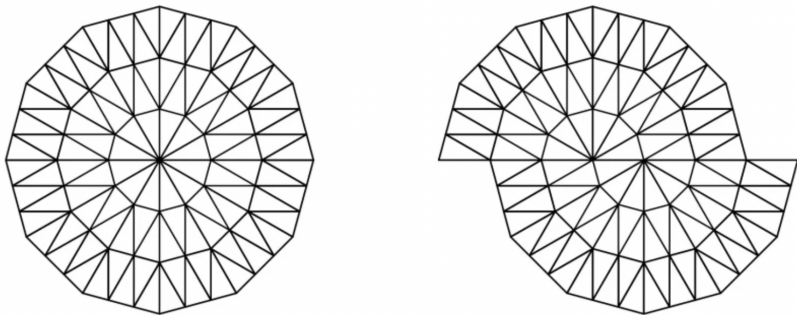


FIGURE 33 – Deux exemples de pavages non périodiques du plan.

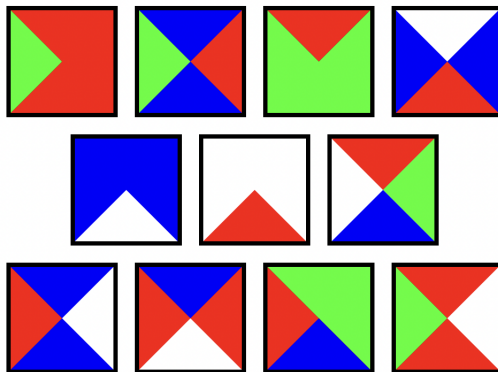


FIGURE 34 – Ensemble de 11 dominos de Wang.

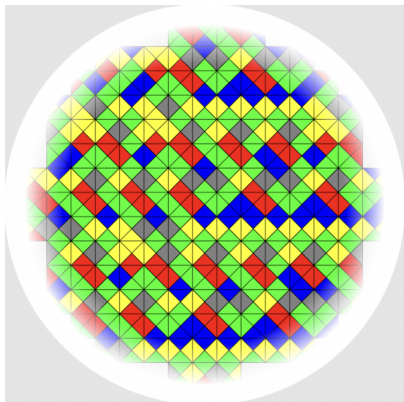


FIGURE 35 – Amorce d'un pavage avec ces dominos de Wang

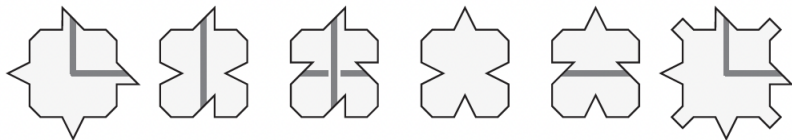


FIGURE 36 – Les 6 tuiles de Raphael M. Robinson (1971).

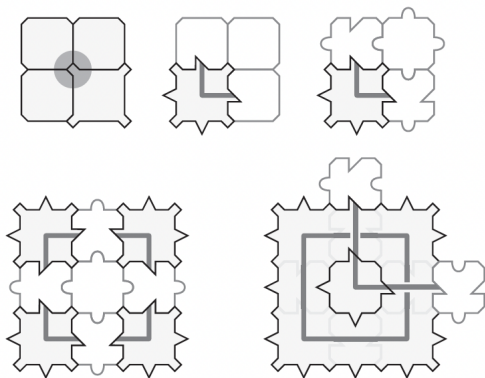


FIGURE 37 – La preuve de l'apériodicité repose sur la démonstration que les tuiles forment des blocs qui eux-mêmes s'emboîtent comme les tuiles, à plus grande échelle, formant des blocs encore plus grands, *ad infinitum*.

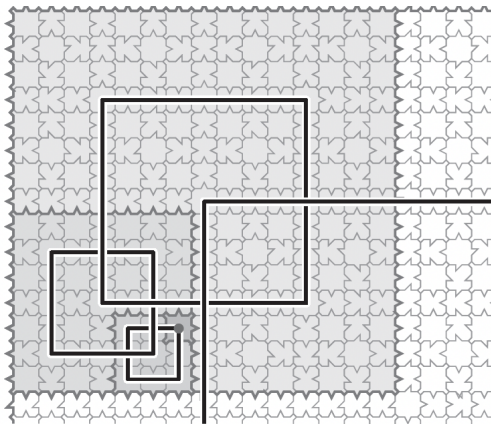


FIGURE 38 – Construction de l'une des innombrables tessellations admises par les tuiles de Robinson comme une suite dénombrable de choix de plus en plus importants.

