Inégalités du type Young pour les espaces pondérés de fonctions dont la puissance p est intégrable au sens de Lebesgue

Frédéric Morneau-Guérin

DÉPARTEMENT ÉDUCATION, UNIVERSITÉ TÉLUQ

Réunion d'été de la SMC, 9 juin 2021

Cette présentation est l'aboutissement de travaux débutés avec Prof. Thomas J. Ransford (Université Laval).

Fonds de recherche
Nature et
technologies
Québec

Théorème 1. (*Inégalité de Young pour la convolution*, 1912)
Soient $p,q,r \in [1,\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$, alors

- (i) $L_p(\mathbb{R}^d) * L_q(\mathbb{R}^d) \subseteq L_r(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) $\|f*g\|_r \;\leq\; 1\cdot\|f\|_p\|g\|_q$ pour tout $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L_q(\mathbb{R}^d)$.

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ?

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ?

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ?

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle “optimale” ?

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ? **Oui.**

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ?

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ?

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle "optimale" ?

Théorème 2.
Soit G un groupe localement compact et unimodulaire et soient $p, q, r \in [1, \infty]$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, alors

(i) $L_p(G) * L_q(G) \subseteq L_r(G)$;

(ii) $\|f * g\|_r \ \leq \ 1 \cdot \|f\|_p \|g\|_q$ pour tout $f \in L_p(G)$ et $g \in L_q(G)$.

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ? **Oui.**

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ? **Jamais si $|G| = \infty$.**

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ?

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle "optimale" ?

Théorème 3. (Yap ; 1970)
Étant donné G un groupe localement compact unimodulaire d'ordre infini, les fonctions de $L_r(G)$ ne pouvant pas être factorisées en $L_p(G) * L_q(G)$ forment un sous-espace dense dans $L_r(G)$ de deuxième catégorie de Baire.

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ? **Oui.**

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ? **Jamais si $|G| = \infty$.**

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ?
Oui si $p = q = r = 1$. Non sinon.

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle "optimale" ?

Théorème 4. (Beckner, 1975 ; Brascamp–Lieb, 1976)
Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, alors

- (i) $L_p(\mathbb{R}^d) * L_q(\mathbb{R}^d) \subseteq L_r(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) $\|f * g\|_r \ \leq \ \left(\frac{C_p C_q}{C_r}\right)^d \|f\|_p \|g\|_q$ pour tout $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$, où

$$C_t := \sqrt{\frac{t^{1/t}}{\left(\frac{t}{t-1}\right)^{(t-1)/t}}}$$

Théorème 5. (Fournier, 1977)
Étant donné un groupe localement compact et unimodulaire sans sous-groupe ouvert et compact alors, quels que soient $p,q > 1$, il existe $C(p,q) < 1$ telle que

$$\sup_{f \in L_p(G), g \in L_q(G)} \frac{\|f * g\|_r}{\|f\|_p \|g\|_q} \ \leq \ C(p,q),$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ? **Oui.**

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ? **Jamais si $|G| = \infty$.**

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ?
Oui si $p = q = 1$. Non sinon.

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle "optimale" ? **En général non.**

Phénomène de Kunze–Stein (1960). Si $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $1 \leq p < 2$ alors

$$L_p(G) * L_2(G) \subseteq L_2(G)$$

et

$$\|f * g\|_2 \;\leq\; 1 \cdot \|f\|_p \|g\|_2$$

pour tout $f \in L_p(G)$ et $g \in L_2(G)$.

Phénomène de Kunze–Stein (1960). Si $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $1 \leq p < 2$ alors

$$L_p(G) * L_2(G) \subseteq L_2(G)$$

et

$$\|f * g\|_2 \ \leq \ 1 \cdot \|f\|_p \|g\|_2$$

pour tout $f \in L_p(G)$ et $g \in L_2(G)$.

Remarque. Cowling (1978) a montré que le phénomène de Kunze–Stein se produit pour tout groupe de Lie semi-simple et connexe ayant un centre fini.

