Outils de mesure de la performance dans la réalisation d'une tâche de prise de décision dynamique dans un micromonde

Les ateliers PolitiCo

Frédéric Morneau-Guérin

3 octobre 2022

Département Éducation, Université TÉLUQ & Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

UNIVERSITÉ TÉLUQ

Introduction


KEEP
CALM
AND
LOWER YOUR
EXPECTATIONS
KeepCalmAndPosters.com

Benoît Béchard

Ses travaux portent sur l'impact de l'intuition (heuristiques de jugement et biais cognitifs) dans la prise de décision dynamique issue

d'environnements complexes, notamment dans le domaine politique.

Intrants : des êtres humains soumis à des choix socio-économico-politiques.

Extrants : Pour chaque participant,

- x : pourcentage de suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
- y : solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
- z : statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

Développement

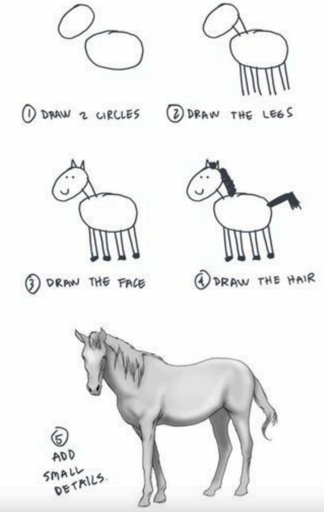
Besoin : Pouvoir comparer la performance globale de candidats.

Moyen : Indice de performance relatif;

$$\begin{aligned} F: \quad [0,1] \times (-\infty, \infty) \times \{\text{battu}, \text{réélu}\} &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x, y, z) &\mapsto \text{Indice de performance} \end{aligned}$$

Contrainte : Doit vérifier certains comportements (*ceteris paribus*). Nous y reviendrons...

Principe fondamental : l'amélioration itérative



Indicateur de performance, version brute :

$$F(x, y, z) := P(x)B(y)S(z),$$

où

- $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
- $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
- $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

Indicateur de performance, version brute :

$$F(x, y, z) := P(x)B(y)S(z),$$

où

1. $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
2. $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
3. $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

Fonction *indicatrice de performance*, version raffinée :

$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)},$$

où

1. $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
2. $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
3. $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

Fonction *indicatrice de performance*, version raffinée :

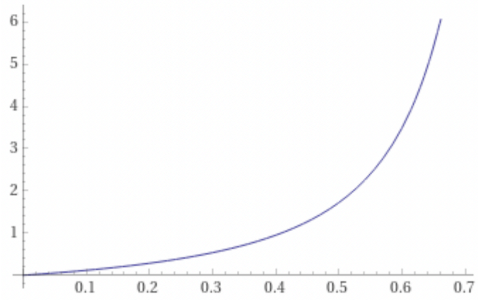
$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)},$$

où

1. $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
2. $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
3. $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

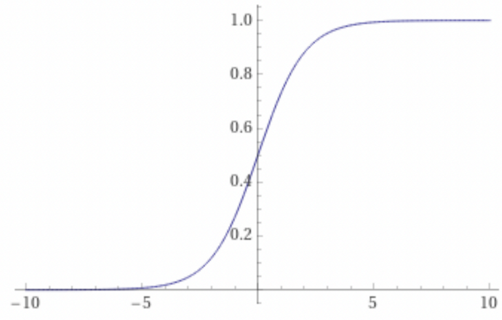
Fonction *pourcentage des suffrages recueillis*, version brute :

$$P : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,\infty) \\ x & \mapsto & \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) - 1 \end{array}$$



Fonction *solde budgétaire*, version très très brute :

$$\begin{aligned} B : \quad (-\infty, \infty) &\longrightarrow (0, 1) \\ y &\mapsto \frac{1}{1+\exp(-y)} \end{aligned}$$



Fonction *statut post-électoral*, version brute :

$$\begin{aligned} S : \quad \{\text{battu}, \text{réélu}\} &\longrightarrow [0,1] \\ z &\mapsto \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases} \end{aligned}$$

où $m < 1$.

