Function Theory and ℓ_p Spaces

Authors:	Raymond Cheng & Javad Mashreghi & William T. Ross
Publisher:	American Mathematical Society
Publication Date:	July 2020
Number of Pages:	219
Format:	Paperback
Edition:	1
ISBN:	9978-1470455934

This book addresses two types of spaces that are strongly linked. They are, on the one hand, the ℓ^p spaces with $0 < p \leq \infty$, namely the spaces consisting of the p-power summable sequences, and, on the other, the ℓ^p_A spaces

$$\ell^p_A = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^p \right\}$$

with $0 < p \leq \infty$, that is to say, the spaces of the analytic functions defined on the open unit disk and whose sequence of Taylor coefficients belongs to ℓ^p.

Although the central theme of the book (and this is where its originality lies) is the study of the analytic behavior of functions belonging to the ℓ^p_A spaces, it is undoubtedly useful to first review the main results of the functional analysis related to the ℓ^p spaces. This is what the authors propose to us in the first three chapters before undertaking, in Chapter 4, an exhaustive study of the weak parallelogram laws in the context of the ℓ^p spaces for $1 < p < \infty$. In Chapter 5, there is a transition from sequence spaces to function spaces and an overview of the theories of Hardy and Bergman spaces.

It is in Chapter 6 that the study of ℓ^p_A spaces really begins. They are first defined, and then their main properties are presented. In Chapter 7, various operators on ℓ^p_A (such as the shift operator, the difference quotient operator, and composition operators) are discussed. The study of the shift and the backward shift on ℓ^p_A is continued in more detail in Chapters 10 and 11. Finally, Chapter 12 deals with the multiplicators of ℓ^p_A, and the thirteenth and last chapter presents an overview of the knowledge relating to ℓ^1_A space, namely the Wiener algebra.

This book was designed to be accessible to a wide audience. It presupposes only an elementary knowledge of measure theory, functional analysis, and complex analysis. The authors have adopted a simple and clear style, and the evidence is both detailed and patiently put into context (both historically and mathematically).

Although it contains many results that stand out for their depth, power, and elegance, this book is neither a compendium nor a definitive work on the subject of ℓ^p_A spaces. After all, how could it be otherwise, given that the theory is still far from being completed? Although they are characterized by the condition of great simplicity, ℓ^p_A spaces are not as easily understood as the Bergman, Dirichlet, and Hardy spaces. Indeed, the p-summability condition on the Taylor coefficients of functions belonging to ℓ^p_A indeed appears to give rise to significantly less regularity. Therefore, many fundamental questions concerning the structure of ℓ^p_A spaces remain (partially or totally) unresolved.

There is considerable literature on ℓ^p_A spaces, though scattered. The authors do undeniably good work in helping to bring it together, give it structure and organization, and showcase it. In this book, they establish the necessary basis for the interested reader who hopes to contribute to completing the picture.

Frederic Morneau-Guerin is a professor in the Department of Education at Universite TELUQ. He holds a Ph.D. in abstract harmonic analysis.

Function Theory and ℓ_p Spaces

Auteur:	Raymond Cheng & Javad Mashreghi & William T. Ross
Maison d'édition:	American Mathematical Society
Date de publication:	Juillet 2020
Nombre de pages:	219
Format:	Livre broché
Édition:	1
ISBN:	978-1470455934

Cet ouvrage traite de deux types d'espaces fortement liés les uns aux autres. Il s'agit d'une part des espaces ℓ^p avec $0 < p \leq \infty$, à savoir les espaces des suites de p-ième puissance sommable, et d'autre part des espaces

$$\ell_A^p = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^p \right\},$$

avec $0 < p \leq \infty$, c'est-à-dire les espaces des fonctions analytiques définies sur le disque unité ouvert et dont la suite des coefficients de Taylor appartient à ℓ^p.

Bien que le thème central du livre (et c'est là que réside son originalité) soit l'étude du comportement analytique des fonctions appartenant aux espaces ℓ_A^p il s'avère assurément utile de d'abord passer en revue les principaux résultats issus de l'analyse fonctionnelle et portant sur les espaces ℓ^p. C'est ce que les auteurs nous proposent dans les trois premiers chapitres avant de se livrer, au chapitre quatre, à une étude exhaustive des règles du parallélogramme (au sens faible) dans le contexte des espaces ℓ^p pour $1 < p < \infty$.

C'est au cinquième chapitre que l'on effectue une transition des espaces de suites aux espaces de fonctions. On y trace les grandes lignes de la théorie des espaces de Hardy et de celle des espaces de Bergman. On verra plus loin que les espaces ℓ_A^p se situent, en un sens, entre les espaces de Hardy (pour lesquels on dispose d'une assez bonne compréhension) et les espaces de Bergman (qui ont fait l'objet d'une étude minutieuse mais pour lesquels, en raison d'un assez haut niveau de complexité, subsiste une part d'ombre).

C'est au chapitre 6 que s'amorce véritablement l'étude des espaces ℓ_A^p. Ceux-ci y sont définis et leurs principales propriétés y sont présentées. Dans le chapitre 7, on aborde divers opérateurs sur ℓ_A^p (comme l'opérateur de décalage et les opérateurs de composition). L'étude de l'opérateur de décalage et de l'opérateur de décalage à rebours se poursuit d'ailleurs plus en détail aux chapitres 10 et 11. Enfin, le chapitre 12 traite des multiplicateurs de ℓ_A^p tandis que le treizième et dernier chapitre présente un survol des connaissances relatives à l'algèbre de Wiener, à savoir l'espace ℓ_A^1.

Cet ouvrage a été conçu pour être accessible à un large auditoire. En effet, on ne présuppose qu'une connaissance élémentaire de la théorie de la mesure, de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse complexe. Les auteurs ont adopté un style simple et clair et les preuves sont à la fois détaillées et patiemment mises en contexte (tant sur le plan historique que sur le plan mathématique).

Même s'il contient de nombreux résultats qui se démarquent par leur profondeur, leur puissance et leur élégance, ce livre n'est ni un compendium, ni ouvrage définitif au sujet des espaces ℓ^p_A. Après tout, comment pourrait-il en être autrement puisque la théorie est encore bien loin d'être achevée. Bien qu'ils soient caractérisés par une condition d'une grande simplicité, les espaces ℓ^p_A ne se laissent pas appréhender aussi aisément que les espaces de Bergman, de Dirichlet et de Hardy. La condition de sommabilité de la p-ième puissance des coefficients de Taylor des fonctions appartenant à ℓ^p_A semble en effet donner lieu à une régularité considérablement moins importante. Ainsi, de nombreuses questions fondamentales concernant la structure des espaces ℓ^p_A demeurent (partiellement ou en totalité) en suspens.

La littérature portant sur les espaces ℓ^p_A est abondante mais elle demeure diffuse. Les auteurs font indéniablement œuvre utile en contribuant à la regrouper, à lui donner une structure et une organisation, ainsi qu'à la mettre en valeur. Par cet ouvrage, ils fournissent au lecteur intéressé les bases dont il a besoin afin d'espérer pouvoir contribuer à compléter le tableau.