La $*$-stabilité de $\ell_2(G,w)$ sur la somme directe de groupes abéliens finis

Frédéric Morneau-Guérin

Département Éducation, Université TÉLUQ

6 décembre 2020

Cette présentation est l'aboutissement de travaux débutés avec Prof. Thomas J. Ransford (Université Laval) et poursuivis avec Colin Krawchuk (University of Cambridge).

Fonds de recherche
Nature et
technologies
Québec

- Tout au long de cette présentation, G désignera un groupe topologique localement compact unimodulaire muni d'une mesure de Haar λ.

- Tout au long de cette présentation, G désignera un groupe topologique localement compact unimodulaire muni d'une mesure de Haar λ.
- On appellera *pondération sur* G toute une fonction $w : G \to (0, \infty)$.

- Tout au long de cette présentation, G désignera un groupe topologique localement compact unimodulaire muni d'une mesure de Haar λ.

- On appellera *pondération sur* G toute une fonction $w : G \to (0, \infty)$.
- Étant donné G, w et $p \geq 1$, l'*espace* w*-pondéré des fonctions* L_p *sur* G est défini comme suit :

$$L_p(G,w) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} : \ \|f\|_{p,w} < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{p,w} := \ \|wf\|_p \ = \ \left(\int_G w(x)^p |f(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{1/p} .$$

- Étant donné $f, g : G \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables, leur *convolution* $f * g : G \to \mathbb{C}$ est la “fonction” définie par la formule suivante :

$$(f * g)(x) := \int_G f(y) g(y^{-1} x)\, d\lambda(y), \qquad (x \in G).$$

- Étant donné $f, g : G \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables, leur *convolution* $f * g : G \to \mathbb{C}$ est la “fonction” définie par la formule suivante :

$$(f * g)(x) := \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, d\lambda(y), \qquad (x \in G).$$

- Un espace vectoriel normé $\mathscr{A}(G)$ de fonctions boréliennes complexes sur G est dit $*$-*stable* si, quelles que soient $f, g \in \mathscr{A}(G)$,

$$\int_G \left| f(y) g(y^{-1}x) \right| d\lambda(y)$$

est vérifié pour λ-presque tout $x \in G$ et si la fonction $f * g$ ainsi définie appartient à $\mathscr{A}(G)$.

Question 1.
Étant donné un indice $p \geq 1$ ainsi qu'un groupe G, peut-on caractériser la classe $\mathscr{W}_p(G)$ des pondérations sur G pour lesquelles $L_p(G,w)$ est $*$-stable et vérifie
$\|f * g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}$?

Question 1.
Étant donné $p \geq 1$ ainsi qu'un groupe G, peut-on caractériser la classe $\mathscr{W}_p(G)$ des pondérations sur G pour lesquelles $L_p(G,w)$ est $*$-stable et vérifie $\|f*g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}$?

Réponse pour $p = 1$. (Gel'fand, Raikov & Shilov, 1964)
$\|f*g\|_{1,w} \leq C\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}, \quad \forall f,g \in L_1(G,w)$

si et seulement si

$w(xy) \leq Cw(x)w(y), \quad \forall x,y \in G$.

Théorème 1. (Wermer, 1954 ; Nikolskii, 1970)

$$\|f * g\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}, \quad \forall f, g \in L_p(G, w)$$

si

$$\left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(x) \;\leq\; C^q \frac{1}{w^q}(x), \quad \forall x \in G.$$

Démonstration. Kuznetsova, 2012.

Définition et notation.

- L'*indice de stabilité de* (G,w) pour $p>1$ fixé :

$$S_p(G,w) := \sup\left\{ \frac{\|f*g\|_{p,w}}{\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}} \; : \; f,g \in L_p(G,w) \right\}.$$

- L'*indice de sous-convolutivité de* (G,w) pour $p>1$ fixé :

$$C_p(G,w)^q := \sup_{x\in G} \frac{\left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(x)}{\frac{1}{w^q}(x)},$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Théorème 1.

$$S_p(G,w) \ \leq \ C_p(G,w).$$

Théorème 1.

$$S_p(G,w) \;\leq\; C_p(G,w).$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rl} & \text{Inégalité de Hölder,} \\ + & \text{Théorème de Fubini,} \\ + & \text{Huile de bras.} \end{array}$$

Question 2.
Existe-t-il G et w pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$.
- $C_p(G,w) = \infty$.

Question 2.
Existe-t-il G et w pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$.
- $C_p(G,w) = \infty$.

Réponse. Oui !

