

L'objectif du livre *An introduction to Proof via Inquiry-Based Learning* est de présenter au lecteur le processus de construction et d'écriture de preuves mathématiques formelles et rigoureuses. Ce livre a été conçu pour être utilisé comme ouvrage de référence pour un cours d'introduction aux preuves mathématiques d'un semestre que sont généralement appelés à suivre assez tôt dans leur cheminement les étudiants inscrits à un programme de premier cycle avec majeur ou mineur en mathématiques.

Le premier chapitre, dans lequel l'auteur fournit une déclaration d'intention et une présentation sommaire de la philosophie éducative qui sous-tend son ouvrage, est suivi de huit courts chapitres dans lesquels on traite successivement de logique propositionnelle et de logique quantificationnelle; des notions de base de la théorie des ensembles; du principe d'induction mathématique; des nombres réels dans des perspectives algébrique, puis analytique et topologique; de quelques notions de théorie élémentaires des nombres; de relations, de partitions et de fonctions; et, enfin, de cardinalité.

Tout au long du livre, l'auteur se fait avare d'explications. Le plus souvent, les définitions ne sont pas suivies d'exemples ou de contre-exemples comme c'est généralement le cas dans un ouvrage de ce type. Il est en effet attendu du lecteur qu'il intériorise les nouveaux concepts par lui-même. Les chapitres se résument donc à un enchaînement de définitions, de problèmes et d'énoncés de théorèmes (par exemple les lois de De Morgan généralisées, l'inégalité triangulaire, l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ , l'indénombrabilité de l'ensemble des nombres réels) que le lecteur sera ensuite appelé à essayer démontrer en complète autarcie.

L'auteur, Dana C. Ernst, qui est *associate professor* au Département de mathématiques et de statistique and à la Northern Arizona University à Flagstaff, se revendique explicitement (jusque dans le titre de son livre) comme un adepte d'une philosophie éducative appelée *Inquiry-Based Learning*. Suivant les préceptes de cette méthode d'enseignement centrée sur l'étudiant, les apprenants se voient confier des tâches qui les amènent à résoudre des problèmes, à conjecturer, à expérimenter, à explorer, à créer et à communiquer. L'auteur a tout à fait raison lorsqu'il soutient dans l'introduction qu'il s'agit là de compétences et d'habitudes d'esprit auxquelles les mathématiciens s'adonnent. Il oublie toutefois de mentionner que pour y parvenir, les mathématiciens compulsent des articles scientifiques, lisent des monographies et consultent des ouvrages de référence. Surtout, ils analysent les preuves de théorèmes démontrés par d'autres chercheurs afin d'en extraire la substance moelleuse et ainsi apprendre de nouvelles techniques et d'acquérir de nouvelles connaissances. En mettant exclusivement l'accent sur le processus de découverte mathématique, Ernst occulte donc les conditions qui rendent possible ce processus.

« Vous pouvez considérer ce livre comme un guide d'alpinisme. », nous dit l'auteur qui nous confie sa certitude d'avoir fourni « une liste de sommets à atteindre, indiquant parfois le point de départ du sentier ou le sentier à suivre » (p. 4). En cours de lecture, on développe plutôt l'impression que Ernst est un alpiniste qui, maintenant qu'il a accédé aux plus hauts sommets, s'est empressé de couper les cordes dont il s'est servi pendant son ascension et qui – du haut de sa montagne – cri à ceux qui tâchent de gravir les hauteurs à sa suite : « ne vous méprenez pas, le voyage est bien plus important que la destination » (p. 4). On aimerait bien le croire sur parole, mais il demeure difficile de se débarrasser de la désagréable impression que les conditions d'ascensions auxquelles nous sommes soumis sont infiniment plus périlleuses que celles dont s'est prévalu celui qui nous enjoint maintenant à apprécier le voyage. Si seulement il pouvait nous rassurer en nous apportant la preuve que nos tribulations additionnelles apporteront une valeur ajoutée. Mais en fait de preuve, il ne nous sera donné qu'une seule et unique référence : un commentaire de Sandra L. Laursen et Chris Rasmussen publié en 2019. Autant dire que se lancer dans l'aventure à la suite de Dana C. Ernst exige un véritable acte de foi.

