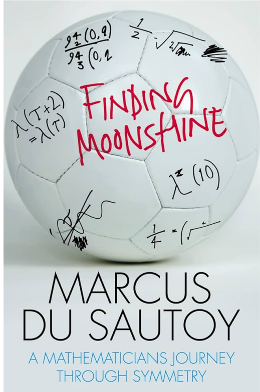
From the bookshelf of . . .

Frédéric Morneau-Guérin

This MathemAttic *feature brings attention to books of potential interest to the readers. Some of these will be reviews whereas others will be hearty recommendations from the contributors. If you have a book related to mathematics that would be of interest to secondary school students and/or teachers, feel welcome to send along a submission to* `MathemAttic@cms.math.ca`.

Finding Moonshine : A Mathematician's Journey Through Symmetry
by Marcus du Sautoy
ISBN-13: 978-0007214617
Published by Fourth Estate, 2009.



Il est indubitable que la nature regorge de mystérieuses manifestations de symétries. À titre d'exemple, dans le monde de la chimie physique, il appert que le diamant tire sa force de l'arrangement hautement symétrique des atomes de carbone qui le composent. Autre exemple, issu celui-là du monde vivant : parmi l'infinité de structures que les abeilles pourraient exploiter pour emmagasiner une quantité donnée de miel, c'est le treillis hexagonal isométrique (un motif hautement symétrique) qu'elles emploient pour leurs alvéoles qui minimise la quantité de cire nécessaire; un fait que les abeilles semblent savoir d'instinct depuis la nuit des temps, mais qui n'a été confirmé par la science qu'à l'aube du vingt-et-unième siècle. Considérant ce qui précède, il n'est probablement pas fortuit si l'esprit humain semble aussi intrigué et attiré par tout ce qui incarne un aspect de symétrie. Notre cerveau semble en effet programmé pour non seulement remarquer, mais même rechercher l'ordre, la régularité et, par voie de conséquence, la symétrie. Notre inclinaison naturelle à apprécier, rechercher, voire générer de la symétrie s'exprime depuis des temps immémoriaux dans les arts visuels et vivants, l'architecture, la poésie et la musique. La redondance et la répétition de motifs sont, quant à eux, des éléments clés de l'apprentissage du langage humain de même que de la communication efficace et fluide.

Vu l'importance que revêt la symétrie tant dans l'univers matériel que dans l'univers abstrait des mathématiques, le professeur pour la compréhension de la science à l'Université d'Oxford Marcus Du Sautoy a jugé bon d'employer son immense talent de vulgarisateur à démystifier ce concept aussi fondamental et omniprésent que difficile à cerner. On lui en est reconnaissant, car l'ouvrage qui en a résulté, *Finding Moonshine : A Mathematician's Journey Through Symmetry*, est un splendide tourne-page regorgeant d'informations historiques et mathématiques captivantes rendues accessibles et compréhensibles pour un lectorat composé de non-spécialistes cultivés. Paru en 2008, ce livre unique en son genre nous fait parcourir plusieurs siècles de développement de théories mathématiques avancées avec, en filigrane, une réflexion personnelle sur la vie du mathématicien, de l'éveil à cette discipline jusqu'à l'espoir de conquête des plus hauts sommets avec tous les risques et les écueils auxquels cela expose.

Du Sautoy nous fait voir d'entrée de jeu que la notion de symétrie a longtemps semblé évanescente. Déjà chez les Grecs de l'Antiquité, tous semblaient en avoir une certaine conception intuitive, mais personne n'était en mesure de mettre le doigt sur une définition entièrement convenable. La difficulté à saisir ce dont il s'agit se reflète d'ailleurs jusque dans le mot lui-même. Le substantif "symétrie" tire en effet son origine du grec ancien. Il s'agit d'une synthèse des mots $\sigma\upsilon\nu$, qui signifie *même*, et $\mu\epsilon\tau\rho\omega\nu$, (metron), qui signifie *mesure*. Juxtaposés, ces deux mots expriment donc l'idée de différents éléments "de même mesure". Or, s'il semble conforme à l'intuition qu'un polygone est plus symétrique lorsque tous ses côtés sont de mêmes mesures, ce constat élude la question davantage qu'il n'y répond. Quand bien même on disposerait d'un critère universel nous permettant de dire que tel objet est *plus symétrique* que tel autre ou moins symétrique que tel autre encore (et rien n'indique que ce concept de *même mesure* soit applicable dans tous les contextes), cela ne nous aiderait en rien à répondre à la question quant à savoir ce qu'est au fond la symétrie.

