La stabilité de l'espace des suites de carré sommable par rapport au produit de convolution

Thèse

Frédéric Morneau Guérin

Doctorat en mathématiques
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

La stabilité de l'espace des suites de carré sommable par rapport au produit de convolution

Thèse

Frédéric Morneau-Guérin

Sous la direction de:

Thomas J. Ransford, directeur de recherche

Résumé

Étant donné G un groupe topologique localement compact, il est bien connu que l'espace $\mathscr{L}_1(G)$ des fonctions absolument intégrables sur G est stable par rapport au produit de convolution et jouit même d'une structure d'algèbre de Banach. Mais il en va tout autrement pour les espaces $\mathscr{L}_p(G)$ avec $p > 1$: le théorème de Saeki stipule que l'espace $\mathscr{L}_p(G)$ est stable par rapport au produit de convolution *si et seulement si G est compact*.

Il existe cependant une façon d'infléchir le résultat dans un sens qui nous agrée : en modifiant la définition des normes $\|\cdot\|_p$ afin d'y introduire une pondération, à savoir une fonction $w : G \to (0, \infty)$, on peut parfois faire en sorte que l'espace ainsi obtenu – qu'on appelle l'*espace w-pondéré des fonctions $\mathscr{L}_p(G)$* et qu'on note $\mathscr{L}_p(G, w)$ – soit stable par rapport au produit de convolution.

Cette démarche soulève toutefois deux questions importantes :

- Pour $p > 1$ fixé, quels sont les groupes topologiques localement compacts admettant au moins une pondération pour laquelle $\mathscr{L}_p(G, w)$ est stable par rapport au produit de convolution ?
- Étant donné un tel groupe G, qu'est-ce qui caractérise les pondérations $w : G \to (0, \infty)$ pour lesquelles $\mathscr{L}_p(G, w)$ est stable par rapport au produit de convolution ?

Bien qu'on ne dispose pas à ce jour de réponses complètes et définitives à ces deux questions, nous passerons en revue quelques récents progrès, sans prétendre à l'exhaustivité.

Notre attention se focalisera principalement sur un problème émanant de la deuxième question : il est établi que toute pondération jouissant de la propriété nommée *sous-convolutivité au sens faible* donne lieu à un espace $\mathscr{L}_p(G, w)$ qui est stable par rapport au produit de convolution. Mais on connait désormais de nombreux exemples montrant que cette condition suffisante n'est pas nécessaire en général. Il existe cependant un type de groupes pour lequel la possibilité demeure que la sous-convolutivité au sens faible représente effectivement une caractérisation complète. Il s'agit des groupes abéliens discrets.

La présente thèse de doctorat vise à élaborer de nouvelles approches pour aborder la question quant à savoir si, oui ou non, la sous-convolutivité au sens faible est une condition nécessaire et suffisante pour garantir la stabilité de $\mathscr{L}_p(G, w)$ par rapport au produit de convolution dans le cas particulier où G est un groupe abélien discret et $p = 2$.

Dans la première partie de cette thèse, nous interprétons cette question à la lumière de la théorie des espaces de Hilbert à noyau reproduisant et obtiendrons une preuve substantiellement différente d'un résultat de Kuznetsova.

La seconde partie de la thèse est consacrée à la reformulation de la question principale dans le cadre de la théorie des opérateurs. Ce faisant, nous formulons encore une autre démonstration significativement différente du théorème de Kuznetsova. L'approche développée nous permet également l'obtention d'estimations originales et celles-ci sont présentées en détail.

Abstract

Given a locally compact topological group G, it is widely known that $\mathscr{L}_1(G)$, the space of absolutely integrable functions on G, is an algebra with respect to the operation of convolution. For any given $\mathscr{L}_p(G)$ space with $p > 1$, though, the situation is emphatically different: a theorem of Saeki states that $\mathscr{L}_p(G)$ is a convolution algebra *if and only if G is compact.*

If we introduce within the definition of the $\mathscr{L}_p$-norm a weight function $w : G \to (0, \infty)$, we obtain a new function space called the *w-weighted $\mathscr{L}_p$-space* and denoted by $\mathscr{L}_p(G, w)$. By defining the weight function carefully, $\mathscr{L}_p(G, w)$ can be made to be stable with respect to convolution even though G is non-compact. However, this raises two fundamental questions:

— Given $p > 1$, what are the locally compact topological groups G on which there exists a weight w such that $\mathscr{L}_p(G, w)$ is stable with respect to convolution?

— Given such a group G, what condition(s) does $w : G \to (0, \infty)$ need to verify in order for $\mathscr{L}_p(G, w)$ to be stable with respect to convolution?

