Poids de convolution sur ℓ_2

Frédéric Morneau-Guérin
Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

Réunion d'été de la SMC 2023
Ottawa

3 juin 2023

Cette présentation est l'aboutissement de travaux débutés avec Prof. Thomas J. Ransford (Université Laval) et poursuivis avec Colin Krawchuk (University of Cambridge).

Fonds de recherche
Nature et
technologies
Québec

Notation & terminologie

- G : Groupe localement compact unimodulaire.

Notation & terminologie

- G : Groupe localement compact unimodulaire.

- Poids/Pondération sur G : Fonction $w : G \to (0, \infty)$.

Notation & terminologie

- G : Groupe localement compact unimodulaire.

- Poids/Pondération sur G : Fonction $w : G \to (0, \infty)$.

- Espace w-pondéré des fonctions L_p sur G :

$$L_p(G,w) := \Big\{ f : G \to \mathbb{C} : \ \|f\|_{p,w} < \infty \Big\},$$

où

$$\|f\|_{p,w} := \|wf\|_p = \left(\int_G w(x)^p |f(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{1/p}.$$

Notation & terminologie (suite)

- *Convolution* : à deux fonctions mesurables $f, g : G \to \mathbb{C}$, fait correspond une autre "fonction" $f * g : G \to \mathbb{C}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, d\lambda(y), \qquad (x \in G).$$

Notation & terminologie (suite)

- *Convolution* : à deux fonctions mesurables $f, g : G \to \mathbb{C}$, fait correspond une autre “fonction” $f * g : G \to \mathbb{C}$ définie par :

$$(f * g)(x) := \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, d\lambda(y), \qquad (x \in G).$$

- Un espace $\mathscr{A}(G)$ de fonctions sur G est dit $*$-*stable* si,
  - quelles que soient $f, g \in \mathscr{A}(G)$, on a

$$\int_G \left| f(y) g(y^{-1}x) \right| d\lambda(y) \; < \; \infty \quad \text{(p.p.)}\,;$$

  - la fonction $f * g$ ainsi définie appartient à $\mathscr{A}(G)$.

Question.

Peut-on caractériser la classe $\mathscr{W}_p(G)$ des pondérations sur G pour lesquelles $L_p(G,w)$ est $*$-stable et vérifie

$$\|f*g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}?$$

Question.
Peut-on caractériser la classe $\mathscr{W}_p(G)$ des pondérations sur G pour lesquelles $L_p(G,w)$ est $*$-stable et vérifie

$$\|f * g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}?$$

Réponse pour $p = 1$. (Gel'fand, Raikov & Shilov, 1964)

$$\|f * g\|_{1,w} \leq C\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}, \quad \forall f,g \in L_1(G,w)$$

$$\Updownarrow$$

$$w(xy) \leq Cw(x)w(y), \quad \forall x,y \in G.$$

Question.
Peut-on caractériser la classe $\mathscr{W}_p(G)$ des pondérations sur G pour lesquelles $L_p(G,w)$ est $*$-stable et vérifie

$$\|f*g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}?$$

Réponse partielle pour $p>1$. (Wermer, 1954 ; Nikolskii, 1970 ; Kuznetsova, 2012)

$$\|f*g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}, \quad \forall f,g \in L_p(G,w)$$

$$\Uparrow$$

$$\left(\frac{1}{w^q}*\frac{1}{w^q}\right)(x) \;\leq\; C^q\frac{1}{w^q}(x), \quad \forall x \in G.$$

Notation.

- $$S_p(G,w) := \sup\left\{ \frac{\|f*g\|_{p,w}}{\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}} \;:\; f,g \in L_p(G,w) \right\}.$$

- Pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$C_p(G,w)^q := \sup_{x\in G} \frac{\left(\frac{1}{w^q}*\frac{1}{w^q}\right)(x)}{\frac{1}{w^q}(x)}.$$

Question.
Existe-t-il groupe G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$ (i.e. $L_p(G,w)$ est une algèbre de convolution) ;
- $C_p(G,w) = \infty$ (i.e. w n'est pas faiblement sous-convolutive).

Question.
Existe-t-il G et w pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$ (i.e. $L_p(G,w)$ est une algèbre de convolution) ;
- $C_p(G,w) = \infty$ (i.e. w n'est pas faiblement sous-convolutive).

Réponse. Oui !