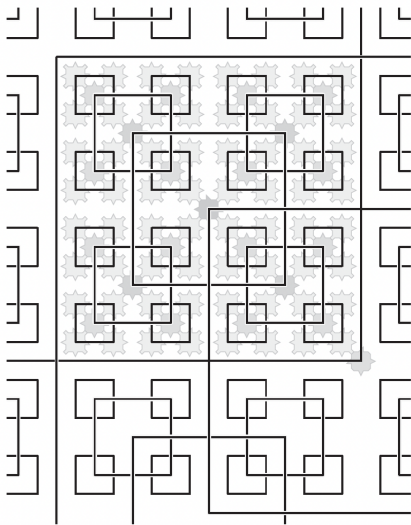


FIGURE 39 – Une hiérarchie de carrés : les tuiles de Robinson n'admettent pas de périodicités. Notez les systèmes complémentaires d'embranchements.

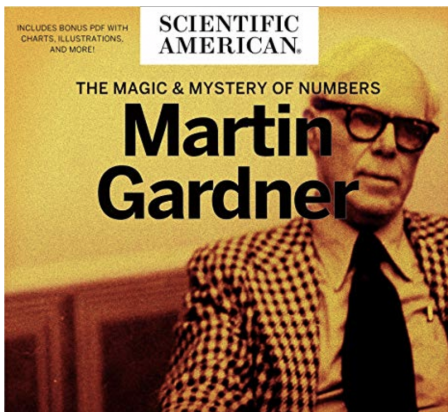


FIGURE 40 – Martin Gardner (1914-2010), chef de pupitre de la célèbre chronique *Mathematical Games* publiée dans les pages du magazine de vulgarisation *Scientific American* entre 1956 et 1981

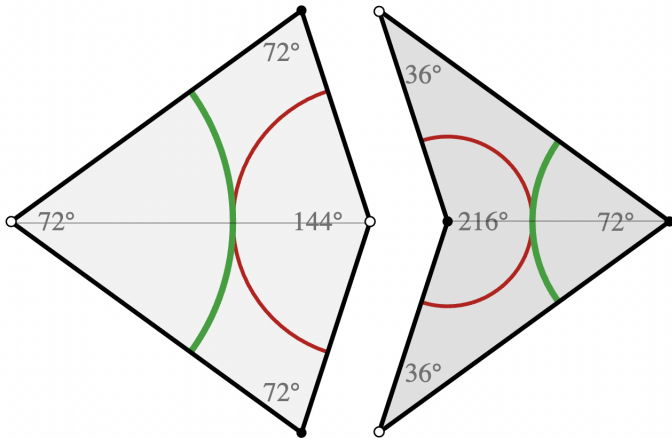


FIGURE 41 – *Kite* et *Dart*, les 2 tuiles de Sir Roger Penrose (1977).

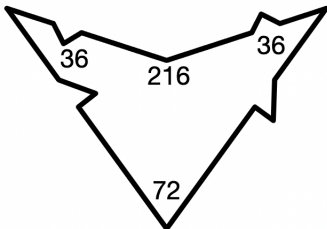
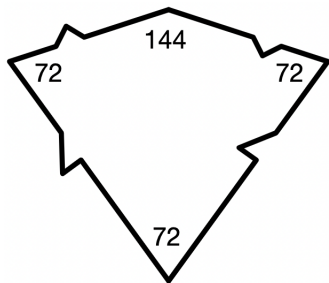


FIGURE 42 – *Kite* et *Dart*, version dentelée.

