# Applications formelles pour mesurer la performance dans la réalisation d’une tâche de prise de décision dynamique à travers un micromonde

Les séminaires Co-DOT en sciences cognitives

Frédéric Morneau-Guérin

3 octobre 2022

Département Éducation, Université TÉLUQ & Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

UNIVERSITÉ TÉLUQ

# Introduction


KEEP
CALM
AND
LOWER YOUR
EXPECTATIONS
KeepCalmAndPosters.com

## Benoît Béchard

Ses travaux portent sur l'impact de l'intuition (heuristiques de jugement et biais cognitifs) dans la prise de décision dynamique issue d'environnements complexes, notamment dans le domaine politique.

**Intrants :** des êtres humains soumis à des choix socio-économico-politiques.

**Extrants :** Pour chaque participant,

- $x$ : pourcentage de suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
- $y$ : solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
- $z$ : statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

# Développement

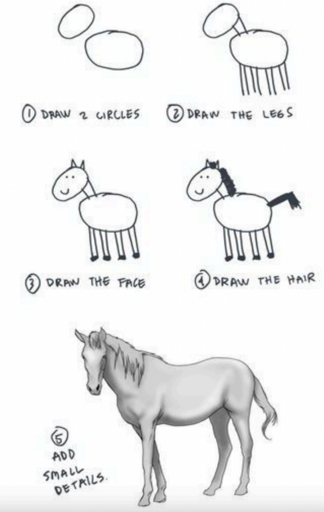
**Besoin :** Pouvoir comparer la performance globale de candidats.

**Moyen :** Indice de performance relatif;

$$\begin{array}{rcccc} F: & [0,1] \times (-\infty,\infty) \times \{\text{battu}, \text{réélu}\} & \longrightarrow & [0,\infty) \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \text{Indice de performance} \end{array}$$

**Contrainte :** Doit vérifier certains comportements (*ceteris paribus*). Nous y reviendrons...

# Principe fondamental : l'amélioration itérative



*Indicateur de performance*, version brute :

$$F(x, y, z) := P(x)B(y)S(z),$$

où

- $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
- $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
- $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

*Indicateur de performance*, version brute :

$$F(x, y, z) := P(x)B(y)S(z),$$

où

1. $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
2. $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
3. $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

Fonction *indicatrice de performance*, version raffinée :

$$F(x,y,z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)},$$

où

1. $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0,1]$.
2. $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
3. $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

Fonction *indicatrice de performance*, version raffinée :

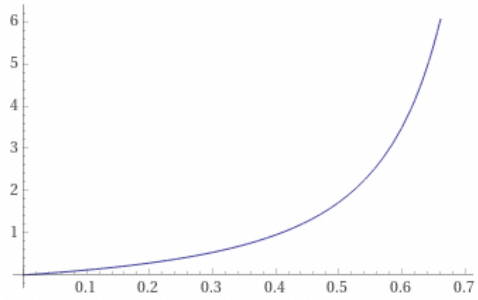
$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)},$$

où

1. $P(x)$ modélise la performance en fonction du pourcentage des suffrages recueillis $\in [0, 1]$.
2. $B(y)$ modélise la performance en fonction du solde budgétaire $\in (-\infty, \infty)$.
3. $S(z)$ modélise la performance en fonction du statut post-électoral $\in \{\text{battu}, \text{réélu}\}$.

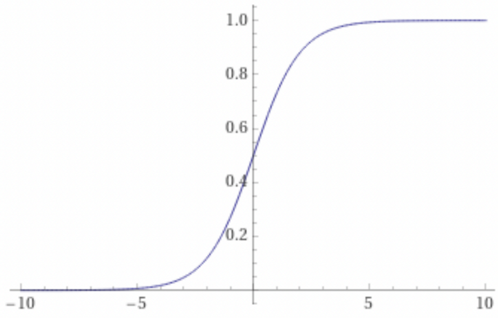
Fonction *pourcentage des suffrages recueillis*, version brute :

$$\begin{aligned} P : \quad [0,1] &\longrightarrow [0,\infty) \\ x &\mapsto \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) - 1 \end{aligned}$$



Fonction *solde budgétaire*, version très très brute :

$$\begin{array}{rccc} B: & (-\infty, \infty) & \longrightarrow & (0,1) \\ & y & \longmapsto & \frac{1}{1+\exp(-y)} \end{array}$$



Fonction *statut post-électoral*, version brute :

$$S : \{\text{battu}, \text{réélu}\} \longrightarrow [0,1]$$
$$z \mapsto \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$$

où $m < 1$.

