**Association mathématique du Québec**

# Article

## Le problème de Souslin

Léo Lortie
Département de mathématiques et de statistique, Université Laval
Leo.Lortie.1@ulaval.ca

Frédéric Morneau-Guérin
Département Éducation, Université TÉLUQ
Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

**Résumé**

Il découle d'un théorème démontré par Georg Cantor en 1895 qu'il existe, à isomorphisme d'ordre près, un unique ensemble totalement ordonné qui est dense, complet, non borné et séparable. Cet ensemble ordonné est canoniquement modélisé par la droite réelle, c'est-à-dire par l'ensemble des nombres réels muni de la relation d'ordre usuelle. Ce résultat servira de point de départ à une discussion au cours de laquelle nous nous pencherons plus avant, à travers le prisme des mathématiques puis à travers celui de l'histoire de cette discipline, sur la question de la caractérisation de l'idée intuitive que l'on se fait de la droite réelle.

**Mots clés : Caractérisation de la droite réelle, ordres partiels, indépendance entre axiomes**

Classification mathématique par matières 2020. 03E65, 03-03, 03E35, 03E50.

Ce travail a été rendu possible grâce au soutien de l'Institut des Sciences Mathématiques et d'une subvention de recherche du FRQNT. Les auteurs tiennent également à exprimer leurs remerciements au Pr. Thomas J. Ransford.

## 1 Introduction

Tous les êtres humains ont, d'instinct, en commun une certaine idée intuitive des nombres naturels comme une allée numérique trouvant son origine en 0 ou en 1 et se déployant à l'infini. Cette représentation mentale peut aisément s'accommoder des entiers négatifs puisqu'il suffit de prolonger infiniment l'allée de l'autre côté de l'origine, que celle-ci soit 0 ou 1. L'introduction des nombres rationnels pose davantage problème. Bien qu'il tombe sous le sens, sur le plan purement intellectuel, de considérer les fractions d'entiers, on fait rapidement face à certains obstacles. Par exemple, comment composer avec le fait que $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ représentent la même quantité ? S'il a longtemps été difficile d'entrevoir comment formaliser mathématiquement de tels nombres pour lesquels il n'y a pas unicité de la représentation, ce paradoxe est aujourd'hui définitivement résolu. Les nombres rationnels sont en effet définis comme les classes d'équivalence de paires ordonnées $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, par la relation d'équivalence suivante :

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Nous en arrivons maintenant à l'ensemble des nombres réels. L'idée intuitive d'une droite numérique formant un continuum sans trous remonte à des temps immémoriaux. On sait par exemple que le concept d'irrationalité était implicitement accepté par les premiers mathématiciens indiens tels que Manava vers 700 av. J.-C. Autour de 500 av. J.-C., Hippase de Métaponte, un disciple de Pythagore, a également réalisé que la racine carrée de 2 est irrationnelle. D'ailleurs, selon la légende, Hippase a été assassiné par les pythagoriciens pour avoir divulgué cette information hors de la secte. Plus récemment, les concepteurs de l'analyse mathématique ont employé les nombres réels (une dénomination introduite par René Descartes au 17e siècle) avant même de les avoir définis rigoureusement. Pour s'en convaincre, considérons le théorème des valeurs intermédiaires qui dit qu'une fonction continue sur un domaine qui comprend l'intervalle $[a, b]$ prend sur cet intervalle toutes les valeurs intermédiaires à $f(a)$ et $f(b)$. Ce résultat, qui constitue une pierre d'assise de l'analyse moderne depuis son établissement sur des bases rigoureuses au 19e siècle, semble si bien aligné avec l'idée intuitive que l'on se fait de la continuité des fonctions qu'il est supposé *vrai* depuis au moins l'antiquité grecque [1]. Pourtant, le théorème des valeurs intermédiaires repose implicitement sur la complétude des nombres réels comme en témoigne l'exemple suivant :

**Exemple 1.1.** *La fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par $x \mapsto x^2 - 2$ vérifie $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$. Pourtant, il n'existe aucun $x$ dans le domaine de $f$ pour lequel $f(x) = 0$.*

Il existe plusieurs manières de définir synthétiquement les nombres réels à partir des nombres rationnels et, partant, de formaliser l'idée de complétude de la droite réelle. L'une des méthodes de construction des nombres réels les plus connues est celle décrite par le mathématicien allemand Richard Dedekind [Ded72]. Cette méthode repose sur une idée ayant été vaguement explorée par le mathématicien français Joseph Bertrand [Ber49] quelques décennies plus tôt et qu'on appelle les *coupures de Dedekind*. L'idée va comme suit : une coupure de Dedekind est une partition de l'ensemble des nombres rationnels en deux ensembles $G$ et $D$, telle que tous les éléments de $G$ sont inférieurs à tous les éléments de $D$ et que $G$ ne contient pas de plus grand élément. L'ensemble $D$ peut posséder un plus petit élément parmi les rationnels, auquel