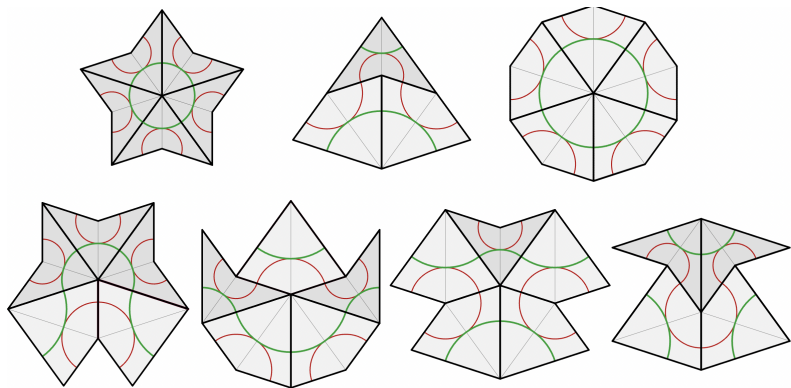


FIGURE 43 – Les sept façons dont *Kite* et *Dart* peuvent s'assembler.

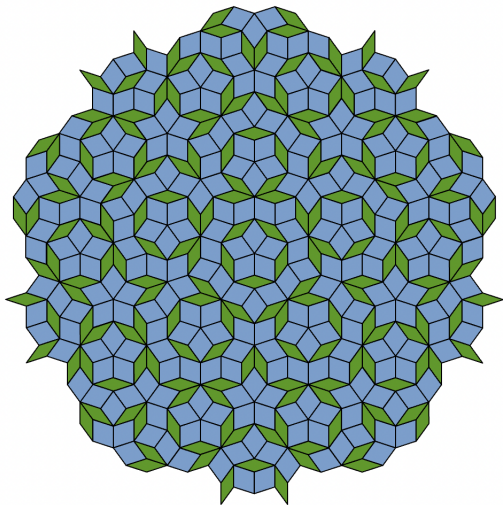


FIGURE 44 – Amorce d'un pavage apériodique du plan avec *Kite* et *Dart*.



FIGURE 45 – Sir Roger Penrose sur un planché pavé avec *Kite* et *Dart*.

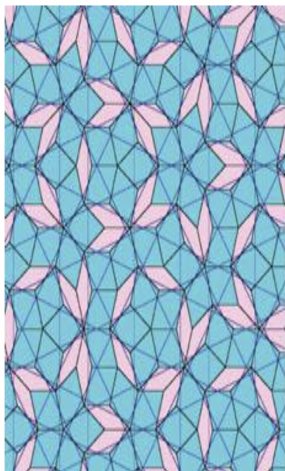


FIGURE 46 – Le pavage de Penrose comme modèle de quasi-cristaux. La découverte des quasi-cristaux en 1982 valu à son auteur, l'israélien Dan Shechtman, le prix Nobel de chimie 2011.

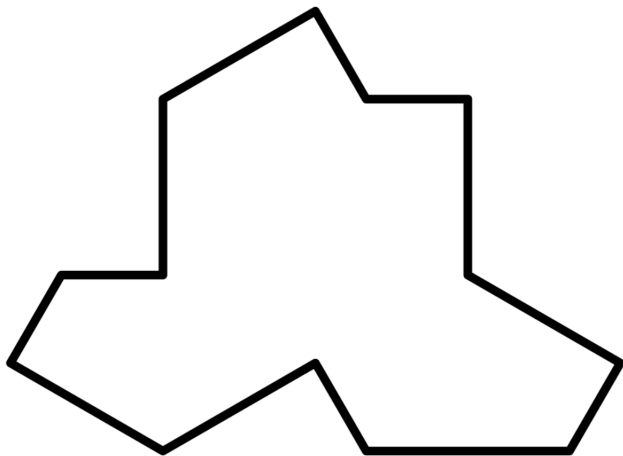


FIGURE 47 – Le chapeau, devenu célèbre le 20 mars 2023.



FIGURE 48 – Le problème *ein stein*



FIGURE 49 – David Smith, technicien en imprimerie britannique à la retraite et amateur de puzzles et de fractales.

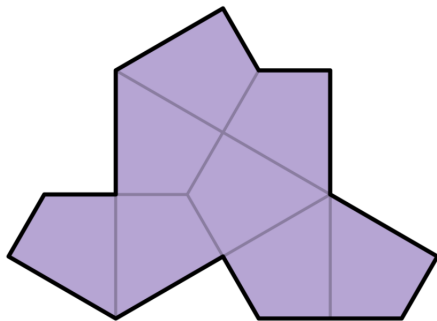


FIGURE 50 – Le chapeau comme assemblage de huit *kites*.