Petit à petit, nous dit l'auteur, on finit par saisir que, d'une certaine manière, une symétrie est quelque chose d'actif et non de passif. En effet, on peut considérer une symétrie comme une action pouvant être effectuée sur un objet et qui le laisserait identique, plutôt que comme une propriété de l'objet lui-même. Un triangle équilatéral, par exemple, possède six symétries : trois symétries axiales et trois symétries de rotations. Si vous fermez vos yeux et que j'effectue une rotation de $120°$, $240°$ ou $360°$ autour de l'orthocentre, ou encore une réflexion par rapport à l'une ou l'autre des médiatrices de ses côtés, voire un enchanement de l'une ou l'autre de ces actions, alors, lorsque j'aurai terminé et que je vous inviterai à rouvrir les yeux, vous seriez incapable de déterminer avec certitude si une action a été posée ou si on a plutôt laissé le triangle inchangé tant les portraits *ex ante* et *ex post* se ressemblent.

À la suite d'une épiphanie soudaine survenue dans la première moitié du 19e siècle chez un jeune révolutionnaire français à l'approche de sa mort aussi tragique que prématurée, la vraie nature de la notion de symétrie se révéla enfin. De ce moment Eureka, admirablement bien décrit par Du Sautoy, surgit un nouveau langage celui de la théorie des groupes permettant d'en capturer la véritable signification. Au cur de cette vision nouvelle et géniale se trouve la reconnaissance du fait qu'il ne faut pas se contenter de regarder les symétries individuelles d'un objet. Il faut plutôt aborder ces symétries comme une collection qu'il convient d'appeler un *groupe*. Ce sont en effet les interactions unissant les diverses symétries entrant dans la composition du *groupe de symétrie* d'un objet qui synthétisent les caractéristiques essentielles de la symétrie d'un objet.

Il n'avait pas échappé aux Grecs de l'Antiquité que tout nombre naturel peut être factorisé en produit de nombres dits *premiers* (à savoir des nombres indivisibles en ceci qu'ils n'admettent que deux diviseurs, soit 1 et eux-mêmes) et que ces nombres premiers sont en quelque sorte les éléments constitutifs de tous les autres nombres naturels. Le développement de la théorie des groupes qui offre un langage permettant de concevoir puis de nommer, et par conséquent, d'étudier la symétrie comme jamais auparavant elle ne l'avait été rendit possible la réalisation d'un fait étonnant d'un haut niveau de subtilité : les groupes de symétries, tout comme les nombres naturels, peuvent être factorisés encore et encore en groupes de symétries plus petits jusqu'à obtenir des groupes de symétries qui sont en quelque sorte, à l'image des nombres premiers, élémentaires puisqu'indivisibles. Ces groupes de symétries indivisibles, comme les nombres premiers, ont pour caractéristique essentielle d'être les éléments constitutifs à partir desquels tous les groupes de symétries peuvent être construits. Il fallut un temps considérable et des efforts intellectuels soutenus à la communauté mathématique pour appréhender ce concept d'indivisibilité s'appliquant en matière de symétrie. Mais lorsqu'ils y parvinrent enfin, l'opportunité de produire une sorte de *tableau périodique* de la symétrie se profila. De la même manière que le tableau périodique des éléments est une classification systématique rassemblant les constituants élémentaires de toute substance, un éventuel Atlas des groupes de symétrie indivisible listerait *tous* (sinon exhaustivement du moins en compréhension) les groupes de symétries primitifs entrant dans les compositions des groupes de symétries composés.