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ? **Oui.**

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ? **Jamais si $|G| = \infty$.**

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ? **Oui si $p = q = 1$. Non sinon.**

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle "optimale" ? **En général non. Oui pour les groupes localement compacts abéliens.**

Théorème 6. (Quek–Yap ; 1983)
Soit G un groupe localement compact abélien d'ordre infini
Soient $p,q,r \in [1,\infty]$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$, alors

(i) Si G est discret, alors

$$\ell_p(G) * \ell_q(G) \not\subseteq \bigcup \big\{ \ell_s(G) :\ s<r \big\};$$

(ii) Si G est compact, alors

$$L_p(G) * L_q(G) \not\subseteq \bigcup \big\{ L_s(G) :\ r<s \big\};$$

(iii) Si G n'est ni discret ni compact, alors

$$L_p(G) * L_q(G) \not\subseteq \bigcup \big\{ L_s(G) :\ s \neq r \big\}.$$

Corollaire 7. (Quek–Yap ; 1983)
Soit G un groupe localement compact abélien d'ordre infini et soit $1 \leq p,q,r < \infty$. Considérons la condition que voici :

$$\begin{cases} L_p(G) * L_q(G) \subseteq L_r(G), \\ \exists C := C(p,q) \text{ t.q. } \|f * g\|_r \leq C\|f\|_p\|g\|_q, \quad \forall f \in L_p(G),\ \forall g \in L_q(G). \end{cases}$$

Alors

(i) Si G est discret, la condition ci-dessus est satisfaite si et seulement si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{r} + 1$;

(ii) Si G est compact, la condition ci-dessus est satisfaite si et seulement si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} + 1$;

(iii) Si G n'est ni discret ni compact, la condition ci-dessus est satisfaite si et seulement si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

Questions naturelles :

(a) Peut-on généraliser ? **Oui.**

(b) Quand a-t-on égalité dans (i) ? **Jamais si $|G| = \infty$.**

(c) La constante 1 dans (ii) est-elle optimale ? **Oui si $p = q = 1$. Non sinon.**

(d) Étant donné p et q, la constante r dans (i) est-elle "optimale" ? **En général non. Oui pour les groupes localement compacts abéliens.**

(e) Peut-on généraliser *un peu plus* ? **Oui, de différentes façons.**

Théorème 8. (Leindler, 1976 ; Brascamp–Lieb, 1976)
Soient $p, q, r \in (0,1]$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, alors

$$\|f * g\|_r \;\geq\; \left(\frac{C_p C_q}{C_r}\right)^d \|f\|_p \|g\|_q$$

pour tout $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$, où

$$C_t := \sqrt{\frac{t^{1/t}}{\left|\frac{t}{t-1}\right|^{(t-1)/t}}}$$

Théorème 9. (Klein & Russo, 1978)
Soit G un groupe localement compact de mesure de Haar à gauche λ et de fonction modulaire Δ. Supposons que $p,q,r \in [1,\infty]$ satisfont

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1.$$

- (i) $L_p(G) * L_q(G) \subseteq L_r(G)$;
- (ii) $\|f * g\Delta^{\frac{p-1}{p}}\|_r \ \leq \ \|f\|_p\|g\|_q$ pour tout $f \in L_p(G)$ et $g \in L_q(G)$.

- Pour la suite de cette présentation, on appellera *pondération sur* G toute une fonction $w : G \to (0, \infty)$.

- Pour la suite de cette présentation, on appellera *pondération sur* G toute une fonction $w : G \to (0, \infty)$.
- Étant donné G, w et $p \in [1, \infty]$, l'*espace* w*-pondéré des fonctions* L_p *sur* G est défini comme suit :

$$L_p(G, w) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_{p,w} < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{p,w} := \|wf\|_p = \begin{cases} \left(\int_G w(x)^p |f(x)|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \text{inf}\,\{M \geq 0 : \; w(x)|f(x)| \leq M \;\; \lambda\text{-p.p.}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Théorème 10. (Biswas & Swanson, 2010)
Soit G un groupe localement compact et unimodulaire.
Supposons que $p, q, r \in [1, \infty]$ satisfont

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$$

Soit w_1, w_2, w_3 des pondérations sur G telles que

$$w_3(x) \leq C w_1(y) w_2(y^{-1}x), \qquad \lambda\text{-p.p.}$$

pour une certaine constante $C := C(p, q, r, w_1, w_2, w_3) > 0$. Alors

- (i) $L_p(G, w_1) * L_q(G, w_2) \subseteq L_r(G, w_3)$;
- (ii) $\|f * g\|_{r,w_3} \leq C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}$ pour tout $f \in L_p(G, w_1)$ et $g \in L_q(G, w_2)$.

Remarque. Le cas $w_1 = w_2 = w_3$ avait été obtenu par Beurling en 1938.