FIGURE 51 – Craig S. Kaplan, informaticien à l'université de Waterloo au Canada.



FIGURE 52 – Joseph Samuel Myers, ingénieur logiciel à Cambridge, en Angleterre, titulaire d'un doctorat en combinatoire.



FIGURE 53 – Chaim Goodman-Strauss, mathématicien au Musée national des mathématiques et à l'Université de l'Arkansas.

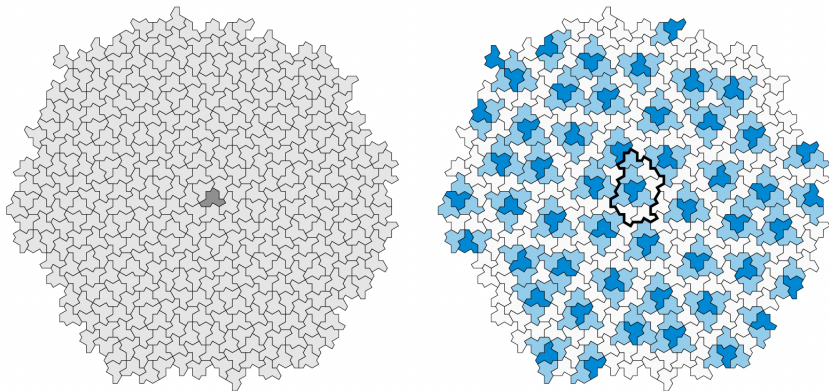


FIGURE 54 – Une amorce de pavage générée par ordinateur avec 392 chapeaux (à gauche), disposés en dix anneaux concentriques autour d'un chapeau central ombré.

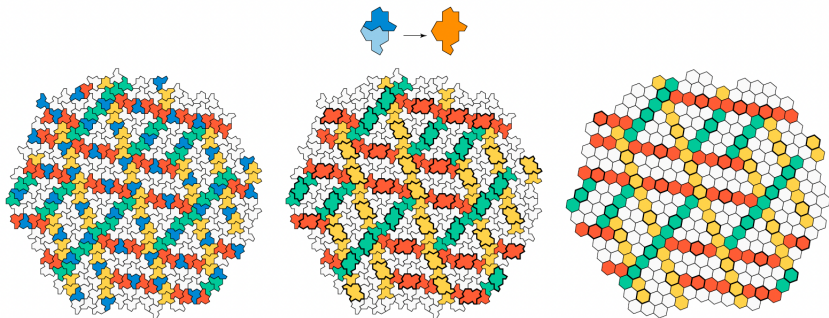


FIGURE 55 – De longues chaînes de tuiles orientées de manière similaire traversent des tuiles réfléchies dans six directions (à gauche). Nous pouvons fusionner chaque tuile réfléchi avec l'une de ses voisines dans sa chaîne (au centre), ce qui donne une structure qui peut être placée en correspondance biunivoque avec un patch d'hexagones réguliers (à droite).

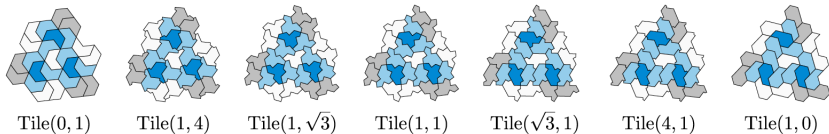


FIGURE 56 – Les deux longueurs d'arêtes du polykite à chapeau peuvent être manipulées indépendamment, ce qui permet d'obtenir un continuum de formes.