Thus far, these questions remain unsolved. We shall discuss in detail some partial answers available in the literature, whilst not claiming to be exhaustive. We will be focusing mainly on a problem arising from the second question: it has been established that any weakly sub-convolutive weight causes $\mathscr{L}_p(G, w)$ to be stable with respect to convolution. But there are numerous examples showing that this sufficient condition is not necessary. There is, however, a type of group, viz. the discrete abelian groups, for which there remains a possibility that weak sub-convolutivity truly characterizes those weights entailing the stability of the $\mathscr{L}_p$-space of functions with respect to convolution.

In this thesis, we aim to elaborate new approaches to determine whether the weak sub-convolutivity is a necessary and sufficient condition guaranteeing the stability of $\mathscr{L}_p(G, w)$ with respect to convolution in the particular case of discrete abelian groups and for $p = 2$.

In the first part of this thesis, we reinterpret this question in light of the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, and we obtain a substantially different proof of a theorem of Kuznetsova.

The second part of the thesis is devoted to revisiting the main question, but this time, we rephrase it in the context of the operator theory. In doing so, we derive yet another proof of Kuznetsova's theorem as well as an original estimate.

Table des matières

Liste des figures

À Kiana, sans qui mes écrits ne seraient que pure syntaxe, que des taches d'encre dépourvues d'une sémantique

We are nothing without the work of others our predecessors, others our teachers, others our contemporaries. Even when, in the measure of our inadequacy and our fullness, new insight and new order are created, we are still nothing without others. Yet we are more.

J. ROBERT OPPENHEIMER
Reith Lectures
20 décembre 1953

Remerciements

« C'est mal récompenser un maître que de rester toujours son disciple » disait Friedrich Nietzsche dans son célèbre poème philosophique *Ainsi parlait Zarathoustra*. J'ai en mémoire le souvenir encore très vif d'avoir fait tourner et retourner cette phrase dans mon esprit après l'avoir lu pour la première fois en 2009, au cours de ma première année à l'Université Laval. À force de citer de mémoire, j'ai eu tôt fait d'en altérer la formulation exacte et – le temps faisant son oeuvre – d'en oublier complètement la provenance. Je me suis retrouvé à réciter une formulation sans cesse plus corrompue et dénaturée. Mais le hasard fait bien les choses : au moment où j'apportais les dernières modifications à ma thèse de doctorat, je suis à nouveau tombé sur cette citation de Nietzsche.

Je mentirais si je disais que c'est d'un pas assuré que je m'apprête à quitter le nid où j'ai passé la dernière décennie, dont un certain nombre d'années sous la supervision bienveillante de Thomas J. Ransford, mon maître à penser. J'ai grandement bénéficié de ses conseils, de ses critiques et de ses idées. Dans les disciplines de l'esprit comme dans le sport, il existe une inégalité de départ : certaines personnes manifestent des aptitudes particulières. Bien entendu, le talent brut n'est qu'un des facteurs du succès : il faut encore faire preuve de discipline, ne pas ménager ses efforts et jouer de chance. Mais il y a quelque chose de profondément émouvant à observer de près un individu exceptionnellement doué et parvenu au sommet de son art accomplir des choses qui sont hors de notre portée et qui le demeureront. J'ai eu le privilège au cours de mon doctorat d'observer la part la plus noble du génie humain en action en côtoyant mon superviseur, Thomas Ransford. Ce qui est plus remarquable encore, c'est que ses talents comme chercheur s'accompagnent d'un dévouement envers ses étudiants et d'une aisance communicationnelle qui lui permettent de rendre compréhensible et clair ce qui serait autrement complexe et abscons. Si ma carrière mathématique devait être infructueuse ou tourner court, la faute m'en incomberait entièrement, car monsieur Ransford m'a prodigué le meilleur enseignement qu'un superviseur de thèse puisse espérer dispenser et il a multiplié les démarches pour m'aider à réaliser un bon départ.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'appui inconditionnel de ma famille et de mes amis. Je remercie donc de tout coeur ma conjointe Kiana, mes parents Jacinthe et Mario, ma grand-mère Laurette, ma soeur Émilie et mon beau-frère Francis pour leur amour et leur soutien. Inutile d'en dire plus, car il y a certaines dettes que les mots ne permettent pas de bien représenter et encore moins d'acquitter.

Merci à mes amis Hojjat Mahi Hassanabadi, Bahijeh Mahdavi, Maryam Farkhondeh, Luca Freschi, Arsia Afshar Taromi, Ali Hajebrahimi, Vahideh Gholami Malek Ghdamsi, Thierry Fournier, Yves Garneau, Laurent Vézina, Carole Bergeron, François Drouin, Serge Bonin, Raynald Labrie, Linda Bernard, Pierre Lafontaine, Claude Gagné, Guillaume Lavoie, Mathieu Bock-Côté, John Scott et Ilyas Khan. Si leur incidence directe sur mes travaux mathématiques est restreinte, ils ont toutefois nourri – chacun à leur façon et souvent à leur insu – ma vie affective, sociale, intellectuelle et spirituelle. Je remercie aussi Benoît Nolet et François Laniel qui ont un mystérieux talent leur permettant, me semble-t-il, de transformer les conversations portant sur d'arides questions mathématiques en plaisir à l'état pur ; j'ai beaucoup appris de vous. Merci également à Martin Dufresne qui, le premier, a pris mes aptitudes latentes au sérieux et m'a fait prendre conscience qu'il m'incombait de les polir.