Récapitulatif.

$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{B(x)P(y)S(z)},$$

où

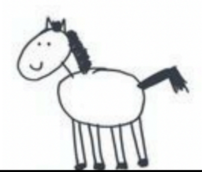
1. $P(x) := \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{1}{1+\exp(-y)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$ où $m < 1$.

Récapitulatif.

$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{B(x)P(y)S(z)},$$

où

1. $P(x) := \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{1}{1+\exp(-y)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$ où $m < 1$.



Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.

Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.

Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.

Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des x plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des x plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des x plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.
3. Fixer le malus $S(z)$ de façon moins arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des x plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.
3. Fixer le malus $S(z)$ de façon moins arbitraire.
4. Veiller à ce que les résultats non aberrants se situent tous dans un intervalle donné.

Comment réaliser l'objectif suivant ?

Veiller à ce que les résultats non aberrants se situent tous dans un intervalle donné.

1. Introduire un paramètre dans la définition de $P(x)$ et l'ajuster de sorte que tout pourcentage des suffrages recueillis jugé *non aberrant* retourne une valeur entre 0 et $2\sqrt{2}$. **(possible, mais subtil)**
2. Introduire un paramètre dans la définition de $B(y)$ faisant en sorte que tout solde budgétaire retourne une valeur entre 0 et $2\sqrt{2}$. **(facile)**

Ce faisant, la fonction $F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)}$ prendra des valeurs dans l'intervalle $[0, 2]$ pour tout triplet (x, y, z) ne contenant aucune valeur aberrante.

Mise en application de la solution :

$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{B(x)P(y)S(z)},$$

où

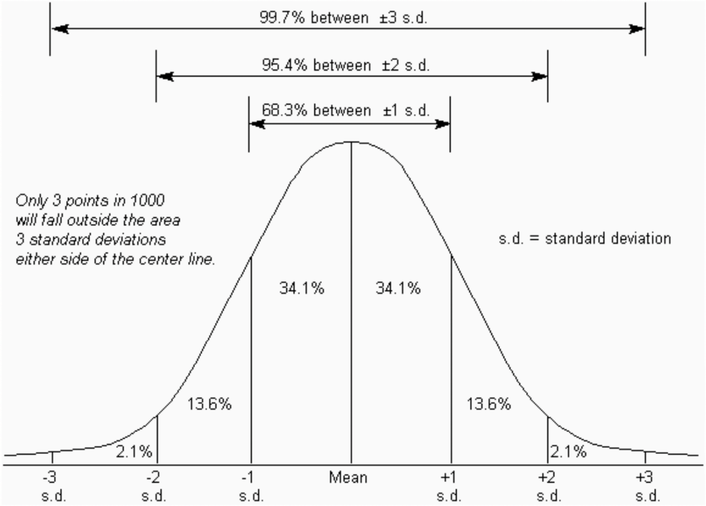
1. $P(x) := \exp\left(c\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{2\sqrt{2}}{1+\exp(-y)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$ où $m < 1$.

Comment réaliser l'objectif suivant ?

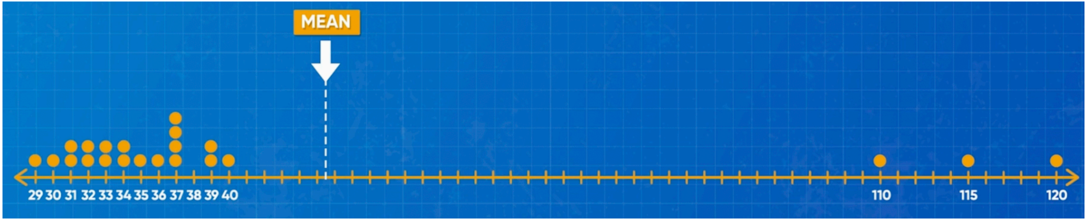
Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des x plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.

- Fixer c de sorte que $P(\text{moy} + 3\text{s.d.}) = 2\sqrt{2}$.