Incidemment, et quelque peu ironiquement, les passages de ce livre qui se démarquent le plus par leur qualité et leur originalité sont ceux – par exemple à l'Annexe A – où l'auteur cherche à transmettre (très explicitement!) certaines des mœurs, des attitudes et des conventions propres à la pratique mathématique et la rédaction de preuves.

Enfin, une cinquantaine de citations de scientifiques, d'intellectuels et de militants parsemée çà et là donnent artificiellement un peu d'éclat à un ouvrage de moins de 170 pages autrement terne et guère remarquable.

The purpose of the book *An Introduction to Proof via Inquiry-Based Learning* is to present to the reader the process for crafting and writing formal and rigorous mathematical proofs. This work was designed to be used as a reference book for a half-year introductory course to mathematical proofs that students registered in an undergraduate program with a major or minor in mathematics are generally required to take relatively early in their academic career.

The first chapter, in which the author provides a declaration of intent and a summary introduction to the educational philosophy that underpins the book, is followed by eight short chapters dealing with propositional and quantificational logic; basic notions of set theory; the principle of mathematical induction; the real numbers from an algebraic, analytical and then topological perspectives; some notions of elementary number theory; relationships, partitions and functions; and lastly, cardinality.

Throughout the book, the author is stingy with explanations. Usually, definitions are not followed by examples or counterexamples as is generally the case in a book of this type. It is in fact expected that readers will internalize the new concepts themselves. The chapters can therefore be summarized as a sequence of definitions, problems and statements of theorems (for example, De Morgan's generalized laws, triangular inequality, the irrationality of  $\sqrt{2}$ , the uncountability of the set of real numbers) that the reader will then be called on to try and demonstrate completely self-sufficiently.

The author, Dana C. Ernst, an Associate Professor in the Department of Mathematics and Statistics at Northern Arizona University in Flagstaff, acknowledges (even in the title of his book) to be a proponent of an educational philosophy called Inquiry-Based Learning. According to the precepts of this student-centered teaching method, learners are assigned tasks that lead them to resolve problems, conjecture, experiment, explore, create and communicate. The author is quite correct in stating in the introduction of his book that these are skills and mental habits in which mathematicians are engaged. However, he forgets to take account that to get there, mathematicians painstakingly study scientific articles, read monographs and consult reference books. Primarily, they analyze the proofs of the theorems demonstrated by other researchers in order to extract the very heart of the matter and thereby learn new techniques and acquire new knowledge. By focusing exclusively on the mathematical discovery process, Ernst therefore obscures the conditions that make this process possible.

"You could view this book as a mountaineering guidebook," the author informs us, noting that he has provided "a list of mountains to summit, sometimes indicating which trailhead to start at or which trail to follow" (p. 4). As you read, however, you develop the impression that Ernst is a mountaineer who, now that he has climbed the highest summits, has rushed to cut the ropes that he used during his climb and, from the top of the mountain, is shouting to those striving to climb to the same heights after him, "[m]ake no mistake, the journey is vastly more important than the destinations" (p. 4). Although you'd like to take his word for it, it remains difficult to get rid of the disagreeable impression that the climbing conditions to which we are subject are infinitely more perilous than those experienced by the author who is now encouraging us to appreciate the journey. If only he could reassure us by providing proof that our additional tribulations will provide added value. But as evidence, we will only be given a single reference, a research commentary from Sandra L. Laursen and Chris Rasmussen published in 2019. Launching into this adventure after Dana C. Ernst thus requires a genuine act of faith.

Incidentally and somewhat ironically, the passages in this book that stand out the most due to their quality and originality are those – for example in Appendix A – where the author seeks to (very explicitly!) transmit some of the mores, attitudes and conventions that are specific to practice of mathematics and proof writing.

Lastly, around 50 quotations from scientists, academics and activists are scattered here and there and artificially inject some excitement into a work of less than 170 pages that is otherwise unremarkable.