

En matière d'enseignement des mathématiques, on constate assez rapidement que les intérêts pédagogiques et didactiques ne sont jamais parfaitement alignés. La qualité d'un manuel est donc fonction de la manière dont les auteurs parviendront à concilier ces intérêts divergents. À cet égard, force est d'admettre que les auteurs de *Operator Theory by Examples*, Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi et William T. Ross, ont su s'approcher de l'équilibre optimal.

Comme le titre l'indique, ce livre accorde une large place aux exemples instructifs. D'ailleurs, il importe de spécifier qu'on s'intéresse moins, dans ce livre, aux concepts qu'à des opérateurs spécifiques comme les opérateurs de décalage unilatéral et bilatéral, les opérateurs de Cesàro, l'opérateur de Volterra, l'opérateur de type Bishop, les opérateurs de Toeplitz et de Hankel, ou encore les opérateurs de décalage de Dirichlet et de Bergman. C'est-à-dire que la théorie des opérateurs est développée concurremment avec l'étude des propriétés concrètes (norme, spectre, compacité, sous-espaces invariants, etc.) des opérateurs considérés plutôt que dans l'abstrait.

Bien que cela ne se reflète pas dans le titre, il est spécifiquement question dans cet ouvrage des opérateurs bornés définis sur des espaces de Hilbert. C'est donc dire qu'on ne traite ni des opérateurs sur définis sur des espaces de Banach, ni des algèbres d'opérateurs (au-delà de ce qui est strictement nécessaire afin d'assurer une cohérence d'ensemble et une certaine exhaustivité), pas plus qu'il n'est question des opérateurs non bornés sur des espaces de Hilbert. Ce choix audacieux s'explique par le fait que les auteurs ont souhaité plutôt consacrer une part prépondérante de l'ouvrage à l'étude d'opérateurs non normaux qui ne sont donc pas couverts dans bon nombre des livres de référence classiques.

Quoique tout jeune chercheur puisse assurément tirer son compte de la lecture de ce livre qui ne se veut pas un traité complet sur la théorie des opérateurs, le public cible est constitué d'étudiants de mathématiques aux cycles supérieurs. D'ailleurs, afin de rejoindre une audience estudiantine aussi large que possible, les auteurs ont tâché de réduire au strict minimum les prérequis indispensables. Quiconque est familier avec rudiments de l'intégration au sens de Lebesgue et le contenu standard d'un cours introductif de premier cycle en analyse complexe saura cheminer sans peine d'un couvert à l'autre.

En ce qui concerne le style, sans faire preuve de condescendance envers leurs lecteurs, les auteurs mettent non seulement en évidence les idées clés des arguments et preuves présentés, mais ils se donnent également la peine d'offrir des explications détaillées pour certains points subtils qui sont souvent passés sous silence dans d'autres ouvrages du même type. Le souci pédagogique des auteurs se manifeste aussi de diverses autres façons comme par l'utilisation ponctuelle de différentes teintes de gris dans le texte et de couleurs dans les figures pour attirer l'attention sur des détails importants; par l'emploi fréquent de représentations des opérateurs sous la forme de matrices infinies afin mieux « voir » leur structure et leur effet; et par une présentation léchée, aérée et esthétiquement irréprochable facilitant à la fois la lecture et la compréhension.

Si le corps du texte est organisé de façon usuelle (un avant-propos suivi d'un bref aperçu des concepts généraux de la théorie des opérateurs puis de vingt chapitres totalisant plus de 450 pages), la structure des chapitres, elle, présente une certaine originalité. On dresse d'entrée de jeu une liste des concepts clés. On enchaîne avec un sommaire du chapitre tenant en un paragraphe. Viennent ensuite le corps du texte, puis une courte section dans laquelle on brosse un portrait historique du développement des idées précédemment mentionnées. Cette dernière section comporte des références vers les sources premières ainsi que vers des sources d'intérêts pour quiconque souhaite approfondir un sujet particulier. Enfin, pour clore les chapitres, on propose une liste d'exercices suivie de quelques indices ciblés.

L'un des traits distinctifs de cet ouvrage est sans contredit l'abondance des problèmes qu'il contient. On en dénombre plus de 600, relativement uniformément répartis entre les 20 chapitres. De niveau de difficulté variable, les problèmes vont du simple exercice de consolidation des connaissances nouvellement acquises à la démonstration d'un détail technique ayant été éludé dans l'exposé principal. On retrouve également quelques problèmes à volets multiples dans lesquels on aborde des éléments (comme les opérateurs de Hilbert-Schmidt ou les opérateurs à trace) qui auraient pu faire l'objet d'une section entière, mais qui, faute de place, ont été relégués au second plan.