Nous l'avons dit, l'esprit humain semble en quête d'ordre et de régularité. Catégoriser, classifier et ordonner sont des processus mentaux auxquels nous nous prêtons tous avec une certaine aisance et avec un enthousiasme certain. Il arrive cependant que la nature refuse de se plier à nos dispositions naturelles vers l'ordre. C'est notamment le cas dans le domaine de la symétrie. Alors qu'au milieu du 19e siècle la classification des éléments constitutifs de la symétrie allait plutôt bon train, le mathématicien français mile Mathieu mit au jour, presque par inadvertance, cinq groupes de symétries indivisibles plutôt insolites. Alors que tous les groupes indivisibles découverts précédemment s'étaient avérés appartenir à une famille infinie de groupes partageant certaines propriétés communes, les cinq groupes dont l'existence fut révélée par Mathieu ne semblaient ni appartenir à une famille connue ni suggérer l'existence d'une nouvelle famille infinie ayant jusque-là échappé à l'attention. Tout indiquait plutôt qu'ils constituaient une sorte d'archipel isolé dans du mystérieux monde de la symétrie. Afin de souligner le caractère épisodique de ces groupes, on les qualifia de *sporadiques*. Plusieurs décennies s'écoulèrent sans que l'on puisse déterminer clairement o logeaient les groupes de Mathieu dans l'édifice mathématique. Puis, relate Du Sautoy, en 1954, à l'occasion du Congrès international des mathématiciens d'Amsterdam, un appel fut lancé pour dresser une liste exhaustive de ces groupes dits sporadiques. Ainsi s'amorça une aventure épique, unique dans l'histoire des mathématiques, qui devait durer trente ans.

Les explorateurs se divisèrent naturellement en deux camps reflétant des philosophies distinctes. Le premier camp, composé d'une troupe bigarrée de mathématiciens anticonformistes à la tête de laquelle se trouvait le coloré et charismatique John Horton Conway, se spécialisait, tels des pirates à la recherche de trésors, dans la découverte d'objets mathématiques de plus en plus exotiques dont les symétries sont modélisées par des groupes sporadiques. Quant au second camp, il était constitué d'un vaste réseau d'individus travaillant de façon organisée et disciplinée. Telle une force de pacification, cette équipe, désireuse d'enfin acquérir une connaissance complète, vérifiait chaque avenue en procédant méticuleusement et systéma-tiquement en vue d'exploiter les limites inhérentes à la symétrie pour expliquer pourquoi il n'y avait pas de nouvelles symétries indivisibles qui pourraient exister si l'on partait dans telle ou telle direction. Au grand dam de la horde de corsaires et de flibustiers s'accrochant à l'espoir de voir se poursuivre indéfiniment l'aventure exploratoire, au tournant des années 1980, à la suite de la découverte d'un vingt-sixième groupe sporadique, les deux équipes commencèrent à s'apercevoir l'une et l'autre aux confins de l'horizon. La circumnavigation du monde de la symétrie avait été complétée. Le point d'orgue de cette épopée enlevante fut la construction d'un objet arborant 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 symétries et dont le groupe de symétrie fut surnommé à bon droit le *groupe Monstre*.

Le présent texte serait ne saurait être qualifié de complet sans une explication minimale du titre de l'ouvrage considéré. Bien que la traduction littérale de *Finding Moonshine* soit Chercher de l'alcool de contrebande, il va sans dire qu'il ne s'agit pas là de la signification voulue par l'auteur. Il faut savoir que, dans le registre familier de la langue de Shakespeare, le mot *moonshine* possède un second sens. En effet, il est parfois utilisé pour qualifier une idée et signifier qu'elle est saugrenue, voire complètement dingue. C'est ce mot, dans cette acception, qu'aurait employé John H. Conway, le capitaine des corsaires, lorsqu'on aurait porté à son attention que, par une étrange concidence, la valeur numérique de certains attributs du groupe Monstre concordait avec une suite de nombres occupant un rôle prépondérant dans une théorie mathématique en apparence sans rapport avec la théorie des groupes. Il n'en fallut pas plus pour que le nom *Monstrous Moonshine* (qu'on pourrait rendre dans la langue de Molière par la monstrueuse *idée saugrenue*) soit accolé à la conjecture suivant laquelle, loin d'être le fruit du hasard, cette concordance numérique était en fait la manifestation visible d'une interconnexion inattendue et insoupçonnée entre deux lointains continents du mystérieux monde des mathématiques. On l'aura compris, au cours du voyage au cur de la symétrie que nous propose Marcus Du Sautoy on glanera suffisamment d'informations historiques et mathématiques pour nous permettre de savoir et d'apprécier comment des mathématiciens, qui sont nos contemporains, ont statué sur la valeur de vérité de cette conjecture.

Diplômé de l'Université Laval et de l'Université de Cambridge, Frédéric Morneau-Guérin est professeur agrégé au département Éducation de l'université Téluq, à Québec. Ses recherches portent sur l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs et la théorie des matrices.