Introduction to Real Analysis

Author:	Christopher Heil
Publisher:	Springer International Publishing
Publication Date:	2019
Number of Pages:	386
Format:	Hardcover
Edition:	1
Series:	Graduate Texts in Mathematics
Price:	$79.99
ISBN:	978-3-030-26901-2
Category:	Textbook

There are many books aimed at guiding novices in the acquisition of basic knowledge in abstract real analysis. For Christopher Heil, the classics on the matter (the books by Folland or Rudin, for instance) stand out from the rest thanks to their structured, effective and systematic treatment of the material. However, while they are great reference books that every mathematician should keep at hand, they are not well suited to be used as textbooks in an introductory course; "they should be the second set of books on analysis that you pick up". It was with the intention to produce "the analysis text that you read first" and, therefore, break away from the widespread practice of serving, first and foremost, the imperatives of logic and elegance in the presentation of elements when these are difficult to reconcile didactic considerations, that Heil decided to write an *Introduction to Real Analysis*. This challenge has been met hands down.

This book is intended primarily for students beginning their graduate studies in mathematics but it will also be suitable for well-prepared undergraduates. The author offers a very airy and well-structured preliminary chapter, in which he reviews the essential prerequisites and takes the opportunity to introduce the notation he will make his own.

Introduction to Real Analysis contains over 30 figures that aid in the understanding of certain results presenting a greater degree of technical difficulty, and well over 400 problems and embedded exercises. Nearly fifty brief clues for the most difficult questions are provided at the end of the book. Furthermore, the preface informs us of the existence of resources to help in solving the exercises (available online) as well as a solutions manual for teachers. Other appeals of the book include the presence of an index of symbols structured by themes, where each symbol is accompanied by a precise reference to the Definition where clarification can be obtained.

Anticipating some frequent questions and misunderstandings, the author devoted an entire chapter to the concept of absolute continuity and the fundamental theorem of calculus. It should also be noted that the chapter devoted differentiation provides absolute clarity.

It is obvious that the author has taken care to make knowledge acquisition as easy as possible and help students structure their thoughts, including by using mnemonic strategies that help students retain the key ideas of theorems and lemmas. With a clear educational concern, Heil has understood that what does not draw attention has little chance of being thought about, and what is not thought about cannot possibly be learned.

Introduction to Real Analysis

Auteur:	Christopher Heil
Maison d'édition:	Springer International Publishing
Date de publication:	2019
Nombre de pages:	386
Format:	Livre relié
Édition:	1
Série:	Graduate Texts in Mathematics
Prix:	$79.99
ISBN:	978-3-030-26901-2
Catégorie:	Manuel

Nombreux sont les livres censés guider pas-à-pas les non-initiés dans l'acquisition des connaissances de base en analyse réelle abstraite. Pour Christopher Heil, les classiques en la matière (pensons aux livres de Folland, Rudin, Stein & Shakarchi, Royden ou Bartle par exemple) s'illustrent par leur traitement structuré, efficace et systématique de la matière. Celle-ci est développée, avec un degré d'élégance et de concision insurpassable, dans le cadre le plus général qui soit en gravissant un à un les échelons menant du plus brut au plus élaboré, c'est-à-dire des axiomes abstraits aux théorèmes raffinés et applicables. Cependant, s'ils constituent de formidables ouvrages de références que tout mathématicien devraient garder à portée de main, ces ouvrages – soutien Heil – sont mal adaptés à une utilisation comme manuel scolaire dans le cadre d'un premier cours en analyse réelle abstraite, "they should be the second set of books on analysis that you pick up."

C'est avec l'intention de produire "he analysis text that you read first", et donc de rompre avec à pratique répandue consistant à servir d'abord les impératifs de logique et d'élégance de présentation des éléments lorsque ceux-ci sont difficilement conciliables avec les considérations didactiques, que Christopher Heil s'est employé à rédiger *Introduction to Real Analysis*. Ce défi a été relevé haut la main.

Introduction to Real Analysis s'adresse principalement aux étudiants débutant des études de deuxième cycle en mathématiques, mais il conviendra également aux étudiants cultivés approchant de la fin de leurs études de premier cycle en mathématiques ainsi qu'à quiconque possédant une bonne connaissance de la théorie des espaces métriques.

L'auteur et l'éditeur ont apporté un soin évident à faciliter le plus possible l'acquisition des connaissances et à aider les étudiants à structurer leur pensée, notamment en ayant recours à des stratégies mnémotechniques favorisant la rétention de l'idée clé des théorèmes et des lemmes.

L'ouvrage contient plus 30 figures renforçant la compréhension de certains résultats présentant un degré de difficulté technique plus important; plus de 60 exercices incorporés au texte; et plus de 350 problèmes disséminés à la fin des différentes sections du livre. Bien que les solutions aux exercices et aux problèmes ne soient pas incluses, l'auteur a pris soin de fournir près d'une cinquantaine de brefs indices aux questions les plus difficiles (des questions qui sont d'ailleurs souvent marquées d'un astérisque afin d'aviser le lecteur qu'il aura vraisemblablement à rehausser son jeu d'un cran). De plus, la préface nous informe de l'existence de ressources d'aide à la résolution des exercices (disponible en ligne) ainsi que d'un manuel de solution destiné aux enseignants.

