Proof Technology in Mathematics Research and Teaching

Editors:	Gila Hanna, David A. Reid, Michael de Villiers
Publisher:	Springer International Publishing
Publication Date:	October 2019
Number of Pages:	379
Format:	Hardcover
Edition:	1
Series:	Mathematics Education in the Digital Era
Price:	\$139,99
ISBN:	978-3-030-28482-4
Category:	Contributed Work

The bedrock of mathematical activity is undoubtedly the concept of proof. Considering the abstract and conceptual nature of mathematical proofs, the act of proving is sometimes “thought to be the aspect of mathematical activity most resistant to the influence of technological change”. After a careful reading of “*Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*”, however, one is convinced that the reality is quite different. In recent decades, development of tools such as automatic theorem provers has changed the work of mathematicians to the point of them questioning the very notion of mathematical demonstration. However, there is relatively little of this technological upheaval reflected in mathematics education.

This book is intended for specialists in mathematics education with an interest in computer science advances as well as for researchers in the field of automated reasoning with an interest in the pedagogical and didactic implications of their work. It provides a valuable contribution to mathematics education by initiating a process of in-depth reflection on the educational value of new technological tools such as automatic theorem provers and dynamic geometric environments. Considering the wide range of subjects covered, few people will read this book from cover to cover with an unfaltering enthusiasm. There is no doubt, though, that there is something here to satisfy everyone’s mathematical appetite.

The first chapter of the section titled “*Automatic Theorem Provers*” sheds light upon the reasons why the great advances made in automated reasoning have been slow to be reflected in the teaching of mathematics. The proofs produced by the automatic theorem provers are often deemed terse to the point of being unreadable. This explains why there are still very few mathematicians making widespread use of proof assistants. In order to mitigate the impact of the significant gap between the way human express their mathematical thinking and the write-ups produced by the machine, the authors committed themselves to identify a possible source of this communication incompatibility. For humans, the *raison d’être* of a mathematical proof is not only to confirm the veracity of a statement. When a mathematician produces or consults a proof, he seeks above all an explanation; he seeks to base his understanding upon more elementary statements. Hence, clarity and readability are cardinal virtues. This is why the authors set themselves the objective of creating a program which would solve mathematical problems and which would present the solution using human-style prose.

The second chapter stands out through its profound foundational implications. By carrying out a detailed analysis of Cauchy's Proof of Euler's theorem, the authors demonstrate that it is not possible to translate this proof (procedural in nature) to "a sequence of formulae each of which is either an axiom or follows from earlier formulae by a rule of inference." In doing so, the authors call into question one of the most prevalent assumption in mathematics education.

The "*Theoretical Perspectives on Computer-Assisted Proving*" section – by far the most heterogeneous – contains a reflection on didactical issues at the interface of mathematics and computer science, a deep analysis of the instrumental proofs, and a description of the means by which computers can enable students to prove results which would otherwise have been beyond them. Finally, a thorny question is tackled: to carry out a fruitful mathematical activity, do you need to have exceptional skills or, on the contrary, is the mathematician a craftsman whose skills only develop through apprenticeship and practice? The authors sought find out by questioning illustrious witnesses such as Sir Isaac Newton, G. H. Hardy, and Terence Tao. An impression emerges from this chapter: if mathematics sometimes progresses following individual flashes of genius, the joke from the American golfer Arnold Palmer ("*It's a funny thing, the more I practice, the luckier I get.*") also seems to apply to mathematics.

The section "*Suggestions for the Use of Proof Software in the Classroom*" deals exclusively with geometry, a branch of mathematics which lends itself well to an extensive use of interactive visualization technology.

In the section called "*Classroom Experience with Proof Software*", it is emphasized that to be profitable, learning mathematics using new technologies requires carefully planned lessons. Although geometric reasoning and manipulation once again occupy a prominent place, this section also contains a chapter on the teaching of Logic and Proof with an interactive theorem prover. The author sets out the course outline and the educational objectives of an undergraduate course which he co-developed and in which we focus on the synergistic effect of the simultaneous learning of the informal mathematical language, formal symbolic logic and, finally, the language of the *Lean* interactive theorem prover.