Exemple. (Kuznetsova, 2006)
Considérons la pondération $w : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ définie par

$$w(x) := \begin{cases} \max\left\{|x|, |x|^{-1/4}\right\}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

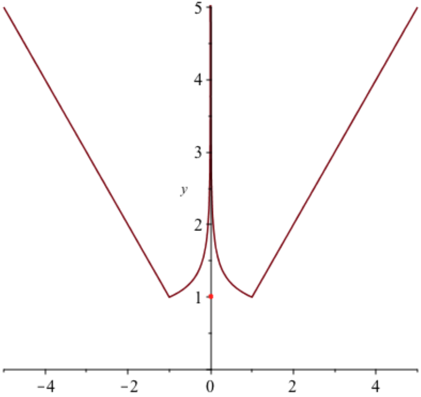

FIGURE – Graphe de la pondération de Kuznetsova pour $x \in [-5, 5]$

Question en suspens.
Existe-t-il un groupe abélien discret G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$.
- $C_p(G,w) = \infty$.

Question en suspens.
Existe-t-il un groupe abélien discret G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$.
- $C_p(G,w) = \infty$.

On a évidemment en tête le groupe $\mathbb{Z}$.

Question en suspens.
Existe-t-il un groupe abélien discret G et une pondération w sur G pour lesquels :

- $S_p(G,w) < \infty$.
- $C_p(G,w) = \infty$.

On a évidemment en tête le groupe $\mathbb{Z}$.

Dorénavant nous nous concentrerons sur le cas $p = 2$.

Théorème 2. (Gel'fand, Raikov & Shilov, 1964)

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \leq S_2(G,w).$$

Condition nécessaire I.

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \;<\; \infty.$$

Théorème 3. (Kuznetsova, 2006)

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;\leq\; S_2(G,w)^2.$$

Théorème 3. (Kuznetsova, 2006)

$$\sum_{x\in G}\frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;\leq\; S_2(G,w)^2.$$

Corollaire. Si G est non dénombrable, alors $S_2(G,w)=\infty$.

Condition nécessaire II.

$$\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

Théorème 4. (Ransford–FMG, 2020)
S'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x, y \in G$, on a

$$w(xy) \leq M\big(w(x) + w(y)\big) \quad \& \quad w(x^{-1}) \leq Mw(x),$$

alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $C_2(G, w) < \infty$.
2. $S_2(G, w) < \infty$.
3. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty$.
4. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} < \infty$.

Théorème 4. (Ransford–FMG, 2020)
S'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x, y \in G$, on a

$$w(xy) \leq M\big(w(x) + w(y)\big) \quad \& \quad w(x^{-1}) \leq Mw(x),$$

alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $C_2(G, w) < \infty$.
2. $S_2(G, w) < \infty$.
3. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty$.
4. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} < \infty$.

Corollaire. Considérons le groupe $\mathbb{Z}$ muni de la pondération $w(n) := (1 + |n|)^\alpha$. Alors $\ell_2(\mathbb{Z}, w)$ est $*$-stable si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Condition nécessaire III.
Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y \in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x \in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

Idée.

- Considérer une famille dénombrable de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini (G_n, w_n) avec $n \geq 1$.

Idée.

- Considérer une famille dénombrable de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini (G_n, w_n) avec $n \geq 1$.
- Avec un peu de chance, on pourra définir une pondération w sur $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ pour laquelle $S_2(G, w)$ pourra être obtenu à partir des $S_2(G_n, w_n)$.

Tentative 1.

- Considérer la pondération w sur $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ définie par

$$w(x) \;\sim\; \prod_{n=1}^{\infty} w_n(x_n).$$

Théorème 5. (Ransford–FMG, 2019)
Étant des groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini (G_n, w_n) avec $w_n(0_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, posons $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ et $w(x) := \prod_{n=1}^{\infty} w_n(x_n)$. Alors, quel que soit $k \geq 1$, on a

$$S_2(G,w) \geq \prod_{i=1}^{k} S_2(G_i, w_i).$$

Théorème 5. (Ransford–FMG, 2019)
Étant des groupes abéliens discrets pondérés non triviaux d'ordre fini (G_n, w_n) avec $w_n(0_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, posons $G := \bigoplus_{n \geq 1} G_n$ et $w(x) := \prod_{n=1}^{\infty} w_n(x_n)$. Alors, quel que soit $k \geq 1$, on a

$$S_2(G, w) \geq \prod_{i=1}^{k} S_2(G_i, w_i).$$

Lemme 6. Quel que soit $n \geq 1$, on a

$$S_2(G_n, w_n) \ \geq \ \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Tentative 2.

- Considérer la pondération w sur $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ définie par

$$w(x) \sim \sup_{n\geq 1} w_n(x_n).$$

Exemple 1. Définissons des pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ comme suit :

$$w_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0_n, \\ 2(3^{n-1})^{1/2} \cdot (n+1), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On munit ensuite $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ de la fonction de pondération

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \;\mapsto\; \sup_{n\geq 1} w_n(x_n).$$

Théorème 4. (Ransford–FMG, 2019)
S'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x, y \in G$, on a

$$w(xy) \leq M\big(w(x) + w(y)\big) \qquad \& \qquad w(x^{-1}) \leq Mw(x),$$

alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $C_2(G, w) < \infty$.
2. $S_2(G, w) < \infty$.
3. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty$.
4. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} < \infty$.