1. Il avait en effet été postulé, sous une forme différente, bien que néanmoins reconnaissable, dans les travaux du sophiste grec Bryson d'Héraclée sur la quadrature du cercle dès le 4e siècle av. J.-C.

cas la coupure correspond à ce rationnel. Mais si l'ensemble $D$ ne possède pas de plus petit élément parmi les rationnels, alors cette coupure définit de façon unique un nombre irrationnel qui, pour le dire de façon imagée, colmate la brèche entre $G$ et $D$.

**Exemple 1.2.** *Considérons la coupure suivante :*

$$\begin{aligned} G &:= \left\{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2 \vee x < 0\right\}, \\ D &:= \left\{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \geq 2 \wedge x \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

*Comme l'ensemble $D$ ne possède pas de plus petit élément parmi les rationnels, cette coupure définit le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. L'ajout de ce nombre au domaine de la fonction $f$ définie à l'exemple 1.1 ferait en sorte d'assurer que celle-ci ait un zéro.*

L'objectif du présent article est de présenter une caractérisation de la droite réelle vue comme un continuum linéaire et de discuter de certaines difficultés qui surgissent lorsque l'on tente de modifier légèrement cette caractérisation, le tout dans des perspectives mathématique et historique. Bien entendu, le fait que l'on se bute à des embûches pour le moins singulières en tentant de caractériser la droite réelle ne surprendra pas le mathématicien moyen, bien habitué qu'il est aux théorèmes mettant en exergue un fait étonnant au sujet des nombres réels. Pour paraphraser la formule apocryphe du mathématicien hongrois John von Neumann, nous sommes réconciliés à l'idée qu'on ne comprendra jamais entièrement la droite réelle et qu'il nous faut plutôt nous habituer à ses mystères [2]. Pensons à l'étonnante découverte faite par le mathématicien allemand Georg Cantor [Can74] voulant que la cardinalité de l'ensemble des nombres naturels, à savoir $\aleph_0$, soit strictement plus petite que celle de l'ensemble des nombres réels, à savoir $2^{\aleph_0}$. Ou encore au fait que l'hypothèse du continu (sigle : $\mathsf{CH}$), qui stipule qu'il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est strictement compris entre le cardinal de l'ensemble des nombres naturels et celui des nombres réels, ait tour à tour été démontrée irréfutable dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo–Fraenkel avec l'axiome du choix (sigle : $\mathsf{ZFC}$) par le logicien autrichien Kurt Gödel en 1938 [G4̈0] puis indémontrable dans $\mathsf{ZFC}$ par l'américain Paul Cohen en 1963 [Coh63, Coh64]. On trouvera un exposé un peu plus détaillé de ces idées ici : [MG14].

## 2 Ordres linéaires et caractérisation de la droite réelle

Dans cette section, nous présenterons l'une des pierres d'assise dans la théorie de l'ordre : le *théorème d'isomorphisme de Cantor* qui offre une caractérisation catégorique de la droite réelle munie de l'ordre usuel. Mais d'abord, voici une définition qui est essentielle à la bonne compréhension de ce théorème :

2. La phrase « *Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them* » est souvent attribuée à John von Neumann, mais il n'est pas certain que ces paroles soient un jour sorties de sa bouche. La toute première mention écrite de cette jolie formule se trouve dans une note de bas de page dans le chapitre *The particle Zoo* du livre *The dancing Wu Li masters : An overview of the new physics* de Gary Zukav paru en 1979.

**Définition 1.** *Soit $X$ un ensemble. Une relation binaire $<$ sur $X$ forme un ordre linéaire (aussi appelé ordre total) strict si elle satisfait aux conditions suivantes :*

1. *Irréflexivité : $\forall x \in X$, on a $x \not< x$.*
2. *Transitivité : $\forall x, y, z \in X$, le fait que $x < y$ et $y < z$ implique que $x < z$ ;*
3. *Totalité : $\forall x, y \in X$, ou bien $x < y$, ou alors $y < x$*

Voici maintenant l'énoncé du théorème d'isomorphisme de Cantor :

**Théorème 2.1.** *(Cantor, 1895 [Can95])*
*L'ensemble des nombres réels muni de l'ordre linéaire usuel $<$ est, à isomorphisme d'ordre près, l'unique ensemble non vide linéairement ordonné à jouir des propriétés suivantes :*