Théorème 11. (Biswas & Swanson, 2010)
Soit G un groupe localement compact et unimodulaire.
Supposons que $p,q,r,t \in [1,\infty]$ satisfont

$$1 < t \leq \min\{p,q,r\} \leq \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{t}.$$

Soit t' le conjugué de Hölder de t et soit w_1,w_2,w_3 des pondérations sur G telles que

$$(w_1^{-t'} * w_2^{-t'})(x) \ \leq \ C^{t'} w_3^{-t'}(x), \qquad \lambda\text{-p.p.},$$

pour une certaine constante $C := C(p,q,r,w_1,w_2,w_3) > 0$. Alors

- (i) $L_p(G,w_1) * L_q(G,w_2) \subseteq L_r(G,w_3)$;
- (ii) $\|f*g\|_{r,w_3} \ \leq \ C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}$ pour tout $f \in L_p(G,w_1)$ et $g \in L_q(G,w_2)$.

Remarque 1. Le cas $p = q = r = t > 1$ et $w_1 = w_2 = w_3$ figure implicitement dans un article de Wermer (1964), puis plus explicitement dans les travaux de Kerlin–Lambert (1973), Nikol'skii (1976) et Kerman–Sawyer (1994) et Kuznetsova (2006).

Remarque 2. La condition

$$(w_1^{-t'} * w_2^{-t'})(x) \;\leq\; C^{t'} w_3^{-t'}(x), \qquad \lambda\text{-p.p}$$

peut être reformulée ainsi :

$$\left(\int_G \frac{1}{w_1(y)^{t'} w_2(y^{-1}x)^{t'}}\, d\lambda(y)\right)^{1/t'} \;\leq\; \frac{C}{w_3(x)}, \qquad \lambda\text{-p.p.}$$

En laissant $t \to 1$ (de sorte que $t' \to \infty$) cette inégalité devient

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in G} \frac{1}{w_1(y) w_2(y^{-1}x)} \;\leq\; \frac{C}{w_3(x)}, \qquad \lambda\text{-p.p..}$$

Cela est équivalent à

$$w_3(x) \leq C w_1(y) w_2(y^{-1}x) \;\lambda\text{-p.p.}$$

Remarque 2 (suite). On pourra ainsi regrouper les deux théorèmes de Biswas et Swanson en reformulant ainsi les conditions :

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in G}\left(\left\|\frac{1}{w_1(\cdot)w_2(\cdot^{-1}x)}\right\|_{L_{t'}(G)} w_3(x)\right) < \infty.$$

Remarque. Le théorème de Klein et Russo généralise l'inégalité de Young pour la convolution à tous les groupes localement compact. On peut faire de même pour les théorèmes de Biswas et Swanson.

Théorème 12.
Soit G un groupe localement compact de mesure de Haar à gauche λ et de fonction modulaire Δ. Supposons que $p,q,r \in [1,\infty]$ satisfont

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1.$$

Soit w_1,w_2,w_3 des pondérations sur G telles que

$$w_3(x) \leq Cw_1(y)w_2(y^{-1}x), \qquad \lambda\text{-}p.p.$$

pour une certaine constante $C := C(p,q,r,w_1,w_2,w_3) > 0$. Alors pour tout $f \in L_p(G,w_1)$ et $g \in L_q(G,w_2)$ la convolution $f*g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$ existe et appartient à $L_r(G,w_3)$. De plus,

$$\|f*g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|_{r,w_3} \;\leq\; C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}.$$

Esquisse de démonstration. Il suffit de montrer que

- $\left\| f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \right\|_{p,w_3} \leq C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{1,w_2}$ pour tout $p \in [1,\infty]$;
- $\left\| f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \right\|_{\infty,w_3} \leq C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{p',w_2}$ pour tout $p \in [1,\infty]$;

Il s'ensuit que l'application T définie sur les fonctions étagées par $g \mapsto f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$ envoit continuement $L_1(G,w_2)$ et $L_{p'}(G,w_2)$ respectivement dans $L_p(G,w_3)$ et $L_\infty(G,w_3)$ avec norme $\leq C\|f\|_{p,w_1}$.

Esquisse de démonstration (suite). Par interpolation, on déduit que T envoit $L_{p_\theta}(G,w_2)$ continuement dans $L_{q_\theta}(G,w_3)$ pour $\theta \in [0,1]$, où p_θ et q_θ sont définis par

$$\frac{1}{p_\theta} \;=\; \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p'} \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{q_\theta} \;=\; \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}.$$

De plus, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|T\|_{L_{p_\theta}(G,w_2)\to L_{q_\theta}(G,w_3)} \;&\leq\; \|T\|^{1-\theta}_{L_1(G,w_2)\to L_p(G,w_3)} \|T\|^{\theta}_{L_{p'}(G,w_2)\to L_\infty(G,w_3)} \\ &\leq\; C\|f\|_{p,w_1} \end{aligned}$$

