Sur une question posée par Erdős au sujet des matrices doublement stochastiques

Frédéric Morneau-Guérin
Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

Réunion d'hiver 2022 de la Société mathématique du Canada
Toronto
Matrix Analysis and Operator Theory

5 décembre 2022

Cette présentation est le fruit d’un travail conjoint avec Ludovick Bouthat (Laval) et Javad Mashreghi (Laval).

Une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels $A = [a_{i,j}]$ est *doublement stochastique* (ou *bistochastique*) si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies

1. $a_{i,j} \geq 0 \qquad (1 \leq i, j \leq n)$;
2. $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1, \qquad (1 \leq j \leq n)$;
3. $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \qquad (1 \leq i \leq n)$.

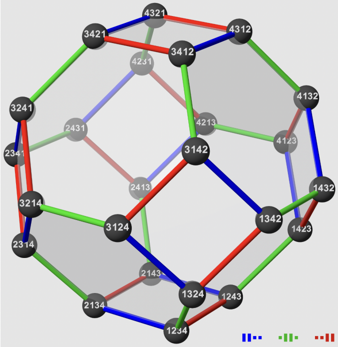
Remarque. Les matrices doublement stochastiques sont les matrices stochastiques dont la transposée est stochastique.

Exemples.

- La matrice identité I_n ;
- Plus généralement, toutes les matrices de permutation ;
- La matrice suivante

$$J_n = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème de Birkhoff-von Neumann. (1946)
L'ensemble des matrices doublement stochastiques d'ordre n, noté Ω_n, est un polytope convexe dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Ce polytope est l'enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation d'ordre n.



Le *permanent* d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]$ d'ordre n est :

$$\text{perm}(A) := \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Remarque. La définition est très proche de celle du déterminant d'une matrice :

$$\det(A) := \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

- B. L. van der Waerden (1926) : Quelle est la valeur minimale du permanent d'une matrice doublement stochastique d'ordre n ?
- La matrice J_n est l'unique candidat naturel pour ce minimum et $\text{perm}(J_n) = \frac{n!}{n^n}$.
- *Conjecture de van der Waerden* :

$$(A \in \Omega_n \text{ et } A \neq J_n) \Longrightarrow \left(\text{perm}(A) > \frac{n!}{n^n}\right).$$

- Cette conjecture a été prouvée de façon indépendante par G. P. Egorychev (1981) et D. I. Falikman (1981).

Erdős ($\approx$ 1959) : Si la conjecture de van der Waerden est vraie alors

1. Il existe une permutation σ telle que

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \geq \frac{1}{n^n};$$

2. Toute matrice doublement stochastique a une “diagonale” dont la “trace” est supérieure ou égale à 1.

Théorème. (Marcus–Ree, 1959).
Étant donné $A = [a_{i,j}]$ une matrice doublement stochastique d'ordre n, il existe une permutation σ telle que

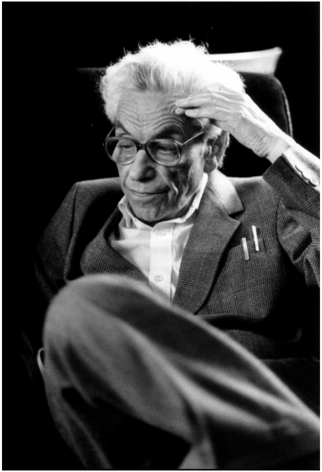
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Corollaire.

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 \;\leq\; \mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(A),$$

où $\mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(A) := \max_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.

Sous quelle(s) condition(s) a-t-on $\|A\|_{\mathsf{F}}^{2} = \mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(A)$?



Cas $n = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{bmatrix},$$

où $0 \leq t \leq 1$. On a

- $\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = 2t^2 + 2(1-t)^2$;
- $\mathrm{tr}_{\mathsf{max}}(A) = \max\{2t, 2(1-t)\} = \begin{cases} 2(1-t), & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 2t, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$.

On vérifie que $\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \mathrm{tr}_{\mathsf{max}}(A) \iff t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Ça correspond respectivement aux matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ et } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

UNIVERSITÉ TÉLUQ

Cas général.