## Récapitulatif.

$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{B(x)P(y)S(z)},$$

où

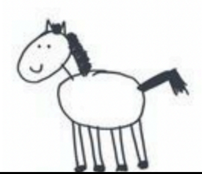
1. $P(x) := \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{1}{1+\exp(-y)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$ où $m < 1$.

# Récapitulatif.

$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{B(x)P(y)S(z)},$$

où

1. $P(x) := \exp\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{1}{1+\exp(-y)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$ où $m < 1$.



Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.

Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.

Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.

Principaux problèmes à régler:

1. $P(x)$, qui est non-bornée, risque de masquer l'impact de $B(y)$ et $S(z)$.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des $x$ plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. $B(y)$ tend possiblement vers ses valeurs extrémales trop rapidement.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des $x$ plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.
3. Le malus $m < 1$ dans $S(z)$ est complètement arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des $x$ plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.
3. Fixer le malus $S(z)$ de façon moins arbitraire.
4. Il n'y a aucun critère évident permettant d'identifier les performances aberrantes.

Objectifs:

1. Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des $x$ plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.
2. Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.
3. Fixer le malus $S(z)$ de façon moins arbitraire.
4. Veiller à ce que les résultats non aberrants se situent tous dans un intervalle donné.

Comment réaliser l'objectif suivant ?

*Veiller à ce que les résultats non aberrants se situent tous dans un intervalle donné.*

1. Introduire un paramètre dans la définition de $P(x)$ et l'ajuster de sorte que tout pourcentage des suffrages recueillis jugé *non aberrant* retourne une valeur entre 0 et $2\sqrt{2}$. **(possible, mais subtil)**
2. Introduire un paramètre dans la définition de $B(y)$ faisant en sorte que tout solde budgétaire retourne une valeur entre 0 et $2\sqrt{2}$. **(facile)**

Ce faisant, la fonction $F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)}$ prendra des valeurs dans l'intervalle $[0, 2]$ pour tout triplet $(x, y, z)$ ne contenant aucune valeur aberrante.

## Mise en application de la solution :

$$F(x,y,z) := \sqrt[3]{B(x)P(y)S(z)},$$

où

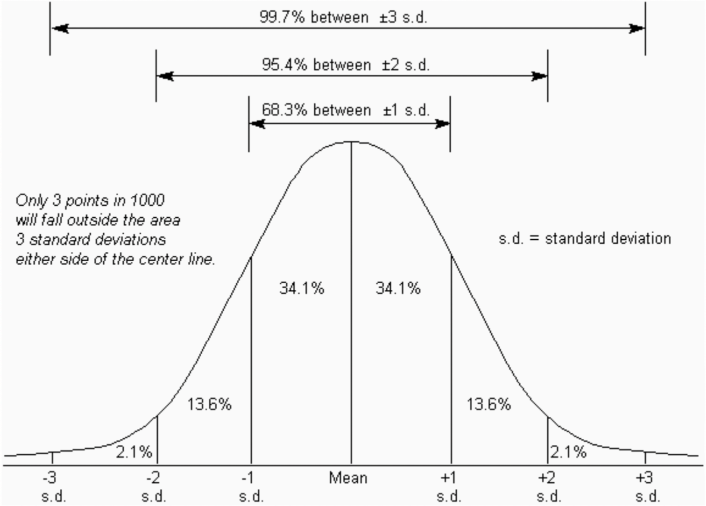
1. $P(x) := \exp\left(c\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{2\sqrt{2}}{1+\exp(-y)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$ où $m < 1$.

**Comment réaliser l'objectif suivant ?**

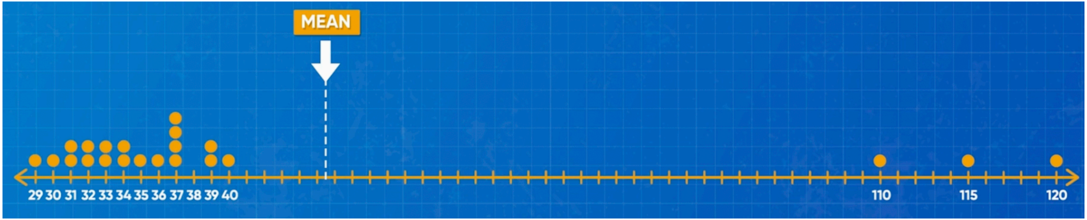
*Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des $x$ plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.*

- Fixer $c$ de sorte que $P(\text{moy} + 3\text{s.d.}) = 2\sqrt{2}$.