1. *Non bornitude : Il n'y a pas de plus petit ni de plus grand élément ;*
2. *Densité : Entre toute paire d'éléments distincts, il y en a un autre ;*
3. *Complétude au sens de Dedekind : Tous ses sous-ensembles non vides et majorés possèdent une borne supérieure ;*
4. *Séparabilité : Il existe un sous-ensemble au plus dénombrable qui rencontre tout ouvert non vide.*

Nous allons maintenant offrir une démonstration du théorème d'isomorphisme de Cantor qui exploite la méthode dite *back-and-forth* en appliquant un algorithme glouton. Bien que cette technique soit souvent associée au nom de Cantor, la preuve originale donnée par ce dernier reposait sur une idée différente. Le logicien et historien des mathématiques Charles L. Silver estime que c'est Felix Hausdorff, en 1914, qui fut le premier à formuler une démonstration s'appuyant sur la méthode back-and-forth [Sil94].

*Démonstration.* Soit $\mathbb{S}$ un ensemble non vide qui est linéairement ordonné par une relation binaire $\prec$ de manière à jouir des propriétés (1) à (4) ci-dessus. Nous allons montrer que cet ensemble linéairement ordonné est, à toutes fins utiles, la droite réelle en construisant un isomorphisme d'ordre entre $(\mathbb{S}, \prec)$ et $(\mathbb{R}, <)$. Pour ce faire, nous procéderons en deux temps.

- Comme $\mathbb{S}$ est séparable, il existe un sous-ensemble $D \subseteq \mathbb{S}$ qui est à la fois dénombrable et dense dans $\mathbb{S}$ muni de la topologie induite par l'ordre $\prec$. Considérons des énumérations de $D$ et de $\mathbb{Q}$ respectivement :

  $$\{d_0, d_1, d_2, \dots\} \qquad \text{et} \qquad \{q_0, q_1, q_2, \dots\}.$$

  En procédant par étapes, nous allons construire par récurrence une bijection $\varphi : D \to \mathbb{Q}$ qui préserve l'ordre. Aux étapes paires nous allons définir $\varphi(d_n)$ et aux étapes impaires nous allons définir $\varphi^{-1}(q_n)$.

  L'hypothèse de récurrence est qu'à la fin de l'étape $2n$ (respectivement $2n+1$) nous aurons défini $\varphi$ pour un nombre fini d'éléments de $D$ incluant notamment $d_0, ..., d_n$ et pour chaque $j < n$ (respectivement $j \leq n$) il y a $d_{\iota_j}$ tel que $\varphi(d_{\iota_j}) = q_j$. De plus, pour chaque $d_i, d_j$ pour lesquels $\varphi$ est défini, on a

$$d_i \prec d_j \qquad \iff \qquad \varphi(d_i) < \varphi(d_j).$$

Si l'on arrive à passer de l'étape $t$ à l'étape $t+1$ tout en maintenant la validité de l'hypothèse d'induction, alors c'est qu'on peut étendre $\varphi$ de sorte que son domaine en viendra ultimement à inclure la totalité de $D$ et que son image en viendra ultimement à inclure la totalité de $\mathbb{Q}$. Il en résultera que $\varphi$ est un isomorphisme d'ordre entre $(D, \prec)$ et $(\mathbb{Q}, <)$.

- À l'étape 0, on pose $\varphi(d_0) := q_0$ ;
- Supposons que les $t$ premières étapes ont été réalisées et que nous sommes rendus à l'étape $t+1$. On distingue deux cas de figure :
  1. Si $t+1 = 2n$, alors ou bien $f(d_n)$ a déjà été défini auquel cas on passe directement à la prochaine étape, ou bien on il n'a pas déjà été défini auquel cas on considère

     $$d_{\iota_0} \prec d_{\iota_1} \prec \ldots \prec d_{\iota_k}$$

     les éléments pour lesquels $\varphi$ a déjà été défini. Alors

     $$\varphi(d_{\iota_0}) < \varphi(d_{\iota_1}) < \ldots < \varphi(d_{\iota_k}).$$

     Il y a $k+2$ emplacements possibles pour $d_n$, à savoir à gauche de tous les $\varphi(d_{\iota_j})$, à droite de $\varphi(d_{\iota_0})$ mais à gauche de tous les autres $\varphi(d_{\iota_j})$, à droite de $\varphi(d_{\iota_0})$ et $\varphi(d_{\iota_1})$ mais à gauche de tous les autres $\varphi(d_{\iota_j})$, $\ldots$, à droite de tous les $\varphi(d_{\iota_j})$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense et non borné, il existe forcément un élément $q \in \mathbb{Q}$ dans l'emplacement correspondant et on pose $f(d_n) := q$ ;
  2. Si $t+1 = 2n+1$, alors on commence par vérifier si $q_n = f(d_{\iota_m})$ pour un certain $1 \leq m \leq k$, où

     $$d_{\iota_0} \prec d_{\iota_1} \prec \ldots \prec d_{\iota_k}$$

     désignent les éléments pour lesquels $\varphi$ a déjà été défini lors des étapes précédentes. Si c'est le cas, alors on passe directement à la prochaine étape. Sinon c'est que $q_n$ se trouve, de façon analogue au cas qui précède, dans l'un des $k+2$ emplacements. Comme $D$ est dense et non borné, il existe forcément un élément $d \in D$ dans l'emplacement correspondant et on pose $\varphi(d) := q_n$ ;