- Loin d'être aussi simple ;
- Toute matrice de permutation P vérifie

$$\|P\|_{\mathsf{F}}^2 \;=\; \mathrm{tr}_{\max}(P) \;=\; n;$$

- La matrice J_n vérifie

$$\|J_n\|_{\mathsf{F}}^2 \;=\; \mathrm{tr}_{\max}(J_n) \;=\; 1.$$

Proposition. (Marcus–Ree, 1959).
Soit $A = [a_{i,j}]$ une matrice doublement stochastique d'ordre n avec $a_{i,j} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Si $A \neq J_n$, alors

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 \; < \; \mathrm{tr}_{\max}(A).$$

On note par $\oplus$ la somme directe de deux matrices, à savoir $A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Proposition. (Marcus–Ree, 1959).
Étant donné P et Q des matrices de permutation d'ordre n et $n_1, \ldots, n_r$ des entiers positifs vérifiant $n_1 + \cdots + n_r = n$, alors la matrice doublement stochastique d'ordre n

$$A = P(J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_r})Q$$

vérifie

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 \; = \; \mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(A).$$

La proposition qui précède suggère que les matrices doublement stochastiques d'ordre n vérifiant

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 \;=\; \mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(A)$$

pourraient être celles de la forme

$$P(J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_r})Q,$$

pour des matrices de permutation P et Q et des entiers positifs $n_1, \ldots, n_r$ vérifiant $n_1 + \cdots + n_r = n$.

Contre-exemple.
La matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

n'est pas de la forme $P(J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_r})Q$. Pourtant

$$\|S\|_{\mathsf{F}}^2 \;=\; \frac{5}{4} \;=\; \mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(S).$$

Mince consolation.

S se factorise en matrices de la forme $P(J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_r})Q$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nous y reviendrons...

Théorème. (Bouthat–Mashreghi–M-G, 2023)
Soit A une matrice doublement stochastique d'ordre 3. L'égalité $\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \mathrm{tr}_{\max}(A)$ est vérifiée si et seulement s'il existe des matrices de permutation P et Q telles que PAQ est l'une ou l'autre des matrices suivantes :

(i)
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

(ii)
$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix};$$

(iii)
$$I_1 \oplus J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

(iv)
$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

(v)
$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix};$$

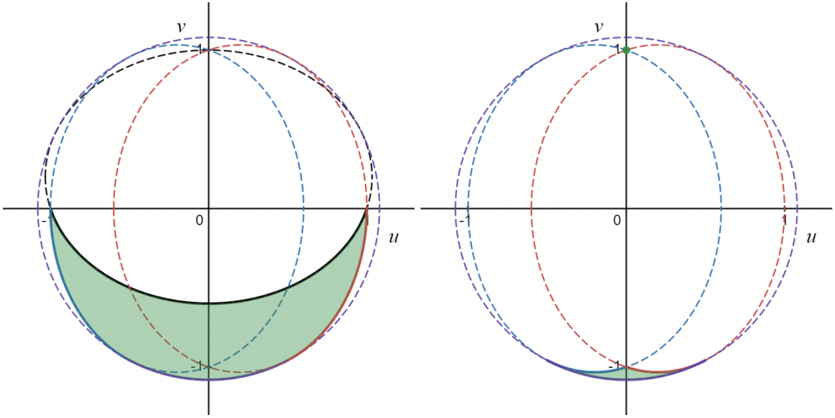
(vi)
$$R = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

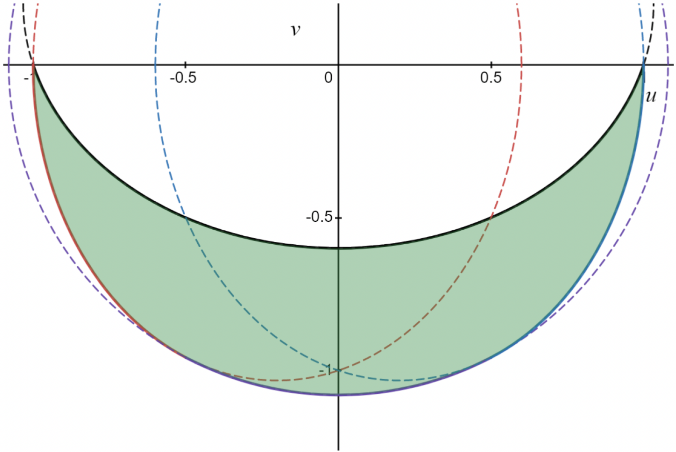
Lemme.
Soit A une matrice doublement stochastique d'ordre 3. L'égalité $\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{i,\sigma(i)}$ est vérifiée pour une certaine permutation σ si et seulement l'une ou l'autre des trois conditions suivantes est vérifiée :

- $A = J_3$;
- Il existe des matrices de permutation P et Q et des paramètres $(u, v) \in \mathscr{U}_{\pm}$ tels que