# Digression statistique :

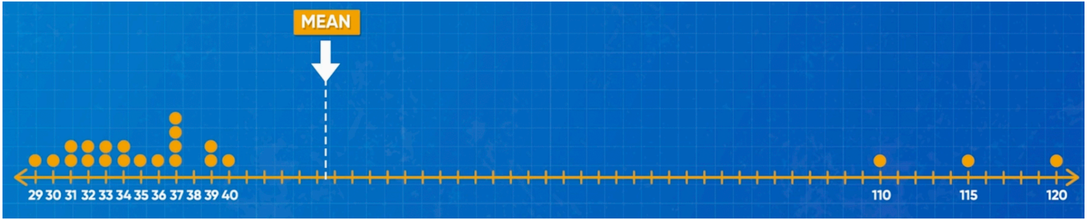


# Digression statistique :




La moyenne est sensible aux résultats aberrants.

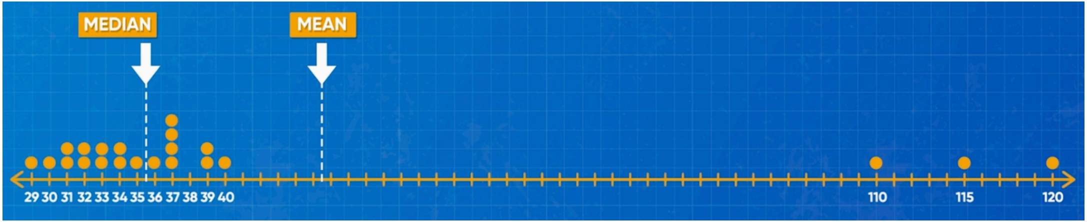
## Digression statistique :




La moyenne est sensible aux résultats aberrants... et conséquemment l'écart-type l'est aussi.

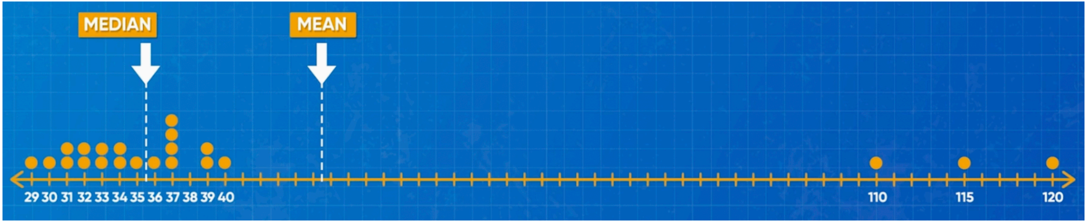
$$\text{s.d.} := \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \text{moy})^2}.$$

## Digression statistique :




La médiane l'est beaucoup moins.

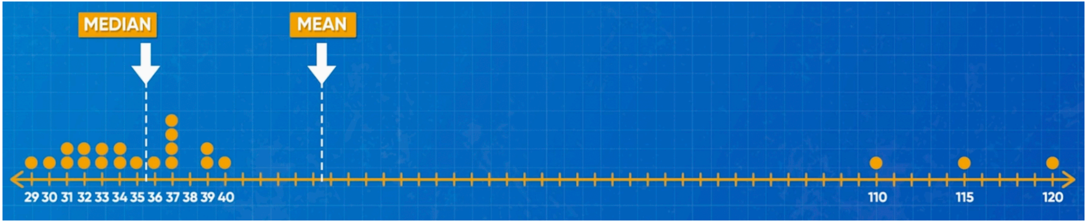
## Digression statistique :




La médiane l'est beaucoup moins... et conséquemment la *distribution absolue médiane* l'est moins elle aussi.