Parmi les autres attraits du livre, notons que chaque chapitre débute par un commentaire introductif qui, sans devancer le propos, permet au lecteur d'anticiper quelque peu la suite. Mentionnons également la présence d'un index des symboles structuré thématiquement où chaque symbole est accompagné d'une référence précise à la définition où l'on pourra obtenir des éclaircissements.

L'auteur propose en ouverture chapitre préliminaire très aéré et bien structuré dans lequel il passe en revue les notions préalables (nombres complexes, notation ensembliste, espaces euclidiens, symbole de Kronecker, droite réelle achevée, limites supérieure et inférieure, convergence ponctuelle des fonctions, intégration au sens de Riemann, etc.) et en profite pour introduire la notation qu'il fera sienne.

Le chapitre 1 offre un bref rappel des éléments essentiels de la théorie des espaces métriques et des espaces normés. Le rythme soutenu ne convient certes pas à un apprentissage ab initio, mais une version plus complète de ce chapitre est rendue disponible par l'auteur en ligne.

Pour amorcer le Chapitre 2, l'auteur résume le programme ayant ultimement mené au développement de la notion de mesure de Lebesgue, c'est-à-dire la recherche naïve d'un gadget assignant un volume à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Après cette entrée en la matière imprégnée par l'histoire, on s'engage dans la présentation de la mesure de Lebesgue en suivant une approche intuitive : on traite d'abord des pavés, puis de la mesure extérieure de Lebesgue et ensuite seulement on arrive à la mesure de Lebesgue. Pour clore ce chapitre, on démontre l'existence d'ensembles non-mesurables ainsi que le rôle joué par l'axiome du choix dans cette preuve.

Au Chapitre 3, Heil procède à la présentation de la notion de fonctions mesurables en suivant une approche progressive plutôt standard. Il enchaine avec la définition de l'espace des fonctions essentiellement bornée et de la convergence en norme infinie. Après une section consacrée au Théorème d'Egorov, il introduit la notion de convergence en mesure.

Au chapitre 4, qui traite de l'intégrale de Lebesgue, le souci de Christopher Heil de veiller à ce que les théorèmes fondamentaux s'inscrivent de façon indélébile dans la mémoire du lecteur se manifeste à nouveau très clairement. Le Théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou, le Théorème de convergence dominée ainsi que les Théorèmes de Fubini et de Tonnelli se voient tous offrir une exposition maximale en se puisque l'auteur leur consacrent tous une section ou une sous-section propre. Visiblement habité d'une forte préoccupation pédagogique, Heil a compris que ce qui n'attire pas l'attention a bien peu de chance d'être mémorisé et ce qui n'est pas mémorisé n'est pas appris.

Le Chapitre 5 traite de la différentiation. L'auteur retarde l'énonciation du Théorème de différentiation de Lebesgue jusqu'à la dernière section, préférant d'abord éveiller patiemment et soigneusement l'intuition en offrant une présentation détaillée de la fonction de Cantor–Lebesgue, en faisant valoir l'intérêt de la notion de fonction à variation bornée, puis en y allant d'une démonstration rigoureuse de deux versions du lemme de recouvrement de Vitali.

Anticipant certaines interrogations et incompréhensions fréquentes, Christopher Heil consacre un chapitre entier, le Chapitre 6, à la notion de continuité absolue et au Théorème fondamental du calcul. Mentionnons que la section portant sur le Théorème de Banach–Zaretsky est d'une limpidité absolument remarquable.

Dans le Chapitre 7, les espaces L^p sont définis en toute généralité pour $0 < p \leq \infty$. L'auteur se sert d'abord des espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ pour illustrer simplement certaines propriétés usuelles des espaces L^p. Il souligne ensuite soigneusement les difficultés techniques entravant la possibilité d'établir un parallèle parfait entre les espaces ℓ_p et L^p. En laissant en exercice au lecteur certains résultats portant sur la hiérarchisation des espaces L^p, Heil rompt avec son habitude consistant à dissiper avant même qu'elles ne se manifestent les interprétations erronées des étudiants avant que celles-ci ne se manifestent.

Le Chapitre 8 présente de façon simple et accessible les fondements de la théorie des espaces de Hilbert. Le sujet est couvert d'une façon plutôt coutumière, à l'exception notable du choix d'inclure une brève discussion servant de faire valoir l'intérêt d'étudier la théorie des ondelettes.

Le chapitre 9 est marqué par une accélération notable du rythme avec laquelle la matière est présentée. On y donne néanmoins un bon aperçu de l'analyse de Fourier. Le lecteur trouvera néanmoins dans ce chapitre une description lumineuse des principales propriétés de la transformée de Fourier.

En définitive, cet ouvrage représente une valeur sûre pour quiconque (enseignant ou étudiant) désire faire l'acquisition d'un ouvrage de référence pour un premier cours de deuxième cycle en analyse réelle. De plus, les évidentes qualités didactiques de cet ouvrage devraient inciter à surveiller avec intérêt la publication d'un éventuel deuxième tome qui serait, selon l'auteur, en développement et qui couvrira la théorie abstraite de la mesure et de l'intégration, les mesures signées et complexes ainsi que les rudiments de la théorie des opérateurs et de l'analyse fonctionnelle.