  Cela achève la description de l'étape $t+1$. On vérifie aisément que l'hypothèse d'induction est toujours vérifiée.

- Posons

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}: & \mathbb{S} & \to & \mathbb{R}. \\ & s & \mapsto & \sup\{\varphi(d) : d \in D,\ d \prec s\} \end{array}$$

Ainsi définie, la fonction $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme d'ordre de $(\mathbb{S}, \prec)$ dans $(\mathbb{R}, <)$. Notons que la surjectivité de $\widetilde{\varphi}$ est une conséquence de la complétude au sens de Dedekind de $\mathbb{S}$ car, pour $r \in \mathbb{R}$, on a que $r = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$. Ainsi $r = \widetilde{\varphi}(x)$ où $x = \sup\{\varphi^{-1}(q) : q \in \mathbb{Q},\ q < r\}$. $\square$

# 3 Problème de Souslin

Mikhaïl Yakovlevich Souslin est né le 15 novembre 1894 au sein d'une famille de paysans pauvres d'un village de l'oblast de Saratov, à 700 km au sud-est de Moscou, sur la rive ouest de la Volga [Igo96]. Très jeune, Souslin témoigne d'un vif intérêt pour les mathématiques. Son institutrice, constatant chez lui un talent indéniable, l'encourage à poursuivre ses études et sollicite en son nom l'appui financier de sa communauté. En 1913, le jeune homme fait son entrée au département de mathématiques de l'Université de Moscou où, aux côtés de Pavel Sergeïevitch Aleksandrov, il participe à des séminaires animés par des mathématiciens de renom tels que Dmitri Fiodorovitch Egoroff et Nikolaï Nikolaïevitch Lusin. Alors qu'il n'était qu'en deuxième année du baccalauréat, Souslin entreprend des recherches sur les récents travaux révolutionnaires d'Émile Borel et d'Henri Lebesgue. Suivant l'obtention de son diplôme, en 1917, alors que la Révolution russe bat son plein, Souslin accompagne son maître Lusin dans sa fuite hors de Moscou en quête d'un endroit plus calme où se poser. Les deux hommes s'établissent à Ivanovo-Voznesensk, où ils enseignent à l'Université polytechnique. À l'hiver 1918-19, certaines conditions de santé préexistantes de Souslin sont exacerbées par le froid intense et une grave pénurie de nourriture. Gravement malade, le jeune homme obtient un congé afin de retourner chez ses parents le temps de recouvrer la santé. L'épidémie de typhus qui sévit sur tout le territoire de l'ancien Empire russe aura toutefois raison de lui le 21 octobre 1919.

Durant sa courte vie, Souslin n'eut le temps de faire paraître qu'un article de tout juste quatre pages [Sou17] apportant une correction à un argument erroné formulé par Lebesgue. Toutefois, deux autres courtes publications signées Souslin parurent peu après sa mort, dont un entrefilet dans *Fundamenta Mathematicae* [Sou20] que nous reproduisons dans son intégralité : « Un ensemble ordonné (linéairement) sans sauts ni lacunes et tel que tout ensemble de ses intervalles (contenant plus qu'un élément) n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénumerable, est-il nécessairement un continue linéaire (ordinaire) ? »

Voici une reformulation de ce problème employant la terminologie moderne et calquant la forme du théorème 2.1 en vue d'en ressortir les similarités de même que la principale différence :

**Problème.** *L'ensemble des nombres réels muni de l'ordre linéaire usuel $<$ est-il l'unique ensemble non vide linéairement ordonné à jouir des propriétés suivantes :*

1. *Non bornitude : Il n'y a pas de plus petit ni de plus grand élément ;*
2. *Densité : Entre toute paire d'éléments, il y en a un autre ;*
3. *Complétude au sens de Dedekind : Tous ses sous-ensembles non vides et majorés possèdent une borne supérieure ;*
4. *Satisfaction de la condition de chaîne dénombrable topologique[3] : Toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints est au plus dénombrable.*

3. En toute logique, la *condition de chaîne dénombrable* devrait plutôt être appelée *condition d'antichaîne dénombrable* puisque c'est vraiment d'antichaînes (à savoir de familles d'ensembles incompatibles par inclusion ensembliste) dont il est question. Cette appellation demeure toutefois utilisée pour des raisons historiques.