$$\text{MAD} := \text{MEDIAN}\left|x_i - \text{med}\right|.$$

## Digression statistique :

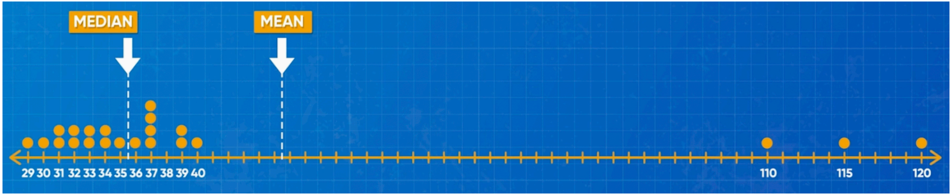



Ex : 29, 30, 31, 31, 32, 32, 33, 33, 34, 34, 35, 36, 37, 37, 37, 37, 39, 39, 40, 110, 115, 120

$\text{moy} = 45.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 27.8,$

$\text{med} = 35.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 3.5.$

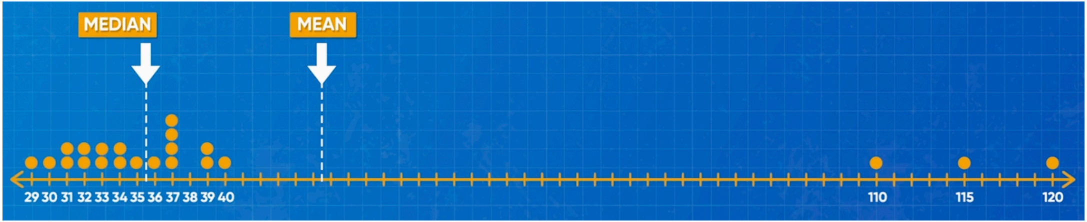
# Digression statistique :




$$\text{moy} = 45.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 27.8,$$
$$\text{med} = 35.5 \quad \& \quad \text{s.d.} = 3.5.$$

$$\text{moy} - \text{s.d.} = 17.7 \quad \& \quad \text{moy} + \text{s.d.} = 73.3$$
$$\text{med} - \text{MAD} = 32 \quad \& \quad \text{med} + \text{MAD} = 39.$$

# Digression statistique :




moy $= 45.5$ & s.d. $= 27.8$,
med $= 35.5$ & s.d. $= 3.5$.

moy $-$ s.d. = 17.7 & moy $+$ s.d. = 73.3
med $-$ MAD = 32 & med $+$ MAD = 39
med $-3$ MAD = 25 & med $+3$ MAD = 46.

Comment réaliser l'objectif suivant ?

*Ajuster la fonction $P(x)$ afin qu'elle retourne – sur le domaine des $x$ plausibles – des valeurs dans un intervalle judicieusement choisi.*

- Fixer $c$ de sorte que $P(\text{med} + 3\text{MAD}) = 2\sqrt{2}$.

## Mise en application de la solution :

Posons $\widetilde{x} := \text{med} + 3\text{MAD}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
S(\widetilde{x}) = 2\sqrt{2} \iff \quad & \exp\left(c\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right)\right) - 1 = 2\sqrt{2} \\
\iff \quad & \exp\left(c\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right)\right) = 2\sqrt{2} + 1 \\
\iff \quad & c\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right) = \log(2\sqrt{2} + 1) \\
\iff \quad & c = \frac{\log(2\sqrt{2} + 1)}{\left(\frac{1}{1-\widetilde{x}} - 1\right)}.
\end{aligned}
$$

**Comment réaliser l'objectif suivant ?**

*Adoucir la pente de la fonction $B(y)$ d'une façon cohérente.*

- Ajouter un paramètre $a$ dans la définition de $B(y)$ :

$$B(y) := \frac{2\sqrt{2}}{1 + \exp(-ay)}.$$

- Fixer $a$ de sorte que $B(y)$ retourne des valeurs *du même ordre de grandeur* que les valeurs de $P(x)$ pour les petites valeurs non aberrantes de $y$.

**Mise en application de la solution :**

Posons $\tilde{x} := \text{med}_x - 1.5\text{MAD}_x$ et $\tilde{y} := \text{med}_y - 1.5\text{MAD}_y$. On veut que $\text{B}(\tilde{y}) = P(\tilde{x})$.

$$
\begin{aligned}
B(\tilde{y}) = P(\tilde{x}) \iff & \frac{2\sqrt{2}}{1+\exp(-a\tilde{y})} = P(\tilde{x}) \\
\iff & \frac{2\sqrt{2}}{P(\tilde{x})} = 1+\exp(-a\tilde{y}) \\
\iff & \frac{2\sqrt{2}}{P(\tilde{x})} - 1 = \exp(-a\tilde{y}) \\
\iff & \log\left(\frac{2\sqrt{2}}{P(\tilde{x})} - 1\right) = -a\tilde{y} \\
\iff & a = -\frac{1}{\tilde{y}}\log\left(\frac{2\sqrt{2}}{P(\tilde{x})} - 1\right).
\end{aligned}
$$