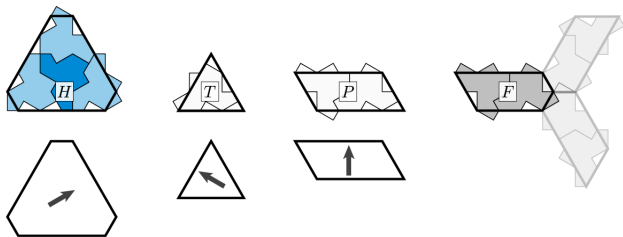


FIGURE 57 – Les métatuyaux H, T, P et F (en haut), construites en simplifiant les limites des groupes de chapeaux. Nous marquons les métatuyaux H, T et P par des flèches lorsque cela est nécessaire (en bas), afin de distinguer des orientations par ailleurs symétriques.

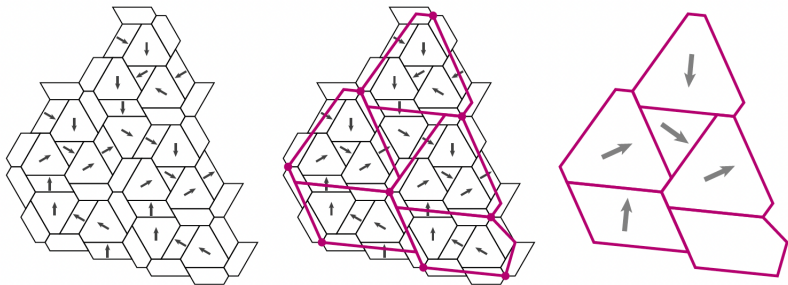


FIGURE 58 – Construction d'une famille de supertiles à partir d'une parcelle de métatiles. Le patch de métatiles à gauche peut être utilisé pour localiser les sommets clés des supertiles, marqués par des points rouges dans le diagramme central. Ces points, ainsi que les contraintes sur les angles, déterminent entièrement les formes des supertiles, qui ne sont pas simplement des copies à l'échelle de leurs progéniteurs. Sur la droite, les supertiles sont marqués par des flèches indiquant leur orientation.

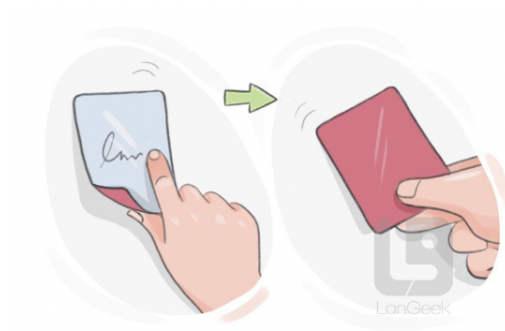


FIGURE 59 – *Ein stein ou Zwei Steine?*

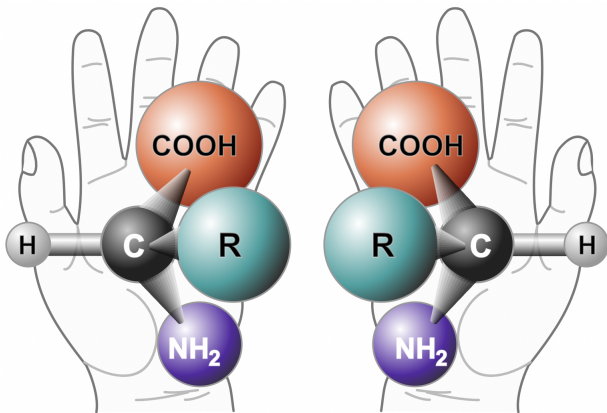


FIGURE 60 – En chimie, un composé est dit *chiral* — du grec $\chi\epsilon\iota\rho$ (kheir) qui signifie *main* — s'il n'est pas superposable à son image dans un miroir plan.