Exemple. (Kuznetsova, 2006)
Considérons la pondération $w : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ définie par

$$w(x) := \begin{cases} \max\left\{|x|, |x|^{-1/4}\right\}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

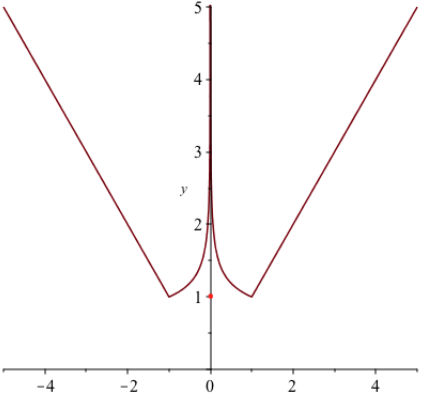

FIGURE – Graphe de la pondération de Kuznetsova pour $x \in [-5,5]$

Question principale.
Existe-t-il un groupe abélien discret G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$ (i.e. $L_p(G,w)$ est une algèbre de convolution) ;
- $C_p(G,w) = \infty$ (i.e. w n'est pas faiblement sous-convolutive).

Question principale.
Existe-t-il un groupe abélien discret G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$ (i.e. $L_p(G,w)$ est une algèbre de convolution) ;
- $C_p(G,w) = \infty$ (i.e. w n'est pas faiblement sous-convolutive).

On a évidemment en tête le groupe $\mathbb{Z}$.

Question principale.
Existe-t-il un groupe abélien discret G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$ (i.e. $L_p(G,w)$ est une algèbre de convolution) ;
- $C_p(G,w) = \infty$ (i.e. w n'est pas faiblement sous-convolutive).

On a évidemment en tête le groupe $\mathbb{Z}$.

Dorénavant nous nous concentrerons sur le cas $p = 2$.

Reformulation dans le langage de la théorie des opérateurs.

- $H := \ell_2(G)$.
- $H_0 :=$ span$\{e_x : \ x \in G\}$, où

$$e_x(y) := \begin{cases} 1, & y = x; \\ 0, & y \neq x. \end{cases}$$

- Lin$(H_0) := \big\{T : H_0 \to H_0 \mid \ T$ linéaire$\big\}$.
- $\mathscr{B}(H_0) := \big\{T : H_0 \to H_0 \mid \ T$ linéaire et $\|\cdot\|_H$-borné$\big\}$.
- $e_y \otimes e_z \in \mathscr{B}(H_0)$ est l'opérateur de rang 1 défini par

$$(e_y \otimes e_z)(h) := \ \langle h, e_z \rangle e_y \ = \ h(z) e_y, \qquad (h \in H).$$

Considérons l'application $T_w : H_0 \to \mathrm{Lin}(H_0)$ définie par

$$T_w(h) := \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} h(y+z)\frac{w(y+z)}{w(y)w(z)}(e_y \otimes e_z).$$

Théorème 1. (Ransford–MG)
Les énoncés suivants sont équivalents :

1. $\ell_2(G,w)$ est $*$-stable ;
2. T_w est une application linéaire bornée de H_0 dans $\mathscr{B}(H_0)$.

Dans ce cas

$$S_2(G,w) \;=\; \big\| T_w : H_0 \to \mathscr{B}(H_0) \big\|.$$

Si T_w est une application linéaire bornée de H_0 dans $\mathscr{B}(H_0)$, alors il existe une unique application linéaire bornée $\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{B}(H)$ qui étend T_w au sens où

$$\widetilde{T}_w(h) \upharpoonright H_0 \;=\; T_w(h), \qquad\qquad (h \in H_0).$$

De plus

$$\left\|\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{B}(H)\right\| \;=\; \left\|T_w : H_0 \to \mathscr{B}(H_0)\right\|.$$

Theorem 2. (Ransford–MG)
Les énoncés suivants sont équivalents

1. $C_2(G,w) < \infty$.
2. $\widetilde{T}_w$ est une application linéaire bornée de H dans $\mathscr{S}_2(H)$, la classe des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur H ;

Dans ce cas,

$$C_2(G,w) \;=\; \left\|\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{S}_2(H)\right\|.$$

Calculer $\left\|\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{B}(H)\right\|$ est difficile.

On cherche un estimé pour $S_2(G,w)$ qui serait plus petit que $\left\|\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{S}_2(H)\right\|$ tout en étant plus facile à calculer que $\left\|\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{B}(H)\right\|$.

Une possibilité consiste à considérer$\left\|\widetilde{T}_w : H \to \mathscr{S}_p(H)\right\|$, où $\mathscr{S}_p(H)$ désigne la p-ième classe de Schatten, pour $p \in (2,\infty)$.

Idée.

- Considérer une famille dénombrable de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini (G_n, w_n) avec $n \geq 1$.

Idée.

- Considérer une famille dénombrable de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini (G_n, w_n) avec $n \geq 1$.
- Avec un peu de chance, on pourra définir une pondération w sur $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ pour laquelle $S_2(G, w)$ pourra être obtenu à partir des $S_2(G_n, w_n)$.

Tentative 1.