Digression statistique :

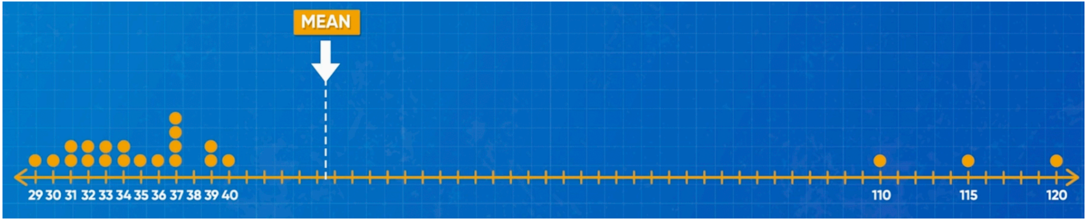


Digression statistique :



La moyenne est sensible aux résultats aberrants.

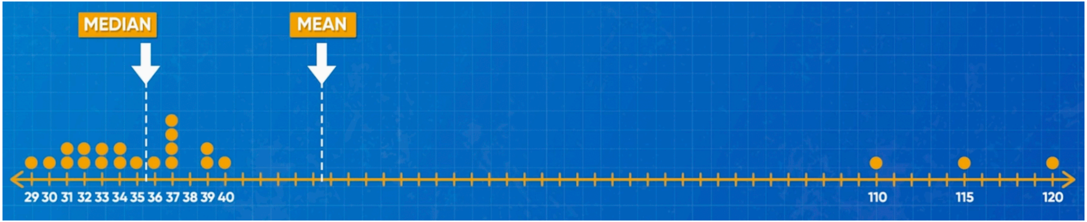
Digression statistique :



La moyenne est sensible aux résultats aberrants… et conséquemment l'écart-type l'est aussi.

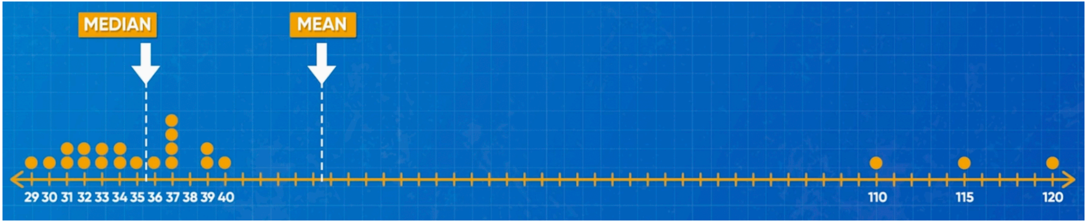
$$\text{s.d.} := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \text{moy})^2}.$$

Digression statistique :



La médiane l'est beaucoup moins.

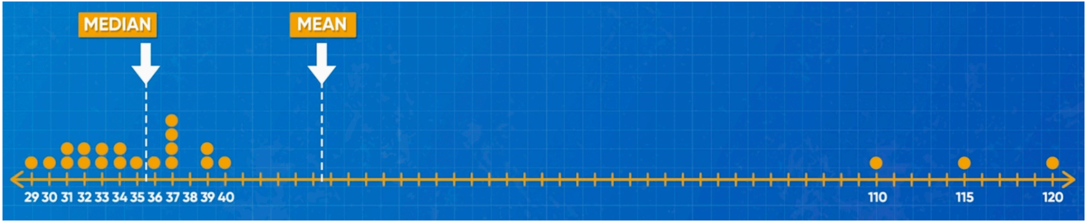
Digression statistique :



La médiane l'est beaucoup moins… et conséquemment la *distribution absolue médiane* l'est moins elle aussi.

$$\text{MAD} := \text{MEDIAN}\left|x_i - \text{med}\right|.$$

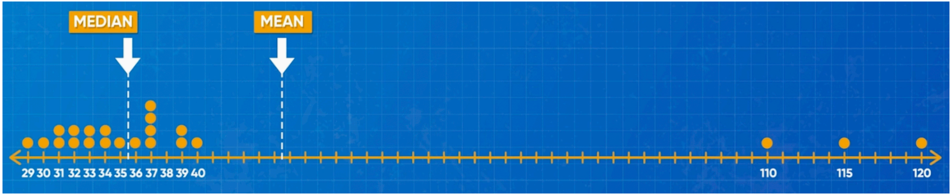
Digression statistique :