Il est sous-entendu, dans l'énoncé de ce problème, que l'ensemble des nombres réels muni de l'ordre usuel $<$ vérifie la condition de chaîne dénombrable topologique. Puisque cela n'est peut-être pas évident à première vue, nous en ferons la démonstration. Pour ce faire, supposons, afin d'aboutir à une contradiction, qu'il existe une famille indénombrable d'intervalles ouverts $\{I_\iota\}_{\iota\in\aleph_1}$. Comme $\mathbb{Q}$ constitue un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$, chaque $I_\iota$ doit contenir au moins un nombre rationnel que nous noterons par $q_\iota$. L'hypothèse voulant que les $I_\iota$ sont deux à deux disjoints implique que les $q_\iota$ sont tous distincts. Il s'ensuit donc que $\{q_\iota\}_{\iota\in\aleph_1}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ qui est indénombrable, ce qui est absurde.

La démonstration qui précède peut aisément être adaptée de sorte à montrer que tout ensemble séparable vérifie la condition de chaîne dénombrable topologique. L'implication réciproque, elle, est fausse comme en témoigne le contre-exemple suivant : considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie co-dénombrable [4]. Cet espace topologique vérifie clairement la condition de chaîne dénombrable topologique car toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints est réduite à un seul élément. Toutefois, cet espace topologique n'est pas séparable car tout ensemble dénombrable $A \subset \mathbb{R}$ est d'intersection vide avec l'ouvert $\mathbb{R}\backslash A$.

Étant désormais acquis que la séparabilité est plus exigeante que la condition de chaîne dénombrable topologique, on conclut que la caractérisation suggérée par Souslin est plus souple que celle identifiée par Cantor. Est-elle trop souple pour n'admettre, à isomorphisme d'ordre près, qu'un seul modèle ? Là est toute la question.

Avant de présenter une esquisse de solution au problème soulevé par Souslin, il convient d'établir quelques éléments terminologiques visant à simplifier l'expression des idées dans la suite du présent article.

Soulignons d'abord que la réponse par l'affirmative au problème de Souslin constitue ce qui est passé à la postérité comme étant l'*hypothèse de Souslin* (sigle : SH). La réponse par la négative, quant à elle, revient à affirmer l'existence d'un ensemble non vide linéairement ordonné $(\mathbb{S}, \prec)$ non borné, dense, complet au sens de Dedekind qui vérifie la condition de chaîne dénombrable topologique et qui n'est pas isomorphe à $(\mathbb{R}, <)$. Un tel ensemble, s'il existe, est appelé une *droite de Souslin*.

# 4 Arbres de Souslin

Dans cette section, nous effectuerons un détour par la théorie des ensembles partiellement ordonnés afin de définir ce qu'est un arbre de Souslin.

**Définition 2.** *Soit $X$ un ensemble. Une relation binaire $\prec$ sur $X$ forme un ordre partiel strict si pour tout $x, y, z \in X$ on a :*

1. *Irréflexivité : $x \nprec x$.*
2. *Transitivité : si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$.*

4. Cela signifie que les ouverts sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ dont le complément relatif à $\mathbb{R}$ est dénombrable.

**Exemple 4.1.** *Étant donné un ensemble $X$, l'ensemble puissance $\mathscr{P}(X)$ muni de la relation binaire $\subset$ forme un ordre partiel strict.*

**Définition 3.** *Un arbre est un ensemble partiellement ordonné $(A, \prec)$ tel que pour tout $a \in A$, l'ensemble des prédécesseurs de $a$*

$$pr_A(a) := \{b \in A : \; b \prec a\}$$

*est bien ordonné*[5] *par la relation $\prec$.*

Le lecteur intéressé pourra se tourner vers [Jec03, Chapitre 9] s'il désire trouver un exposé introductif sur les arbres. Les abonnés au Bulletin de l'AMQ pourront quant à eux consulter [MG18] pour un survol rapide des rudiments de la théorie propre aux arbres.