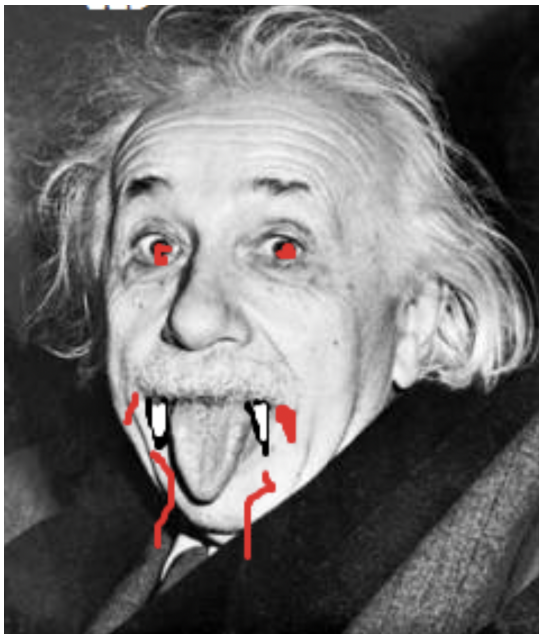


FIGURE 61 – L'*ein stein vampire*

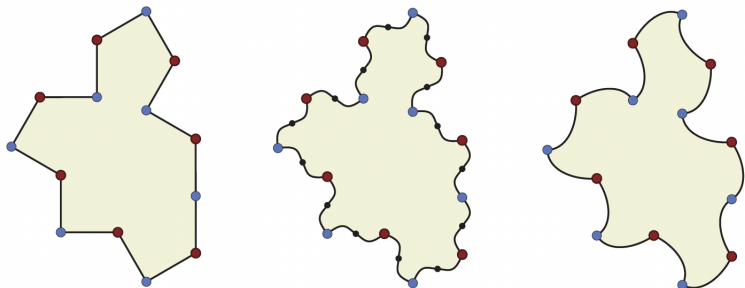


FIGURE 62 – Le polygone à 14 côtés $\text{Tile}(1, 1)$, illustré à gauche, est une monotuille apériodique faiblement chirale. En modifiant ses bords, comme indiqué au centre et à droite par exemple, on obtient des monotuelles apériodiques strictement chirales appelés *Spectres* qui n'admettent que des pavages non périodiques, même lorsque les réflexions sont autorisées.

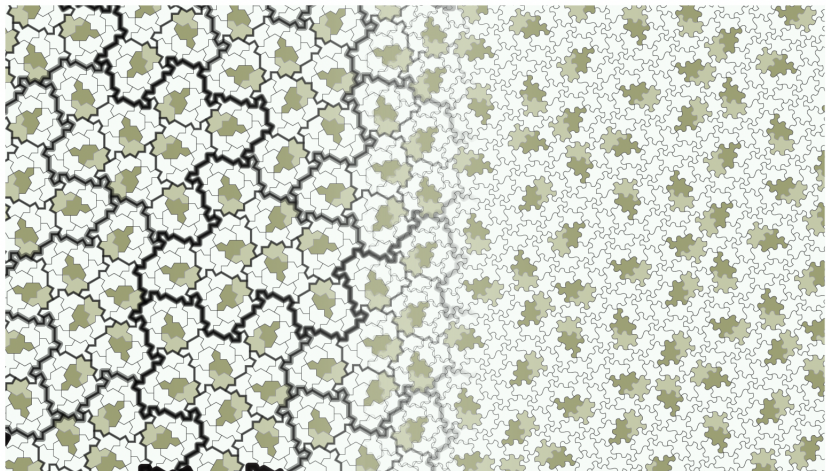


FIGURE 63 – Une amorce d'un pavage non périodique par Spectres. À gauche, les tuiles sont représentées comme des copies de $\text{Tile}(1, 1)$. À droite, les limites des tuiles sont modifiées d'une manière similaire à la figure précédente.

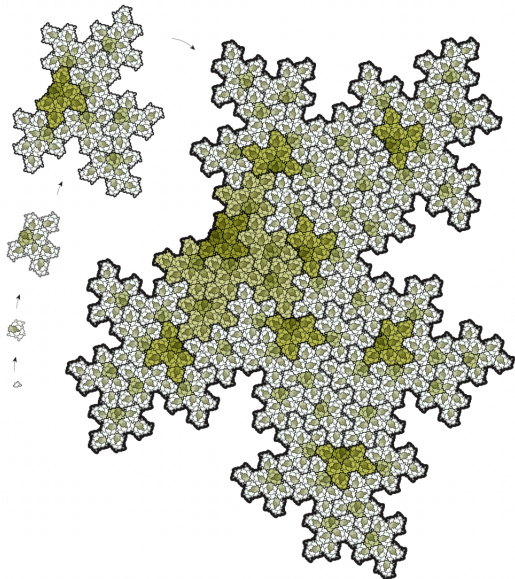


FIGURE 64 – Cinq niveaux de supertuiles créés en appliquant les règles de substitution indiquées précédemment.