Ex : 29, 30, 31, 31, 32, 32, 33, 33, 34, 34, 35, 36, 37, 37, 37, 37, 39, 39, 40, 110, 115, 120

$$\text{moy} = 45.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 27.8,$$
$$\text{med} = 35.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 3.5.$$

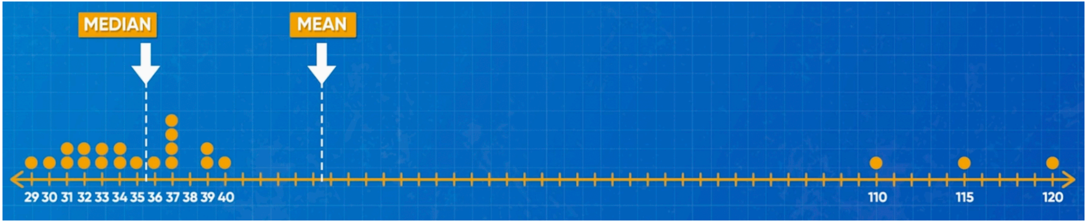
Digression statistique :



$$\text{moy} = 45.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 27.8,$$
$$\text{med} = 35.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 3.5.$$

$$\text{moy} - \text{s.d.} = 17.7 \quad \& \quad \text{moy} + \text{s.d.} = 73.3$$
$$\text{med} - \text{MAD} = 32 \quad \& \quad \text{med} + \text{MAD} = 39.$$

Digression statistique :



$\text{moy} = 45.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 27.8,$

$\text{med} = 35.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 3.5.$

$\text{moy} - \text{s.d.} = 17.7 \quad \& \quad \text{moy} + \text{s.d.} = 73.3$

$\text{med} - \text{MAD} = 32 \quad \& \quad \text{med} + \text{MAD} = 39$

$\text{med} - 3\ \text{MAD} = 25 \quad \& \quad \text{med} + 3\ \text{MAD} = 46.$

Comment réaliser l'objectif suivant ?

Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des x plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.

- Fixer c de sorte que $P(\text{med} + 3\text{MAD}) = 2\sqrt{2}$.

Mise en application de la solution :

Posons $\widetilde{x} := \text{med} + 3\text{MAD}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
S(\widetilde{x}) = 2\sqrt{2} \iff \quad & \exp\left(c\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right)\right) - 1 = 2\sqrt{2} \\
\iff \quad & \exp\left(c\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right)\right) = 2\sqrt{2} + 1 \\
\iff \quad & c\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right) = \log(2\sqrt{2} + 1) \\
\iff \quad & c = \frac{\log(2\sqrt{2}+1)}{\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right)}.
\end{aligned}
$$

Comment réaliser l'objectif suivant ?

Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.

- Ajouter un paramètre a dans la définition de $B(y)$:

$$B(y) := \frac{2\sqrt{2}}{1 + \exp(-ay)}.$$

- Fixer a de sorte que $B(y)$ retourne des valeurs *du même ordre de grandeur* que les valeurs de $P(x)$ pour les petites valeurs non aberrantes de y.

Mise en application de la solution :

Posons $\widetilde{x} := \text{med}_x - 1.5\text{MAD}_x$ et $\widetilde{y} := \text{med}_y - 1.5\text{MAD}_y$. On veut que $B(\widetilde{y}) = P(\widetilde{x})$.

$$\begin{aligned}
B(\widetilde{y}) = P(\widetilde{x}) \iff & \frac{2\sqrt{2}}{1+\exp(-a\widetilde{y})} = P(\widetilde{x}) \\
\iff & \frac{2\sqrt{2}}{P(\widetilde{x})} = 1+\exp(-a\widetilde{y}) \\
\iff & \frac{2\sqrt{2}}{P(\widetilde{x})} - 1 = \exp(-a\widetilde{y}) \\
\iff & \log\left(\frac{2\sqrt{2}}{P(\widetilde{x})} - 1\right) = -a\widetilde{y} \\
\iff & a = -\frac{1}{\widetilde{y}}\log\left(\frac{2\sqrt{2}}{P(\widetilde{x})} - 1\right).
\end{aligned}$$

Comment réaliser l'objectif suivant ?