**Définition 4.** *Un arbre $(A, \prec)$ est un arbre de Souslin si les trois conditions suivantes sont simultanément vérifiées :*

1. *La hauteur*[6] *de $A$ est $\aleph_1$ ;*
2. *Toute chaîne*[7] *de $A$ est au plus dénombrable ;*
3. *Toute antichaîne*[8] *de $A$ est au plus dénombrable.*

**Remarque 4.2.** *Les abonnés au Bulletin de l'AMQ ayant lu l'article [MG18] remarqueront sans doute une certain familiarité entre la définition des arbres de Souslin et celles des arbres d'Aronszajn. En y regardant de plus près, on vérifiera que seule la troisième condition distingue ces deux types d'arbres et que la troisième condition dans la définition des arbres de Souslin est strictement plus exigeante que celle dans la définition des arbres d'Aronszajn. Pour le dire autrement, tout arbre de Souslin est un arbre d'Aronszajn mais pas vice versa.*

La raison pour laquelle nous avons fait une digression pour aborder les arbres de Souslin réside dans le résultat suivant :

**Théorème 4.3.** *(Kurepa, 1935 [Kur35])*
*L'existence d'un arbre de Souslin implique celle d'une droite de Souslin.*

5. Un ensemble ordonné est dit *bien ordonné* si tout sous-ensemble non vide possède un plus petit élément. L'archétype de l'ensemble bien ordonné est $\mathbb{N}$. L'axiome du choix $\mathsf{AC}$ est équivalent au *principe du bon ordre* qui stipule que tout ensemble peut être muni d'une relation de bon ordre. Cette relation peut toutefois être hautement non triviale.

6. Étant donné un élément $a$ d'un arbre $(A, \prec)$, la *hauteur de $a$* est donnée par l'unique ordinal qui est isomorphe à $\mathrm{pr}_A(a)$. La *hauteur de l'arbre $A$, elle, correspond au plus petit ordinal qui est supérieur au suprémum des hauteurs des éléments de $A$.*

7. Une *chaîne* est un ensemble d'éléments d'un ensemble partiellement ordonné qui sont deux à deux comparables. C'est donc dire qu'il s'agit d'un sous-ensemble totalement ordonné.

8. Une *antichaîne* est un ensemble d'éléments d'un ensemble partiellement ordonné qui sont deux à deux incomparables. C'est donc dire qu'il s'agit d'un sous-ensemble qui est maximalement pas totalement ordonné.

*Esquisse de démonstration.* Supposons qu'il existe un arbre de Souslin $(\mathbb{A}, \prec)$. Moyennant une vérification, on peut supposer que :

- $\mathbb{A}$ a une unique racine [9] ;
- Tout noeud de $\mathbb{A}$ a une quantité infinie mais dénombrable de successeurs immédiats [10] ;
- $\mathbb{A}$ n'a pas de cul-de-sac [11] ;
- $\mathbb{A}$ a des limites uniques [12].

Sous les conditions susmentionnées, nous sommes assurés que toute paire de branches [13] de $\mathbb{A}$ coïncide initialement pour un certain nombre de noeuds avant de diverger définitivement.

L'idée maîtresse de la preuve consiste à doter l'ensemble $\mathbb{L}$ de toutes les branches de $\mathbb{T}$ d'une relation d'ordre total $<_{\mathbb{L}}$ judicieusement définie de sorte à assurer la non bornitude, la densité, la complétude au sens de Dedekind, la satisfaction de la condition de chaîne dénombrable topologique de même que – et c'est là l'élément crucial – la non séparabilité. Puisque l'ensemble des nombres réels muni de la topologie induite par la relation d'ordre total usuelle $<$ est séparable, il en découlera directement qu'il ne peut y avoir aucune bijection préservant l'ordre entre $(\mathbb{L}, <_{\mathbb{L}})$ et $(\mathbb{R}, <)$.

On l'aura compris, toute la difficulté réside dans la façon d'imposer un ordre total sur l'ensemble des branches de $\mathbb{A}$. Cet ordre se doit d'être construit localement, c'est-à-dire que l'on détermine laquelle de deux branches $b_1$ et $b_2$ est supérieure à l'autre en regardant le plus petit niveau où ces deux branches cessent de coïncider. Comme ce niveau ne peut, par hypothèse, être un ordinal limite, parler du plus grand niveau où les deux branches coïncident a du sens. Comme le dernier noeud commun à ces deux branches admet une quantité infinie mais dénombrable de successeurs, il suffit de plaquer un ordre vérifiant les propriétés désirées sur cet ensemble de successeurs pour que cet ordre induise naturellement un critère pour décider laquelle de $b_1$ et $b_2$ est supérieure à l'autre. $\square$

# 5 Principe $\diamondsuit$

Ayant montré que l'existence d'un arbre de Souslin implique celle d'une droite de Souslin, nous allons maintenant porter une attention accrue à la question de l'existence d'un arbre de Souslin. Il appert que construire un tel arbre n'est pas chose aisée, mais ce n'est pas chose impossible. Il faut toutefois garnir notre coffre à outils du puissant instrument que voici :

