

**Logical Methods: The Art of Thinking Abstractly and
Mathematically**

Author:	Roger Antonsen
Publisher:	Springer
Publication Date:	2021
Number of Pages:	288
Format:	Softcover
Edition:	1
ISBN:	978-3030637767
Category:	Textbook

This book is intended as an introduction to logic and mathematical reasoning, with a view to applications in pure or applied mathematics, analytical philosophy, and computer science, particularly in the current context where we are witnessing the emergence and rapid development of technologies with semantic features.

In terms of form, the philosophy behind this book is as follows: a profound understanding of a subject is not acquired all at once, because discerning deep structures and making sense of them takes time, as does abstraction and generalization. Therefore, in the hope of facilitating the intellectual digestion of the material covered, it is presented in stages. Chapters presenting some of the basic principles of set theory are intertwined with those introducing propositional logic and the different types of proof, in a coherent and rational order. While the choice of topics covered in the first two-thirds of the 24 short chapters that make up this book is standard for a work of this type, some of the topics covered in the last third point to the fact that it was developed from material used by the author as part of an introductory course in logical methods offered to students enrolled in an undergraduate program in a computer science department. For instance, elementary combinatorial techniques are covered before introducing certain notions of abstract algebra and then presenting the rudiments of graph theory. After this interlude (which will likely be somewhat less appropriate in the context of a course offered exclusively to undergraduate students in pure mathematics who will no doubt cover this content in a course entirely dedicated to discrete mathematics), we make a final return to logic proper to deal with formal languages, deterministic finite automata, and natural deduction.

The author maintains in the preface that he has sought to plot a course midway between a bottom-up approach (i.e., by proceeding from the axioms towards the more complex structures by successive operations) and a top-down approach (i.e., by mobilizing one's intuition and the study of examples to progress incrementally from the concrete to the abstract). Ultimately, the approach used by the author is closer to the latter. One would search in vain for theorems, corollaries, and lemmas in the 300 pages that make up this book, the author having deemed it preferable to adopt an informal and refined style, where it is the definitions—and not the assertions and their demonstrations—that constitute the framework of this work. Each of the 137 definitions presented is

highlighted, both in terms of content and form. To promote understanding and clear up misunderstandings, most of the definitions are followed by examples to help explain their meaning, along with counterexamples or non-examples, to point out, through the use of contrast, what they do not mean. Therefore, very little basic knowledge is required for this introduction to logical methods produced by Roger Antonsen, which is written in an accessible style that aims to offer an overview without skimping on the details. There are nearly 60 exercises embedded in the text, some of which are accompanied by a sketch of a solution.

However, none of the approximately 350 problems presented at the end of the various chapters is accompanied by a solution or an answer. Of note, the material is also enriched by 38 boxes titled “Digression.” This supplementary material provides an eloquent overview of topics that could very well be part of an introductory course in logical methods intended for an audience composed entirely of undergraduate mathematics students (e.g., Russell’s paradox, the continuum hypothesis, etc.). Some aim to inspire the reader to explore the subject in more depth beyond an introductory course (e.g., the P vs. NP problem, modal logic, second-order logic). Finally, others mainly aim to introduce interesting elements outside the regular curriculum (e.g., Lucas numbers, Bell numbers, Graham’s number, the Four color theorem).

In the past, Roger Antonsen has demonstrated his vibrant interest in the visual representation of mathematics by collaborating on the book *Illustrating Mathematics*, published in 2020 by the *American Mathematical Society*. The same sensibility is expressed in this book. Indeed, contained in the book are several hundred small figures; arrow, Venn, and Hasse diagrams; and simplified visual representations intended to illustrate and arouse the reader’s intuition around certain ideas or abstract concepts that are more difficult for the mind to grasp (e.g., the reflexive, symmetric, or transitive closure of a relation). The author has also elected to use color to draw the reader’s attention to certain subtleties worthy of attention. This strategy, used wisely, does not encumber the presentation unnecessarily, and the desired effect is obtained.

Interestingly, the author has assembled, in a section just before the index and symbols index titled *The Road Ahead*, about 30 suggestions for further reading. Grouped by type (e.g., the Classic, introductory books on logic, popular science & recreational mathematics, etc.), each title is accompanied by a brief description of what makes them unique or appealing.

Frederic Morneau-Guerin is a professor in the Department of Education at Universite TELUQ. He holds a Ph.D. in abstract harmonic analysis.

**Logical Methods: The Art of Thinking Abstractly and
Mathematically**

Auteur:	Roger Antonsen
Maison d'édition:	Springer
Date de publication:	2021
Nombre de pages:	288
Format:	Couverture souple
Édition:	1
ISBN:	978-3030637767

Ce livre se veut une introduction à la logique et au raisonnement mathématique en vue d'applications en mathématiques pures ou appliquées, en philosophie analytique, de même qu'en informatique, particulièrement dans le contexte actuel où l'on assiste à l'émergence et au développement rapide de technologies présentant des caractéristiques sémantiques.