Théorème 4. (Ransford–FMG, 2019)
S'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x, y \in G$, on a

$$w(xy) \leq M\big(w(x) + w(y)\big) \qquad \& \qquad w(x^{-1}) \leq Mw(x),$$

alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. $C_2(G, w) < \infty$.
2. $S_2(G, w) < \infty$.
3. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty$.
4. $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} < \infty$.

Exemple 2.
Définissons les pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ inductivement comme suit :

- Pour $n=1$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 4, \\ 2 &\mapsto 16. \end{aligned}$$
- Pour $n \geq 2$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 2(3^{n-1})^{1/2} \cdot w_{n-1}(2), \\ 2 &\mapsto w_n(1)^2. \end{aligned}$$

On munit ensuite $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ de la fonction de pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup\limits_{n\geq 1} w_n(x_n)$.

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \; < \; \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \; < \; \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Il y a un *mais*.**

$$S_2(G,w) = \infty.$$

Théorème 7. (Kuznetsova–Krawchuk–FMG, 2020)
Étant donné $\{(G_n, w_n)\}_{n\geq 1}$ des groupes pondérés et étant donné le groupe $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ muni de la pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup\limits_{n\geq 1} w_n(x_n)$. Si

- $w_n(0_n) = 1$.
- Pour tout $n \geq 1$ on a que $w_n(xy) \leq w_n(x)w_n(y)$ quels que soient $x, y \in G_n$.
- Pour tout $n > 1$, il existe $a_n, b_n \in G_n$ tels que

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n)w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

Alors $S_2(G, w) = \infty$.

Condition nécessaire IV.
Violation de l'énoncé :

Pour tout $n > 1$*, il existe* $a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n) w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z \in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

Exemple 3.
Définissons les pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ inductivement comme suit :

- Pour $n = 1$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 2, \\ 2 &\mapsto 4. \end{aligned}$$
- Pour $n \geq 2$, on pose
$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto 2(3^{n-1})^{1/2} \cdot w_{n-1}(2), \\ 2 &\mapsto \left(\frac{n}{3^{n-1}}\right)^{1/2} \cdot w_n(1)^2. \end{aligned}$$

On munit ensuite $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ de la fonction de pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup\limits_{n\geq 1} w_n(x_n)$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G}\frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \ < \ \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G}\frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G}\frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G}\frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire IV.**
  Violation de l'énoncé : *Pour tout* $n > 1$*,* $\exists a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n)w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire IV.**
  Violation de l'énoncé : *Pour tout* $n > 1$, $\exists a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n) w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Condition nécessaire I.**

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire II.**

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty.$$

- **Condition nécessaire III.**
  Violation de l'énoncé :

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)+w(y)} < \infty \qquad \& \qquad \sup_{x\in G} \frac{w(x^{-1})}{w(x)} < \infty.$$

- **Condition nécessaire IV.**
  Violation de l'énoncé : *Pour tout* $n > 1$, $\exists a_n, b_n \in G_n$ *tels que*

$$w_n(a_n b_n) = w_n(a_n)w_n(b_n) \qquad \& \qquad w_n(a_n), w_n(b_n) \geq \max_{z\in G_{n-1}} w_{n-1}(z).$$

- **Violation de la condition suffisante.**

$$C_2(G,w) = \infty.$$

- **Y a-t-il un *mais* ?**

D’autres exemples du même type existent.

Exemple 4.
Pour $n \geq 24$, éfinissons les pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ comme suit :

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 1, \\ 1 &\mapsto \frac{6^{n/4}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{12}}, \\ 2 &\mapsto \frac{6^{n/2}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

On munit ensuite $G := \bigoplus_{n\geq 1} G_n$ de la fonction de pondération $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \sup\limits_{n\geq 1} w_n(x_n)$

Références.

- Gel'fand, I., Raikov, D., et Shilov, G. *Commutative normed rings*, Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
- Kuznetsova, Y. N. (2006). Weighted L_p-algebras on groups. *Functional Analysis and Its Applications, 40*(3), 234-236.
- Kuznetsova, Y., & Molitor-Braun, C. (2012). Harmonic analysis of weighted Lp-algebras. *Expositiones Mathematicae, 30*(2), 124-153.
- Morneau-Guérin, F., & Ransford, T. (2020). Convolution weights on ℓ_2-spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 492*(1), 124396.
- Morneau-Guérin, F. (2019). La stabilité de l'espace des suites de carré sommable par rapport au produit de convolution. (Thèse de doctorat).
- Nikol'skii, N. K. (1974). Selected problems of weighted approximation and spectral analysis. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova, 120*, 3-272.
- Wermer, J. (1954). On a class of normed rings. *Arkiv för Matematik, 2*(6), 537-551.


Merci