9. On appelle *racine* de $\mathbb{A}$ tout élément $a \in \mathbb{A}$ vérifiant $\mathrm{pr}_{\mathbb{A}}(a) = \emptyset$.
10. On dit que $a \in \mathbb{A}$ est le *prédécesseur immédiat* de $b \in \mathbb{T}$ s'il n'existe aucun élément $c \in \mathbb{A}$ vérifiant $a \prec c \prec b$. On dit alors de $b$ qu'il est le *successeur immédiat* de $a$.
11. On dit d'un arbre $(\mathbb{A}, \prec)$ qu'il n'a pas de cul-de-sac si pour tous ordinaux $\alpha < \beta$ strictement inférieurs à la hauteur de l'arbre, on a que pour tout noeud $a$ sur le niveau $\alpha$ il existe un noeud $b$ sur le niveau $\beta$ comptant $a$ parmi ses prédécesseurs.
12. On dit d'un arbre $(\mathbb{A}, \prec)$ qu'il a des *limites uniques* lorsque, pour tout ordinal limite $\alpha$ strictement inférieur à la hauteur de l'arbre, le fait que deux noeuds $a$ et $b$ sur le niveau $\alpha$ aient le même ensemble de prédécesseurs implique que $a = b$.
13. On appelle *branche* d'un arbre $(A, \prec)$ toute chaîne de longueur maximale.

**Principe $\diamondsuit$.** *Il existe une famille $\{A_\beta \subseteq \beta : \beta < \aleph_1\}$ telle que pour tout $X \subseteq \alpha_1$ l'ensemble $\{\beta < \aleph_1 : X \cap \beta = A_\beta\}$ rencontre tout ensemble fermé et non borné de $\aleph_1$.*

Le principe $\diamondsuit$ est une conséquence de l'axiome de constructibilité $\mathsf{V} = \mathsf{L}$ initialement étudié par Gödel [G40]. Plus précisément, on a la chaîne d'implications suivantes :

$$\mathsf{ZFC} + (\mathsf{V} = \mathsf{L}) \implies \diamondsuit \implies \mathsf{CH}.$$

C'est d'ailleurs en étudiant l'univers constructible $\mathsf{L}$ que le mathématicien germano-américain Ronald Björn Jensen a pu isoler le principe $\diamondsuit$ [Jen72].

Nous arrivons maintenant au résultat principal de la présente section :

**Théorème 5.1.** *(Jensen, 1972 [Jen72])*
*Dans la théorie $\mathsf{ZFC} + \diamondsuit$, il existe un arbre de Souslin.*

*Démonstration.* Voir [Jec03, Théorème 15.26]. □

**Corollaire 5.2.** *Dans la théorie $\mathsf{ZFC} + \diamondsuit$, il existe une droite de Souslin.*

# 6 Axiome de Martin

Dans cette section, nous présenterons brièvement un axiome introduit par les mathématiciens américains Donald A. Martin et Robert M. Solovay en 1970 [MS70], puis nous décrirons le lien qui unit cet axiome au problème de Souslin.

Afin de pouvoir énoncer l'axiome en question, il nous faut d'abord définir la classe d'énoncés que voici où $\kappa$ désigne un cardinal quelconque.

**Énoncé $\mathsf{MA}(\kappa)$.** *Étant donné un espace topologique compact et Hausdorff satisfaisant la condition de chaîne dénombrable topologique, alors $X$ n'est pas l'union d'au plus $\kappa$ ensembles nulle part denses*[14].

Notons qu'il découle directement du théorème de Baire (voir [Jec03, Théorème 4.8]) que l'énoncé $\mathsf{MA}(\aleph_0)$ est vrai. Quant à l'énoncé $\mathsf{MA}(2^{\aleph_0})$, lui, il est faux. En effet, l'ensemble compact et Hausdorff $[0, 1]$ est l'union de $2^{\aleph_0}$ singletons.

L'axiome introduit par Martin et Solovay – dont l'appellation reçue ne fait toutefois référence qu'au premier des deux mathématiciens et dont le sigle est $\mathsf{MA}$– stipule en quelque sorte que tout cardinal inférieur à celui du continu se comporte comme $\aleph_0$.

14. Rappelons qu'un ensemble est dit *nulle part dense* si sa fermeture est d'intérieur vide. À titre d'exemple, l'ensemble $\{(q, 1) \in \mathbb{R}^2 : q \in \mathbb{Q}\}$ est nulle part dense dans le $\mathbb{R}^2$ car sa fermeture (à savoir une droite parallèle à l'axe des abscisses) est d'intérieur vide dans le plan euclidien.