Frédéric Morneau-Guérin is a professor in the Department of Education at Université TÉLUQ. He holds a Ph.D. in abstract harmonic analysis.

Proof Technology in Mathematics Research and Teaching

Editors:	Gila Hanna, David A. Reid, Michael de Villiers
Publisher:	Springer International Publishing
Publication Date:	October 2019
Number of Pages:	379
Format:	Hardcover
Edition:	1
Series:	Mathematics Education in the Digital Era
Price:	\$139,99
ISBN:	978-3-030-28482-4
Category:	Contributed Work

La pierre angulaire de l'activité mathématique est sans contredit la *démonstration*. Revêtant un caractère abstrait et étant porteuse d'une évidente charge sémantique, on se plaît à l'imaginer insensible à l'influence de l'évolution technologique; et pourtant il n'en est rien. Au cours des dernières décennies, le développement d'outils comme les *logiciels de démonstration automatique de théorèmes*[1] a modifié le travail des mathématiciens au point de remettre en cause la notion même de démonstration mathématique. Ce bouleversement technologique se reflète toutefois assez peu dans l'enseignement des mathématiques.

Rédigé par seize équipes de chercheurs œuvrant soit dans le domaine de la démonstration automatique de théorèmes, soit encore dans le domaine de la recherche en enseignement des mathématiques, *"Proof Technology in Mathematics Research and Teaching"* est un ouvrage destiné à la fois aux spécialistes de l'enseignements des mathématiques ayant un intérêt pour les avancées informatiques et aux chercheurs en raisonnement automatisé s'intéressant aux implications pédagogiques et didactiques de leurs travaux. Ce volume fournit un apport précieux à recherche en enseignement des mathématiques en appelant à une réflexion approfondie sur la valeur pédagogique des nouveaux outils technologiques comme les *assistants de démonstration*[2] et les *logiciels de géométrie dynamique*[3]. Considérant le large éventail de sujets couverts, rare sont ceux qui liront cet ouvrage d'un couvert à l'autre avec en entrain qui ne se dément pas. Quiconque a un intérêt pour les mathématiques y trouvera cependant son compte.

Le premier chapitre de la section intitulée *"Automatic Theorem Provers"* apporte un éclairage sur les raisons pour lesquelles les grandes avancées réalisées dans le domaine du raisonnement automatisé tardent à se refléter dans l'enseignement des mathématiques. C'est qu'il subsiste un écart important entre les raisonnements humains et les jeux syntaxiques de la machine. Bien qu'elles s'avèrent très utiles, les démonstrations produites par les logiciels de démonstration automatique de théorèmes sont un enchaînement d'inférences si aride et indigeste qu'en faire la lecture devient vite la source d'intenses frustrations. Cela explique

[1] Automatic Theorem Prover (ATDs)
[2] Proof assistant
[3] Dynamic Geometric Systems (DGSs)

pourquoi, en dehors d'une petite communauté de spécialistes et de passionnés, on trouve très peu de mathématiciens faisant un usage étendu des assistants de démonstration. Cela ne veut pas dire que les mathématiciens n'ont pas un souci du détail et de la rigueur. Il faut plutôt y voir le symptôme d'une incompatibilité communicationnelle qu'on peut heureusement espérer parvenir à atténuer. Pour l'humain, la raison d'être d'une démonstration mathématique n'est pas seulement de confirmer la véracité d'un énoncé. Lorsqu'un mathématicien produit ou consulte une démonstration, il cherche avant tout à asseoir sa compréhension sur des faits admis et jugés plus élémentaires. En somme, puisque pour l'humain une démonstration est avant tout une explication, la clarté et la lisibilité sont des vertus cardinales. Voilà pourquoi Mohan Ganesalingam et William Timothy Gowers se sont fixé comme objectif de créer un programme capable de résoudre des problèmes mathématiques en présentant des solutions lisibles dans une prose s'apparentant à celles qu'emploierait un mathématicien.