- Considérer la pondération w sur $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ définie par

$$w(x) \sim \prod_{n=1}^{\infty} w_n(x_n).$$

Théorème 3. (Ransford–MG, 2019)
Étant des groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini (G_n, w_n) avec $w_n(0_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, posons $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ et $w(x) := \prod_{n=1}^{\infty} w_n(x_n)$. Alors, quel que soit $k \geq 1$, on a

$$S_2(G, w) \geq \prod_{i=1}^{k} S_2(G_i, w_i).$$

Théorème 3. (Ransford–MG, 2019)
Étant des groupes abéliens discrets pondérés non triviaux d'ordre fini (G_n, w_n) avec $w_n(0_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, posons $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ et $w(x) := \prod_{n=1}^{\infty} w_n(x_n)$. Alors, quel que soit $k \geq 1$, on a

$$S_2(G, w) \geq \prod_{i=1}^{k} S_2(G_i, w_i).$$

Lemme Quel que soit $n \geq 1$, on a

$$S_2(G_n, w_n) \ \geq \ \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Tentative 2.

- Considérer la pondération w sur $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ définie par

$$w(x) \;\sim\; \sup_{n\geq 1} w_n(x_n).$$

Proposition 4. (Gel'fand, Raikov & Shilov, 1964)

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \leq S_2(G,w).$$

Théorème 5. (Kuznetsova, 2006)

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;\leq\; S_2(G,w)^2.$$

Théorème 6. (Ransford–MG, 2020)
S'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x, y \in G$, on a

$$w(xy) \leq M\big(w(x) + w(y)\big) \qquad \& \qquad w(x^{-1}) \leq Mw(x),$$

alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $C_2(G,w) < \infty$.
2. $S_2(G,w) < \infty$.
3. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty$.
4. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} < \infty$.

Exemple 1.

Définissons les pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ inductivement comme suit :

- Pour $n = 1$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 4, \\ 2 &\mapsto 16. \end{aligned}$$
- Pour $n \geq 2$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 2(3^{n-1})^{1/2} \cdot w_{n-1}(2), \\ 2 &\mapsto w_n(1)^2. \end{aligned}$$

On munit ensuite $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ de la fonction de pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup_{n\geq 1} w_n(x_n)$.

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \;<\; \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Il y a un *mais*.**

$$S_2(G,w) = \infty.$$

Théorème 7. (Kuznetsova–Krawchuk–MG, 2020)
Étant donné $\{(G_n, w_n)\}_{n\geq 1}$ des groupes pondérés et étant donné le groupe $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ muni de la pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup\limits_{n\geq 1} w_n(x_n)$. Si

- $w_n(0_n) = 1$.
- Pour tout $n \geq 1$ on a que $w_n(xy) \leq w_n(x)w_n(y)$ quels que soient $x, y \in G_n$.
- Pour tout $n > 1$, il existe $a_n, b_n \in G_n$ tels que

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n)w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

Alors $S_2(G, w) = \infty$.

Condition nécessaire IV.
Violation de l'énoncé :

Pour tout $n > 1$*, il existe* $a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n) w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z \in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

Exemple 2.
Définissons les pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0, \infty)$ inductivement comme suit :

- Pour $n = 1$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 2, \\ 2 &\mapsto 4. \end{aligned}$$
- Pour $n \geq 2$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 2(3^{n-1})^{1/2} \cdot w_{n-1}(2), \\ 2 &\mapsto \left(\frac{n}{3^{n-1}}\right)^{1/2} \cdot w_n(1)^2. \end{aligned}$$

On munit ensuite $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ de la fonction de pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup_{n\geq 1} w_n(x_n)$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire IV.**
  Violation de l'énoncé : *Pour tout* $n > 1$*,* $\exists a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n)w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire IV.**
  Violation de l'énoncé : *Pour tout* $n > 1$*,* $\exists a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_nb_n) = w_n(a_n)w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire IV.**
  Violation de l'énoncé : *Pour tout* $n > 1$*,* $\exists a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n) w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Y a-t-il un *mais* ?**

Références.

- Gel'fand, I., Raikov, D., et Shilov, G. *Commutative normed rings*, Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
- Kuznetsova, Y. N. (2006). Weighted L_p-algebras on groups. *Functional Analysis and Its Applications, 40*(3), 234-236.
- Kuznetsova, Y., & Molitor-Braun, C. (2012). Harmonic analysis of weighted Lp-algebras. *Expositiones Mathematicae, 30*(2), 124-153.
- Morneau-Guérin, F. (2020). Weighted Young-type inequalities on locally compact groups. Novi Sad Journal of Mathematics, 50(2).
- Morneau-Guérin, F., & Ransford, T. (2020). Convolution weights on ℓ_2-spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492*(1), 124396.
- Morneau-Guérin, F. (2019). La stabilité de l'espace des suites de carré sommable par rapport au produit de convolution. (Thèse de doctorat).
- Nikol'skii, N. K. (1974). Selected problems of weighted approximation and spectral analysis. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova, 120*, 3-272.
- Wermer, J. (1954). On a class of normed rings. *Arkiv för Matematik, 2*(6), 537-551.


Merci