En posant $q := p_\theta$ et $r := q_\theta$, on obtient alors

$$\left\| f * g \Delta^{\frac{1}{p'}} \right\|_{r,w_3} \;\leq\; C\|f\|_{p,w_1} \|g\|_{q,w_2}.$$

Théorème 13.
Soit G un groupe localement compact de mesure de Haar à gauche λ et de fonction modulaire Δ. Supposons que $p,q,r,t \in [1,\infty]$ satisfont

$$1 < t \leq \min\{p,q,r\} \leq \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{t}.$$

Soit t' le conjugué de Hölder de t et soit w_1,w_2,w_3 des pondérations sur G telles que

$$(w_1^{-t'} * w_2^{-t'})(x) \;\leq\; C^{t'} w_3^{-t'}(x), \qquad \lambda\text{-p.p.}$$

pour une certaine constante $C := C(p,q,r,w_1,w_2,w_3) > 0$. Alors pour tout $f \in L_p(G,w_1)$ et $g \in L_q(G,w_2)$ la convolution $f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$ existe et appartient à $L_r(G,w_3)$. De plus,

$$\|f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|_{r,w_3} \;\leq\; C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}.$$

Démonstration. On considèrera cinq cas distincts :

- CAS I. $p = q = r = t = \infty$;
- CAS II. $q = t < \infty$ et $p = r = \infty$;
- CAS III. $p = t < \infty$ et $q = r = \infty$;
- CAS IV. $p, q, t < \infty$ et $r = \infty$;
- CAS V. $p, q, r, t < \infty$.

Sous les hypothèse qui sont les nôtres, cela épuise les cas de figure possibles.

CAS I. $p = q = r = t = \infty$.

Sous ces hypothèses, on a $t' = 1$, d'où l'on tire que la condition sur w_1, w_2, w_3 est

$$(w_1 * w_2)(x) \ \le \ C w_3(x), \qquad \lambda\text{-}p.p.$$

De plus, on a $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$, d'où $\Delta^{1/q - 1/r} \equiv 1$. Pour λ-p.t $x \in G$, on a

$$\begin{aligned} \left| f * g(x) \right| \ &\le \ \int_G \frac{w_1(y)|f(y)|w_2(y^{-1}x)|g(y^{-1}x)|}{w_1(y)w_2(y^{-1}x)} \, d_L\lambda(y) \\ &\le \ \|f\|_{\infty,w_1} \|g\|_{\infty,w_2} (w_1^{-1} * w_2^{-1})(x) \\ &\le \ \|f\|_{\infty,w_1} \|g\|_{\infty,w_2} C w_3^{-1}(x). \end{aligned}$$

La conclusion du théorème s'ensuit.

CAS II. $q = t < \infty$ et $p = r = \infty$.

Pour λ-p.t $x \in G$, on a

$$
\begin{aligned}
& \left| f * g\Delta^{\frac{1}{q}}(x) \right| \\
\leq \quad & \int_G \frac{w_1(y)|f(y)|w_2(y^{-1}x)|g(y^{-1}x)|\Delta^{\frac{1}{q}}(y^{-1}x)}{w_1(y)w_2(y^{-1}x)}\, d_L\lambda(y) \\
\leq \quad & \|f\|_{\infty,w_1} \left(\int_G w_2(y^{-1}x)^t |g(y^{-1}x)|^t \Delta^{\frac{t}{q}}(y^{-1}x)\, d_L\lambda(y) \right)^{1/t} \\
& \cdot \left(\int_G \frac{1}{w_1(y)^{t'} w_2(y^{-1}x)^{t'}}\, d_L\lambda(y) \right)^{1/t'} \\
= \quad & \|f\|_{\infty,w_1} \left(\int_G w_2(y^{-1}x)^q |g(y^{-1}x)|^q \Delta(y^{-1}x)\, d_L\lambda(y) \right)^{1/q} \\
& \cdot \left(w_1^{-t'} * w_2^{-t'}(x) \right)^{1/t'} \\
\leq \quad & \|f\|_{\infty,w_1} \|g\|_{q,w_2} \left(C^{t'} w_3^{-t'}(x) \right)^{1/t'}
\end{aligned}
$$

CAS III. $p = t < \infty$ et $q = r = \infty$.

Sous ces hypothèses, on a $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$, d'où $\Delta^{1/q-1/r} \equiv 1$. Pour le reste, on procède sensiblement comme au Cas II.

CAS IV. $p,q,t<\infty$ et $r=\infty$.

