

## Squigonometry: The Study of Imperfect Circles

Certain books, due to the originality of the subject covered or the approach adopted, are unclassifiable. *Squigonometry: The Study of Imperfect Circles* certainly falls into this category. This singular work was born from the meeting of two mathematicians – Robert D. Poodiack, a professor at Norwich University, Vermont and William E. Wood, a professor at the University of Northern Iowa – both of whom had previously published research articles on squigonometry, generalized trigonometry arising from the study of the  $p$ -unit circle

$$|x|^p + |y|^p = 1$$

for  $p \geq 1$  and  $p \neq 2$  in the same way that usual trigonometric functions arise naturally from the study of the curve of equation  $x^2 + y^2 = 1$ . Thinking that a collaborative article would not allow them to exhaust the list of interesting themes related to their subject of shared interest, they decided to work together to write a monograph. The resulting book stands out due to its innovative character, the appealing nature of its subject and how clearly it is expressed and explained.

*Squigonometry* offers a modern perspective on certain types of older mathematical knowledge. This book is intended as an introduction to generalizations of concepts that students get a glimpse of starting in high school, namely:

1. The unit circle as the set of points that are a (Euclidean) distance of 1 unit from the origin;
2. The unit circle as the locus of points  $(x, y)$  related by the equation  $x^2 + y^2 = 1$ ;
3. The fundamental Pythagorean trigonometric identity  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ ;
4. The number  $\pi$ .

In this monograph, the authors have compiled results about variants of sine and cosine functions that can parameter the closed curve  $|x|^p + |y|^p = 1$  that had been known for many years, as well as others that have been obtained recently (sometimes by the authors themselves). First, fundamental results concerning generalized trigonometric functions are addressed, such as relational equations (squigonometric identities), derivatives, series approximations and integrals. Next, derivative subjects are explored, such as hyperbolic, exponential and logarithmic functions and the generalization of  $\pi$  for each  $p$ , as well as more advanced and specialized subjects such as lemniscate elliptic functions.

Divided into 20 short single-theme chapters totaling more than 230 pages, this colorful book features around a hundred figures. Each chapter begins with a brief introduction presenting the history of the subject addressed, then presents the main results as well as proofs for them. There are also 6 appendices totaling 45 pages. There are 108 graphs illustrating various phenomena that are arranged based on the value of  $p$  chosen as well as a compilation of formulas presented or referenced in the text. Lastly, the final pages of the book contain a bibliography combining more than 100 references as well as a thematic index.

The level of difficulty of the exercises presented at the end of each chapter (around 150 in all) varies significantly. Nevertheless, the notions and results needed to resolve them can be found in the text. A few clues and some solutions for these exercises are presented in the appendices.

Readers are expected to be familiar with trigonometric functions, master the basics of single-variable differential and integral calculus, know how to resolve initial value problems and be familiar with the main elementary outcomes concerning infinite series, but no more advanced knowledge is required. The book will therefore be suitable both in the context of an undergraduate mathematics course with directed reading and for end-of-undergraduate study research projects. Incidentally, 25 descriptions of projects intended to serve as a springboard for independent study are included throughout the book. It should be noted that some of them could very likely be extended into full research projects likely to lead to new discoveries.

*Frederic Morneau-Guerin is a professor in the Department of Education at Universite TELUQ. He holds a Ph.D. in abstract harmonic analysis.*

### Squigonometry: The Study of Imperfect Circles

Certains livres sont, par l'originalité du sujet couvert ou de l'approche retenue, des inclassables. *Squigonometry: The Study of Imperfect Circles* est assurément l'un d'eux. Cet ouvrage singulier est née de la rencontre de deux mathématiciens – Robert D. Poodiack, professeur à Norwich University, Vermont et William E. Wood, professeur à University of Northern Iowa – ayant tous deux préalablement publié des articles de recherche sur la squigonométrie, à savoir la trigonométrie généralisée émanant de l'étude du p-cercle unité

$$|x|^p + |y|^p = 1$$

pour  $p \geq 1$  et  $p \neq 2$  de la même manière que les fonctions trigonométriques usuelles surgissent naturellement de l'étude de la courbe d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ . Estimant qu'un article collaboratif ne permettrait pas d'épuiser la liste des thèmes captivants en lien avec leur sujet d'intérêt commun, c'est à la rédaction d'une monographie qu'ils se sont employés. L'ouvrage qui en a résulté s'illustre par son caractère novateur, par la nature emballante de son sujet ainsi que par la clarté d'expression et d'explication. *Squigonometry* offre une perspective moderne sur certaines connaissances mathématiques anciennes. Ce livre se veut en effet une introduction aux généralisations des concepts que les étudiants entrevoient dès l'école secondaire, à savoir :

1. Le cercle unité comme ensemble des points situés à une distance (euclidienne) d'une unité de l'origine;
2. Le cercle unité comme le lieu des points  $(x, y)$  reliés par l'équation  $x^2 + y^2 = 1$ ;
3. L'identité trigonométrique fondamentale de Pythagore  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ ;
4. Le nombre  $\pi$ .

Les auteurs ont compilé dans cette monographie des résultats au sujet des variantes des fonctions sinus et cosinus qui peuvent paramétrer la courbe fermée  $|x|^p + |y|^p = 1$  qui étaient connus depuis de nombreuses années, ainsi que d'autres qui ont été obtenus récemment (parfois par les auteurs eux-mêmes). On traite dans un premier temps des résultats fondamentaux concernant ces fonctions trigonométriques généralisées, tels que les équations relationnelles (les identités squigonométriques), les dérivées, les intégrales et les approximations en série. Par la suite, on explore des sujets dérivés tels que les fonctions hyperboliques, exponentielles et logarithmiques et la généralisation de  $\pi$  pour chaque  $p$ , ainsi que des sujets plus avancés et pointus tels que les fonctions lemniscatiques et elliptiques.

Divisé en 20 courts chapitres monothématiques cumulant plus de 230 pages, ce livre haut en couleur est parsemé d'une centaine de figures. Chaque chapitre débute par une brève introduction présentant l'historique du sujet traité, puis présente les principaux résultats de même que leurs preuves. S'ensuivent 6 annexes totalisant 45 pages. On y retrouve notamment 108 graphes illustrant

différents phénomènes qui se déclinent selon la valeur de  $p$  choisie ainsi qu'un recueil de formules présentées ou référencées au fil du texte. Enfin, les dernières pages du livre contiennent une bibliographie regroupant plus de 100 références ainsi qu'un index thématique.

Le niveau de difficulté des exercices présentés à la fin de chaque chapitre (environ 150 en tout) varie significativement. Quoiqu'il en soit, les notions et résultats nécessaires à leur résolution figurent dans le texte. Quelques indices de même que certaines solutions à certains de ces exercices sont présentés en annexe.

Si l'on attend du lecteur qu'il connaisse les fonctions trigonométriques, qu'il maîtrise les bases du calcul différentiel et intégrale à une variable, qu'il sache résoudre des problèmes de valeurs initiales et qu'il soit familier avec les principaux résultants élémentaires concernant les séries infinies, aucune connaissance plus avancée n'est requise. L'ouvrage conviendra donc tant dans le cadre d'un cours de mathématiques de premier cycle en lecture dirigée que dans pour un projet de recherche de fin d'études de premier cycle. On trouve d'ailleurs çà et là 25 descriptions de projets conçus pour servir de tremplin à une étude indépendante. Notons que nombre d'entre eux pourraient fort bien être étendus à des projets de recherche complets susceptibles de déboucher sur de nouvelles découvertes.