L'ouvrage est adéquatement pourvu en termes d'outils complémentaires facilitant le repérage des informations. On retrouve en effet dans les pages liminaires un index des symboles et notations employé au fil du texte, le tout accompagné d'une courte description textuelle et du numéro de page où se référer. Un index par auteurs ainsi qu'un index par sujets sont présentés en toute fin d'ouvrage. Enfin, avec une section

Frédéric Morneau-Guérin (2023)

*Référence* comportant 380 titres (des textes fondamentaux bicentennaires jusqu'aux articles de recherches datant des années 2020) on peut dire qu'il s'agit là d'un ouvrage rudement bien documenté.

When it comes to teaching mathematics, it quickly becomes apparent that pedagogical and didactic interests are never perfectly aligned. The quality of a textbook therefore depends on how well the authors manage to reconcile these conflicting interests. In this respect, we must admit that the authors of *Operator Theory by Examples*, Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi and William T. Ross, have managed to find the ideal balance.

As the title suggests, this book places a strong emphasis on instructive examples. Moreover, it is important to specify that this book is less focused on concepts than on specific operators such as the unilateral and bilateral shift operators, Cesàro operators, Volterra operator, Bishop operator, Toeplitz and Hankel operators, or Dirichlet and Bergman shift operators. In other words, the theory of operators is developed in conjunction with the study of concrete properties (norm, spectrum, compactness, invariant subspaces, etc.) of the operators under consideration, rather than in the abstract.

Although this is not reflected in the title, this book deals specifically with bounded operators defined on Hilbert spaces. This means that neither operators on Banach spaces nor operator algebras are discussed (beyond what is strictly necessary to ensure overall coherence and a measure of completeness), nor are unbounded operators on Hilbert spaces. This bold choice can be explained by the fact that the authors wished to devote a large proportion of the book to the study of non-normal operators, which are not covered in many of the classic reference books.

Although any young researcher can certainly benefit from reading this book, which is not intended to be a comprehensive treatise on the theory of operators; its target audience is graduate students in mathematics. Moreover, in order to reach as broad an audience as possible, the authors have tried to reduce the essential prerequisites to a bare minimum. Anyone familiar with the rudiments of integration in the Lebesgue sense and the standard content of an introductory undergraduate course in complex analysis will be able to move effortlessly from cover to cover.

In terms of style, without patronising their readers, the authors not only highlight the key ideas in the arguments and evidence presented, but also make the effort to offer detailed explanations for some subtle points that are often glossed over in other works of the same type. The authors' concern with pedagogy also manifests itself in a variety of other ways, such as the occasional use of different shades of grey in the text and colour in the figures to draw attention to important details; the frequent use of infinite matrix representations of operators to better 'see' their structure and effect; and a polished, airy and aesthetically impeccable presentation that facilitates both reading and understanding.

While the main body of the text is organised in the usual way (a foreword followed by a brief overview of the general concepts of operator theory, and then 20 chapters totalling more than 450 pages), the structure of the chapters is somewhat original. A list of key concepts is given at the outset. This is followed by a one-paragraph chapter summary. Next is the body of the text, and then a short section in which a historical overview of the development of the ideas mentioned above is provided. This last section includes references to primary sources as well as to sources of interest to anyone wishing to delve deeper into a particular subject. Finally, the chapters close with a list of exercises followed by a few focused tips.

One of the distinguishing features of this book is undoubtedly the abundance of exercises it contains. There are more than 600 of them, spread fairly evenly across the 20 chapters. Varying in difficulty, the problems range from simple exercises to consolidate newly acquired knowledge to demonstration of a technical detail that has been skimmed over in the main text. There are also a few multifaceted problems where elements are covered (such as Hilbert-Schmidt operators or trace operators) that could have been the subject of an entire section but, for lack of space, have been relegated to the background.

The book is well equipped with additional tools to make it easier to find information. The introductory pages contain an index of symbols and notations used throughout the text, accompanied by a short written description and a page number for reference. An index by author and an index by subject are presented at the very end of the book. Finally, with a Reference section containing 380 titles (ranging from fundamental 200-year-old texts to research articles dating from the 2020s), this is a thoroughly researched work.