Fixer le malus $S(z)$ de façon moins arbitraire.

- Fixer le malus de sorte à ce qu'un candidat ayant *sur-performé* mais ayant été battu voit son indice de performance descendre au niveau de celui d'un candidat ayant *sous-performé* mais ayant été réélu.
- Reste ensuite à préciser ce qu'on entend par *sur-performer* et *sous-performer*.

Mise en application de la solution :

- Exemple 1 :
  $F(\text{med}_x + \text{MAD}_x, \text{med}_y + \text{MAD}_y), 0) = F(\text{med}_x - \text{MAD}_x, \text{med}_y - \text{MAD}_y), 1).$
- Exemple 2 :
  $F(\text{med}_x + \frac{1}{2}\text{MAD}_x, \text{med}_y + \frac{1}{2}\text{MAD}_y), 0) = F(\text{med}_x - \frac{1}{2}\text{MAD}_x, \text{med}_y - \frac{1}{2}\text{MAD}_y), 1).$
- Exemple 3 :
  $F(\text{med}_x + \frac{1}{4}\text{MAD}_x, \text{med}_y + \frac{1}{4}\text{MAD}_y), 0) = F(\text{med}_x - \frac{1}{4}\text{MAD}_x, \text{med}_y - \frac{1}{4}\text{MAD}_y), 1).$

Conclusion

Récapitulatif final.

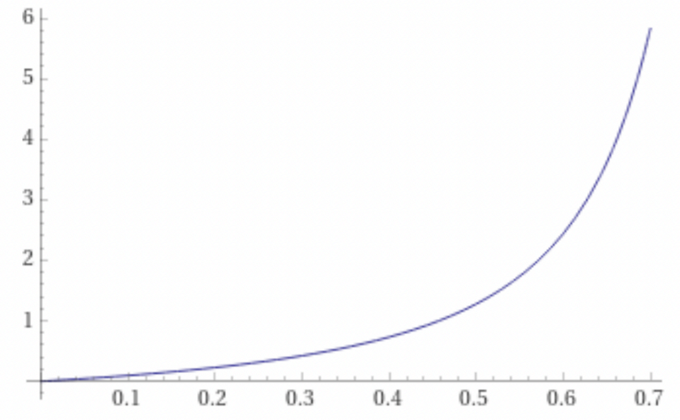
$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)},$$

où

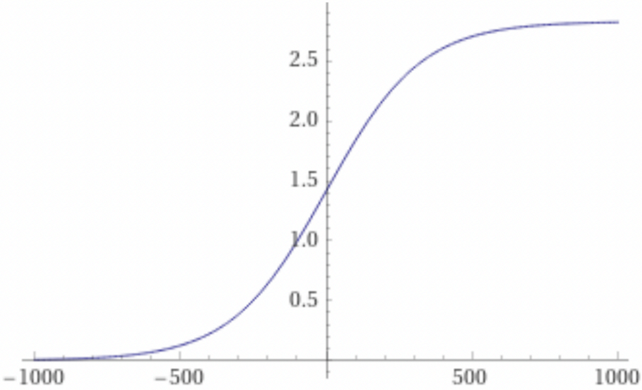
1. $P(x) := \exp\left(c\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{2\sqrt{2}}{1+\exp(-ay)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$

où les valeurs de a, c et m sont déterminées de la façon décrite.

Exemple de $P(x)$ où c a été calculé avec des vraies données :



Exemple de $B(y)$ où a a été calculé avec des vraies données :



Merci !

Des questions?