Sur le plan de la forme, la philosophie qui sous-tend cet ouvrage se résume en ceci : on n'acquière pas une compréhension profonde d'un sujet d'une seule venue, car il faut du temps pour discerner les structures profondes et y donner un sens, pour abstraire et pour généraliser. Conséquemment, dans l'espoir de faciliter la digestion intellectuelle de la matière abordée, celle-ci est présentée par vagues. Les chapitres présentant certains des principes de base de la théorie des ensembles s'entrecroisent avec ceux initiant à la logique propositionnelle et aux différents types de preuve, le tout dans un ordre cohérent et judicieux. Si le choix des thèmes traités dans les deux premiers tiers des 24 courts chapitres composant ce livre est conforme à la norme pour un ouvrage de ce type, certains des sujets couverts dans le dernier tiers témoignent du fait qu'il fut développé à partir du matériel pédagogique utilisé par l'auteur dans le cadre d'un cours d'initiation aux méthodes logiques offert aux étudiants inscrits à un programme de premier cycle dans un département d'informatique. On y aborde notamment des techniques combinatoires élémentaires avant d'introduire quelques notions d'algèbre abstraite puis de présenter les rudiments de la théorie des graphes. Après cet intermède (qui conviendra sans doute un peu moins dans le cadre d'un cours offert exclusivement à des étudiants de premier cycle en mathématiques pures qui auront sans doute l'opportunité de couvrir ce contenu dans un cours entièrement dédié aux mathématiques discrètes), on opère un ultime retour vers la logique proprement dite pour traiter des langages formels, des automates finis déterministes et de déduction naturelle.

L'auteur soutient en préface avoir cherché à dégager une voie mitoyenne entre l'approche *à partir d'en bas* (soit le fait de procéder des axiomes vers les structures plus complexes par compositions successives) et l'approche *à partir du haut* (soit en mobilisant l'intuition et l'étude d'exemples pour cheminer petit à petit du concret vers l'abstrait). En définitive, l'approche exploitée par l'auteur se rapproche davantage du pôle *à partir du haut* que du pôle opposé. C'est en effet en vain qu'on cherchera des théorèmes, des corollaires et des lemmes dans les quelque 300 pages qui composent ce livre, l'auteur ayant jugé préférable

d'adopter un style informel et épuré où ce sont les définitions – et non les assertions et leurs démonstrations – qui constituent l'armature de cet ouvrage. Chacune des 137 définitions présentées est mise en valeur, tant sur le fond que sur la forme. Afin de favoriser la compréhension et dissiper les malentendus, la vaste majorité des définitions sont suivies d'exemples aidant à percevoir ce qu'elles signifient de même que de contre-exemples ou de non-exemples afin de permettre de bien cerner, par effet de contraste, ce qu'elles ne signifient pas. C'est donc une introduction aux méthodes logiques présupposant la maîtrise de très peu de connaissances de base, rédigée dans un style accessible visant à offrir une vue d'ensemble sans pour autant lésiner sur les détails que nous offre Roger Antonsen.

On dénote près d'une soixantaine d'exercices enchâssés dans le texte, dont un certain nombre sont accompagnés d'une esquisse de solution. En revanche, aucun des quelque 350 problèmes présentés en clôture des différents chapitres n'est accompagné d'une solution ou d'une réponse. Fait à noter, la matière est en également enrichie de 38 encadrés intitulés "digression". Certains de ces à-côtés offrent un survol éloquent de sujets qui pourraient très bien figurer au menu d'un cours d'introduction aux méthodes logiques destiné à une audience entièrement composée d'étudiants au premier cycle en mathématiques (ex. le paradoxe de Russell, l'hypothèse du continu, etc.). D'autres visent à susciter l'intérêt du lecteur à approfondir le sujet au-delà d'un cours introductif (ex. le problème P versus NP, la logique modale, la logique du second ordre). Enfin, d'autres visent surtout à faire découvrir des éléments intéressants situés à l'extérieur du curriculum régulier (ex. les nombres de Lucas, les nombres de Bell, les nombres de Graham, le problème des quatre couleurs).

Roger Antonsen a, par le passé, témoigné de son vibrant intérêt pour la représentation visuelle des mathématiques en qui a collaborant à l'ouvrage *Illustrating Mathematics* publié en 2020 par *American Mathematical Society*. Cette sensibilité s'exprime à nouveau dans cet ouvrage. Celui contient en effet plusieurs centaines de petits schémas, de petits diagrammes sagittaux, de Venn, ou de Hasse et de petites représentations visuelles simplifiées servant à imager et susciter l'intuition autour certaines idées ou certains concepts abstraits se présentant moins naturellement à l'esprit (ex : la clôture réflexive, symétrique ou transitive d'une relation). L'auteur a également choisi de se servir de la couleur pour attirer l'attention du lecteur sur certaines subtilités méritant qu'on s'y arrête. Cette stratégie, employée judicieusement, n'alourdit pas inutilement la présentation et l'effet souhaité est obtenu.

Fait intéressant, l'auteur formule, dans une section intitulée *The Road Ahead* qui précède tout juste l'index et l'index des symboles, une trentaine de suggestions de lecture. Regroupés par types (ex. les ouvrages classiques, les ouvrages introductifs en logique, les ouvrages de vulgarisation scientifique et de mathématiques récréatives, etc.), les titres proposés sont tous accompagnés d'une courte description de ce qui les singularise ou les rend si attrayants.