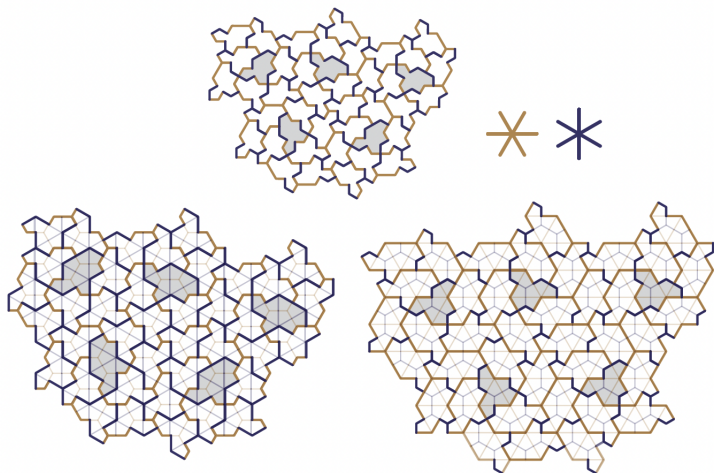


FIGURE 65 – Les pavages monoédriques avec $\text{Tile}(1,1)$ sont combinatoirement équivalents aux pavages avec le chapeau et sa réflexion.

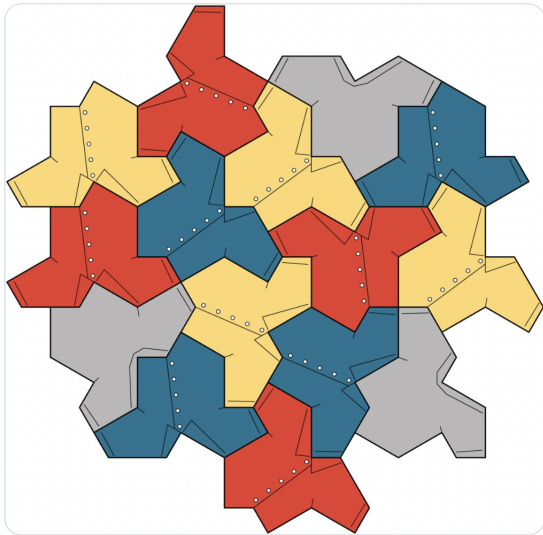


FIGURE 66 – Terminons comme nous avons débuté... par un peu d'art.

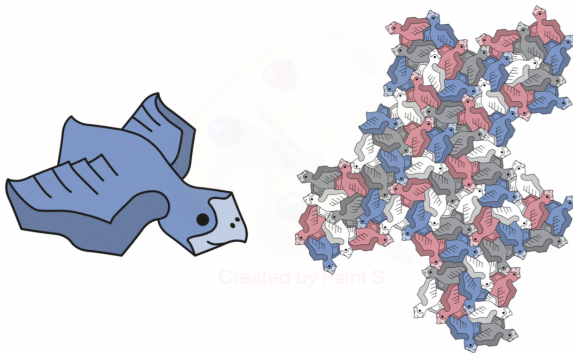


FIGURE 67 – Terminons comme nous avons débuté... par un peu d'art.

Références

- Gardner, M. (1977, janvier). Mathematical Games : Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American*, 236(1). 110-121.
- Gardner, M. (1989). Penrose Tiling. Ch. 1 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... And the Return of Dr. Matrix*, W. H. Freeman & Co.
- Gardner, M. (1989). Penrose Tiling II. Ch. 2 dans *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers... And the Return of Dr. Matrix*, W. H. Freeman & Co.
- Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S., & Goodman-Strauss, C. (2023). An aperiodic monotile. *arXiv preprint arXiv :2303.10798*.
- Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S., & Goodman-Strauss, C. (2023). A chiral aperiodic monotile. *arXiv preprint arXiv :2305.17743*.

Merci

A close-up photograph of a black pen with a gold nib writing the word "Merci" in a cursive script on a white surface. The pen is positioned on the right side of the word, with the nib pointing towards the end of the final letter.