**Comment réaliser l'objectif suivant ?**

*Fixer le malus $S(z)$ de façon moins arbitraire.*

- Fixer le malus de sorte à ce qu'un candidat ayant *sur-performé* mais ayant été battu voit son indice de performance descendre au niveau de celui d'un candidat ayant *sous-performé* mais ayant été réélu.
- Reste ensuite à préciser ce qu'on entend par *sur-performer* et *sous-performer*.

Mise en application de la solution :

- Exemple 1 :
  $F(\mathrm{med}_x + \mathrm{MAD}_x, \mathrm{med}_y + \mathrm{MAD}_y), 0) = F(\mathrm{med}_x - \mathrm{MAD}_x, \mathrm{med}_y - \mathrm{MAD}_y), 1).$
- Exemple 2 :
  $F(\mathrm{med}_x + \frac{1}{2}\mathrm{MAD}_x, \mathrm{med}_y + \frac{1}{2}\mathrm{MAD}_y), 0) = F(\mathrm{med}_x - \frac{1}{2}\mathrm{MAD}_x, \mathrm{med}_y - \frac{1}{2}\mathrm{MAD}_y), 1).$
- Exemple 3 :
  $F(\mathrm{med}_x + \frac{1}{4}\mathrm{MAD}_x, \mathrm{med}_y + \frac{1}{4}\mathrm{MAD}_y), 0) = F(\mathrm{med}_x - \frac{1}{4}\mathrm{MAD}_x, \mathrm{med}_y - \frac{1}{4}\mathrm{MAD}_y), 1).$

# Conclusion

## Récapitulatif final.

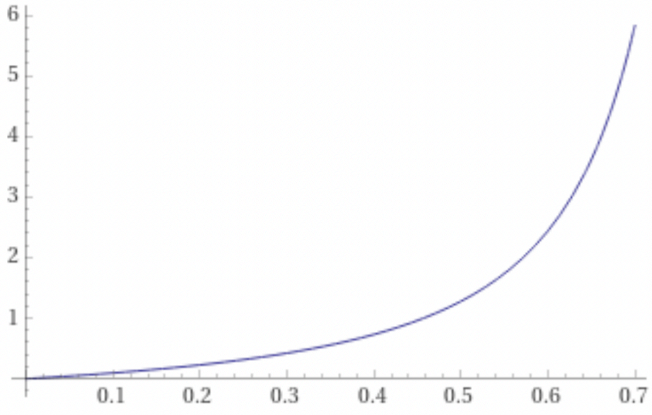
$$F(x, y, z) := \sqrt[3]{P(x)B(y)S(z)},$$

où

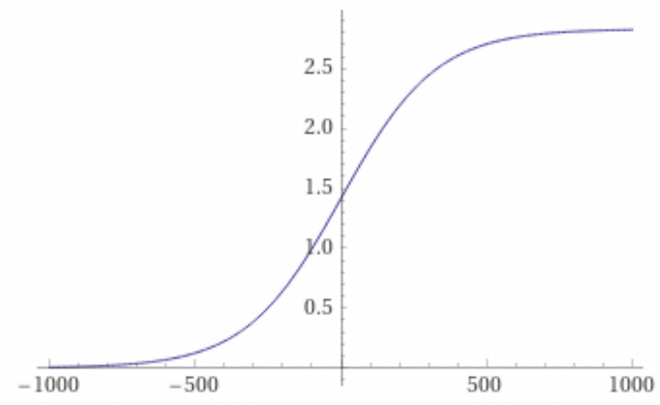
1. $P(x) := \exp\left(c\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right) - 1;$
2. $B(y) := \frac{2\sqrt{2}}{1+\exp(-ay)};$
3. $S(z) := \begin{cases} m, & \text{si } z = \text{battu}, \\ 1, & \text{si } z = \text{réélu}, \end{cases}$

où les valeurs de $a, c$ et $m$ sont déterminées de la façon décrite.

Exemple de $P(x)$ où $c$ a été calculé avec des vraies données :



Exemple de $B(y)$ où $a$ a été calculé avec des vraies données :



# Merci !

## Des questions?