Le second chapitre s'illustre par ses profondes implications. En procédant à une analyse détaillée d'une démonstration du théorème de Descartes-Euler produite par le célèbre mathématicien français Augustin Louis Cauchy, les auteurs démontrent qu'il n'est pas possible de traduite cette démonstration (de nature schématique) à une suite de propositions qui sont soit des axiomes, soit des conséquences de propositions précédentes déduites par des règles d'inférence bien définies. Cela remet en question l'hypothèse, répandue dans l'enseignement des mathématiques, suivant laquelle toute démonstration rigoureuse peut en principe être traduire en une preuve formelle. Loin d'annoncer l'écroulement de tout l'édifice mathématique, les auteurs appellent plutôt au lancement d'un nouveau programme plus exhaustif de clarification des fondements des mathématiques. Ce programme devra permettre de formaliser les démonstrations rigoureuses qui ne sont pas formalisables au sens entendu par David Hilbert, le mathématicien suisse et principal instigateur du programme de clarification des fondements des mathématiques formulée au début du XXe siècle.

La section *"Theoretical Perspectives on Computer-Assisted Proving"* est de loin la plus hétéroclite. On y trouve d'abord une réflexion sur les conditions d'apprentissages nécessaires à l'utilisation en classe des outils informatiques suivie d'une réflexion sur la nature de la démonstration. On présente ensuite une description des moyens par lesquels les ordinateurs peuvent permettre aux étudiants de démontrer des théorèmes qui, sans aide, outrepasseraient largement leur capacité. On aborde enfin une épineuse question : pour mener une activité mathématique féconde, faut-il posséder des habiletés exceptionnelles ou, au contraire, le mathématicien est-il un artisan dont les compétences ne se développent que par la pratique notamment au cours d'une longue période de modelage et d'apprentissage guidé ? Pour tenter de trancher la question, on a cherché à savoir ce qu'en pensent d'illustres mathématiciens de différentes époques comme Sir Isaac Newton, G. H. Hardy, Andrew Wiles, Terence Tao. Une impression ressort de ce chapitre : si les mathématiques progressent parfois suite à d'éclairs de génie aussi soudains qu'imprévisibles, il semble que ces éclairs de génie sont loin d'être le fruit du hasard. La plaisanterie du golfeur américain Arnold Palmer (*"It's a funny thing, the more I practice, the luckier I* *get."*) semble également s'appliquer aux mathématiques.

La section *"Suggestions for the Use of Proof Software in the Classroom"* traite exclusivement de la géométrie. Cette branche des mathématiques – avec sa théorie axiomatique formelle et ses représentations visuelles – se prête bien aux environnements d'enseignement qui font utilisation de la technologie. Les logiciels de géométrie dynamique qui permettent aux étudiants de soumettre leurs conjectures à l'épreuve des faits en réalisant des constructions visuelles et interactives sont utilisés de plus en plus fréquemment en classe. Or, les auteurs des divers chapitres composant cette section nous informent que certains de ces outils technologiques comportent désormais un assistant de démonstration grâce auquel les étudiants peuvent générer des preuves formelles accompagnées d'un support visuel.

Dans la section intitulée *"Classroom Experience with Proof Software"*, on souligne avec emphase que, pour être profitable, l'apprentissage des mathématiques à l'aide des nouvelles technologies nécessite un enseignement explicite judicieusement planifié. Bien que le raisonnement et les manipulations géométriques occupent une fois de plus une place prépondérante, cette section contient également un chapitre portant sur l'enseignement de la logique et des techniques de démonstration au moyen d'un *système d'aide à la démonstration interactif*[4]. L'auteur détaille le plan de cours et les objectifs pédagogiques d'un cours de premier cycle qu'il a co-développé et qui est offert à l'Université Carnegie-Mellon dans lequel on mise sur l'effet synergique de l'apprentissage simultané du langage mathématique informel, de celui de la logique symbolique et enfin du langage de programmation de *Lean*.

[4]Interactive Theorem Prover (ITPs)