En procédant comme aux Cas II et III, on montre que

$$\begin{aligned} & w_3(x)\left|f*g\Delta^{\frac{t}{q}}(x)\right| \\ \leq\ & C\left(\int_G w_1(y)^t|f(y)|^t w_2(y^{-1}x)^t|g(y^{-1}x)|^t\Delta^{\frac{t}{q}}(y^{-1}x)\,d_L\lambda(y)\right)^{1/t} \end{aligned}$$

pour λ-p.t. $x\in G$. Or, $\frac{1}{p/t}+\frac{1}{q/t}=1$ et $p/t,q/t>1$. Par une seconde application de l'inégalité d'Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} w_3(x)\left|f*g\Delta^{1/q}(x)\right| \ &\leq\ C\left(\int_G w_1(y)^p|f(y)|^p\,d_L\lambda(y)\right)^{1/p} \\ &\quad\cdot\left(\int_G w_2(y^{-1}x)^q|g(y^{-1}x)|^q\Delta(y^{-1}x)\,d_L\lambda(y)\right)^{1/q} \\ &=\ C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2} \end{aligned}$$

CAS V. $p, q, r, t < \infty$.

En procédant comme précédemment, on montre que

$$\begin{aligned} & w_3(x) \left| f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}(x) \right| \\ \leq \;& C \left(\int_G w_1(y)^t |f(y)|^t w_2(y^{-1}x)^t |g(y^{-1}x)|^t \Delta^{\frac{t}{q}-\frac{t}{r}}(y^{-1}x)\, d_L\lambda(y) \right)^{1/t} \end{aligned}$$

Si on pose

$$F(x) := \big(w_1(x)|f(x)|\big)^t \quad \text{et} \quad G(x) := \big(w_2(x)|g(x)|\big)^t,$$

on peut reformuler ainsi

$$w_3(x) \left| f * g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}(x) \right| \leq C \left(F * G\Delta^{\frac{t}{q}-\frac{t}{r}} \right)(x)^{1/t}.$$

CAS V. (SUITE) $p,q,r,t<\infty$.

Ainsi,

$$\left\|f*g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\right\|_{r,w_3} \;=\; \left\|w_3\left(f*g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\right)\right\|_r \;\le\; C\left\|F*G\Delta^{\frac{t}{q}-\frac{t}{r}}\right\|_{r/t}^{1/t}.$$

Or, $\frac{p}{t},\frac{q}{t},\frac{r}{t}\ge 1$ et

$$\frac{1}{p/t}+\frac{1}{q/t} \;=\; \frac{1}{r/t}+1$$

Ainsi, le Théorème 12 implique que

$$\left\|F*G\Delta^{\frac{1}{q/t}-\frac{1}{r/t}}\right\|_{r/t}\le\|F\|_{p/t}\|G\|_{q/t}=\|w_1f\|_p^t\|w_2g\|_q^t=\|f\|_{p,w_1}^t\|g\|_{q,w_2}^t. \tag{1}$$

On obtient ainsi

$$\left\|f*g\Delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\right\|_{r,w_3} \;\le\; C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}.$$

Les théorèmes 12 et 13 énoncent des conditions suffisantes sur w_1, w_2, w_3 pour que

- (i) $L_p(G,w_1) * L_q(G,w_2) \subseteq L_r(G,w_3)$;
- (ii) $\|f * g\|_{r,w_3} \leq C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}$ pour tout $f \in L_p(G,w_1)$ et $g \in L_q(G,w_2)$.

Question. Quand est-ce que ces conditions suffisantes sont nécessaires ?

Question en suspens.
Étant donné $1 < p, q, r, t < \infty$ satisfaisant

$$1 < t \leq \min\{p, q, r\} \leq \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{t},$$

existe-t-il un groupe abélien dénombrable G et des pondérations w_1, w_2, w_3 sur G telles que

$$\|f * g\|_{r,w_3} \ \leq\ C\|f\|_{p,w_1}\|g\|_{q,w_2}$$

mais pour lesquels la condition suivante échoue :

$$(w_1^{-t'} * w_2^{-t'})(x) \ \leq\ C^{t'} w_3^{-t'}(x), \qquad (\forall x \in G).$$

Références.

- Biswas, A., & Swanson, D. (2010). Navier-Stokes equations and weighted convolution inequalities in groups. *Comm. Partial Differential Equations, 35*(4), 559-589.
- Klein, A., & Russo, B. (1978). Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups. *Math. Ann. 235*(2), 175-194.
- Morneau-Guérin, F. (2020). Weighted Young-type inequalities on locally compact groups. *Novi Sad. J. Math. 50*(2), 107-120.
- Morneau-Guérin, F., & Ransford, T. (2020). Convolution weights on ℓ_2-spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492*(1), 124396.


Merci