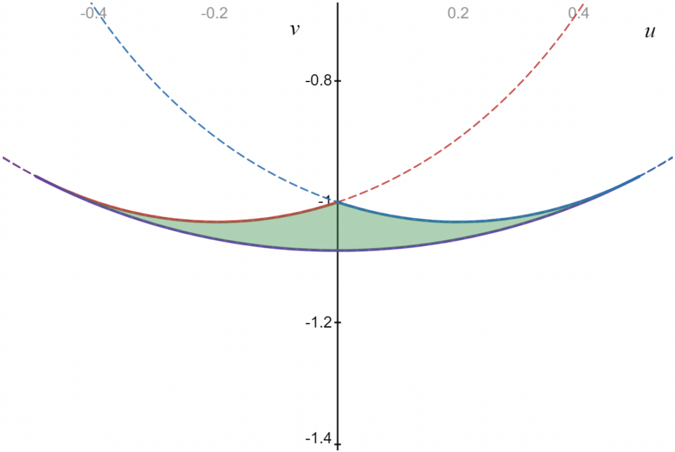
$$PAQ = \begin{bmatrix} \frac{v+u+3}{4} & \frac{1-2v\pm\sqrt{7-6u^2-6v^2}}{8} & * \\ 0 & \frac{v-u+3}{4} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Les régions $\mathscr{U}_-$ (gauche) et $\mathscr{U}_+$ (droite).





v
u
-1
-0.5
0
0.5
-0.5
-1


-0.4
-0.2
0.2
0.4
v
u
-0.8
-1
-1.2
-1.4

Idée de la preuve.
Une matrices doublement stochastiques d'ordre 3 vérifie

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{i,\sigma(i)}$$

si et seulement si

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \operatorname{tr}(AP)$$

pour une certaine matrice de permutation P.

Comme la norme de Frobenius est invariante par permutation, c'est équivalent à

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \operatorname{tr}(A).$$

Idée de la preuve (suite).

$$A = \begin{bmatrix} a & c & 1-a-c \\ 0 & b & 1-b \\ 1-a & 1-b-c & a+b+c-1 \end{bmatrix}.$$

Idée de la preuve (suite).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{v+u+3}{4} & w & \frac{1-v-u}{4} - w \\ 0 & \frac{v-u+3}{4} & \frac{1-v+u}{4} \\ \frac{1-v-u}{4} & \frac{1-v+u}{4} - w & \frac{v+1}{2} + w \end{bmatrix}.$$

Remarque.
Le lemme sub-mentionné caractérise les matrices doublement stochastiques d'ordre 3 vérifiant $\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \mathrm{tr}(AP)$ pour une certaine permutation P. Or, celles-ci ne satisfont pas nécessairement la condition plus exigeante qui avait captivé l'attention d'Erős, à savoir $\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \mathrm{tr}_{\max}(A)$.

La matrice double stochastique suivante, par exemple,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{39}{80} & \frac{31}{80} - \frac{\sqrt{77/2}}{80} & \frac{10}{80} + \frac{\sqrt{77/2}}{80} \\ 0 & \frac{39}{80} & \frac{41}{80} \\ \frac{41}{80} & \frac{10}{80} + \frac{\sqrt{77/2}}{80} & \frac{29}{80} - \frac{\sqrt{77/2}}{80} \end{bmatrix}$$

vérifie

$$\|A\|_{\mathsf{F}}^2 = \mathrm{tr}(A) < \mathrm{tr}_{\max}(A).$$

En conclusion...

Nous avons vu que

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

n'est pas de la forme $P(J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_r})Q$, mais

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Question. Étant donné $A = P_1(J_{n_1} \oplus \cdots \oplus J_{n_r})Q_1$ et $B := P_2(J_{m_1} \oplus \cdots \oplus J_{m_s})Q_2$, où P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des matrices de permutation et $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s$ sont des entiers positifs vérifiant

$$n_1 + \cdots + n_r \;=\; n \;=\; m_1 + \cdots + m_s.$$

Sous quelle(s) condition(s) a-t-on

$$\|AB\|_{\mathsf{F}}^2 \;=\; \mathsf{tr}_{\mathsf{max}}(AB) \; ?$$

Cette question n'est pas triviale. Le produit de deux matrices de cette forme ne vérifie pas toujours la condition.
Soient $A := J_3 \oplus J_3 \oplus J_3$ et $B := J_2 \oplus J_3 \oplus J_4$. Alors

$$AB = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 0 & 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 0 & 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Or, on peut vérifier que

$$\|AB\|_{\mathsf{F}}^2 = \frac{37}{18} < \frac{25}{12} = \mathrm{tr}_{\mathrm{max}}(AB).$$

UNIVERSITÉ TÉLUQ

Références.

- Bouthat, Ludovick ; Mashreghi, Javad et Morneau-Guérin, Frédéric (soumis). On the question of Erdős on doubly stochastic matrices.
- Marcus , Marvin ; et Ree, Rimhak. (1959). Diagonals of doubly stochastic matrices. *The Quarterly Journal of Mathematics, 10*(1), 296-302.