**Axiome de Martin.** *Pour tout cardinal $\kappa < 2^{\aleph_0}$, l'énoncé* $\mathsf{MA}(\kappa)$ *est vrai.*

Notons d'une part que l'axiome de Martin est cohérent avec $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$ . En effet, dans cette théorie, les seuls cardinaux strictement inférieurs à $2^{\aleph_0}$ sont $\aleph_0$ et les cardinaux finis. Or, nous avons vu que l'énoncé $\mathsf{MA}(\aleph_0)$ est vrai. D'autre part, l'axiome de Martin est également cohérent avec $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH}$. Ce résultat étonnant a été démontré par Martin et Solovay eux-mêmes dans leur article fondateur [MS70].

Ayant fait la lumière sur les liens unissant l'axiome de Martin à l'axiomatique usuelle de la théorie des ensembles ainsi qu'à l'hypothèse du continu, il convient maintenant de nous pencher plus avant sur les conséquences de cet axiome, particulièrement en ce qui a trait au problème de Souslin.

**Théorème 6.1.** *(Solovay–Tennenbaum, 1971 [ST71])*
*Dans la théorie $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$, il n'existe pas d'arbre de Souslin.*

*Démonstration.* Voir [Abi89, Théorème 1] pour une démonstration complète et accessible. $\square$

**Corollaire 6.2.** *Dans la théorie $\mathsf{ZFC} + \mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$, il n'existe pas de droite de Souslin.*

## 7 Conclusion

Il découle du théorème 5.1 qu'il existe un modèle de $\mathsf{ZFC}$ dans lequel il existe une droite de Souslin. Quant au théorème 6.1, il implique qu'il existe un modèle de $\mathsf{ZFC}$ dans lequel il n'y a aucune droite de Soulin. La conjonction de ces deux faits signifie que l'existence d'une droite de Souslin est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles $\mathsf{ZFC}$.

Non seulement l'hypothèse de Souslin est-elle indépendante des axiomes de la théorie des ensembles $\mathsf{ZFC}$, mais on peut montrer qu'elle est aussi indépendante de $\mathsf{CH}$ et de $\neg\mathsf{CH}$. À cet égard, on pourra consulter les références suivantes [Dev78, Jec03, Kan11].

## Bibliographie


[Abi89] Alexander Abian. The consistency and independence of Suslin's hypothesis. *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, 20(4) :517–526, 1989.

[Ber49] Joseph Bertrand. *Traité d'arithmétique.* Librairie Hachette et C., 1849.

[Can74] Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 77 :258–262, 1874.

[Can95] Georg Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.*, 46 :481–512, 1895.

[Coh63] Paul J. Cohen. The independence of the Continuum Hypothesis. I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 50 :1143–1148, 1963.

[Coh64] Paul J. Cohen. The independence of the Continuum Hypothesis. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 51 :105–110, 1964.

[Ded72] Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* F. Vieweg und sohn, 1872.

[Dev78] Keith J. Devlin. $\aleph_1$-trees. *Ann. Math. Logic*, 13(3) :267–330, 1978.

[G40] Kurt Gödel. *The Consistency of the Continuum Hypothesis.* Annals of Mathematics Studies, No. 3. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940.

[Igo96] Vladimir I. Igoshin. A short biography of Mikhail Yakovlevich Suslin. *Russian Mathematical Surveys*, 51(3) :371, 1996.

[Jec03] Thomas Jech. *Set Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[Jen72] R. Björn Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 4 :229–308 ; erratum, ibid. 4 (1972), 443, 1972. With a section by Jack Silver.

[Kan11] Akihiro Kanamori. Historical remarks on Suslin's problem. In *Set theory, arithmetic, and foundations of mathematics : theorems, philosophies*, volume 36 of *Lect. Notes Log.*, pages 1–12. Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2011.

[Kur35] Đuro Kurepa. *Ensembles ordonnées et ramifiés.* NUMDAM, [place of publication not identified], 1935.

[MG14] Frédéric Morneau-Guérin. L'hypothèse du continu : contexte et conséquences. Master's thesis, Université Laval, 2014.

[MG18] Frédéric Morneau-Guérin. Le lemme de König et les arbres d'Aronszajn. *Bulletin AMQ*, 58(2) :44–60, 2018.

[MS70] Donald A. Martin and Robert M. Solovay. Internal Cohen extensions. *Ann. Math. Logic*, 2(2) :143–178, 1970.

[Sil94] Charles L. Silver. Who invented Cantor's back-and-forth argument ? *Modern Logic*, 4(1) :74–78, 1994.

[Sou17] Mikhail Y. Souslin. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. *CR Acad. Sci. Paris*, 164(2) :88–91, 1917.

[Sou20] Mikhaïl Y. Souslin. Problème 3. *Fund. Math*, 1 :223, 1920.

[ST71] Robert M. Solovay and Stanley Tennenbaum. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. *Ann. of Math. (2)*, 94 :201–245, 1971.