Je tiens à exprimer à Javad Mashreghi, mon premier mentor, toute ma gratitude. En plus d'être un pédagogue doué et un homme affable, monsieur Mashreghi possède un charisme naturel faisant en sorte qu'il fasse figure de présence rassurante pour ses étudiants. Je remercie également mon professeur et ami Nicolas Doyon qui a exercé une influence positive et déterminante dans ma vie professionnelle, académique et personnelle à de trop nombreuses reprises pour que ce soit le fruit du hasard. J'y vois pour ma part de la bienveillance, de la bonté et de la générosité. J'adresse mes plus sincères remerciements aux professeurs Jérémie Rostand (l'incarnation de l'idéal de l'enseignant rigoureusement bien préparé), Damir Kinzebulatov et Bernard Hodgson qui m'ont donné la chance d'être leur auxiliaire d'enseignement. Une belle complicité s'est développée tout naturellement entre monsieur Hodgson et moi. Notre intérêt commun pour les fondements des mathématiques y est assurément pour quelque chose, mais j'estime que les causes premières sont sa courtoisie et son amabilité.

La gratitude est parfois décrite comme étant le plus éphémère des sentiments. Admettant qu'il soit fort possible que je porte en moi cette faiblesse de la condition humaine, je tiens donc à consigner par écrit, pour références ultérieures dans l'éventualité où le sentiment de profonde reconnaissance qui m'habite au moment d'écrire ces lignes devait venir à faiblir, que je suis l'héritier d'une longue tradition mathématique remontant, de superviseur de thèse en superviseur de thèse, jusqu'à Sir Isaac Newton, Galileo Galilei, voire bien au-delà. Chacun des maillons de cette chaîne a incontestablement joué un rôle-clé dans la vie de son *descendant immédiat* dans l'arbre généalogique mathématique ainsi que, plus indirectement, dans celle de tous ceux qui leur ont succédé.

Dans le même ordre d'idées, je désire souligner que l'Université Laval et University of Cambridge ont été des milieux propices à mon développement. Je serai toujours redevable à ces deux grands établissements d'enseignement de m'avoir permis de m'épanouir comme personne.

J'émets le souhait d'avoir d'autres opportunités de collaborer avec chacune de ces deux institutions à l'avenir.

Je remercie enfin les programmes de bourses d'études de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et des Fonds de recherche Québec – Nature et technologies (FRQNT) pour leur soutien financier.

En terminant, cette thèse ayant été rédigée en quasi-totalité de cette thèse confortablement assis au bout de la grande table située au fond du café Mayflower sur la rue Myrand à Sainte-Foy, je me dois de remercier Florence Lahoud-Douville et Louis Roy-Couture (d'excellents baristas, les meilleurs spécialistes de café en ville et des gens chaleureux) d'avoir veillé sur mon verre de cortado.

Dans les *Discours sur la première décade de Tite Live*, Nicolas Machiavel notait fort à propos que « ce sont, non les titres qui honorent les hommes, mais les hommes qui honorent les titres ». Bien qu'en soumettant la présente thèse pour évaluation, je postule le grade de *Philosophiæ doctor*, je suis plus que jamais en mesure d'apprécier la pertinence de cette citation de Machiavel. Poursuivre des études de troisième cycle en mathématiques aura été une expérience très enrichissante, certes, mais également une leçon d'humilité. Au terme de mes études doctorales j'ai, je l'espère, de plus grandes connaissances et un plus grand savoir que lors de mon inscription au programme à l'automne 2015. Cependant, je suis par-dessus tout bien plus conscient de l'ampleur de mon ignorance. S'il me fallait résumer les quatre dernières années en une phrase, je dirais simplement ceci : la recherche de fine pointe consiste avant tout à dissiper l'illusion de savoir, car sous chaque réponse se trouvent de nouvelles questions.

```
Nicolò Fontana Tartaglia
 |__Ostilio Ricci
 |__Galileo Galilei (1585)
 |__Vincenzo Viviani (1642)
 |__Isaac Barrow (1652)
 |__Isaac Newton (1668)
 |__Roger Cotes (1706)
 |__Robert Smith (1715)
 |__Walter Taylor (1723)
 |__Stephen Whisson (1742)
 |__Thomas Postlethwaite (1756)
 |__Thomas Jones (1782)
 |__Adam Sedgwick (1811)
 |__William Hopkins (1830)
 |__Arthur Cayley (1875)
 |__Andrew Russell Forsyth (1881)
 |__Edmund Taylor Whittaker (1895)
 |__Godfrey Harold Hardy (1903)
 |__Frank Smithies (1937)
 |__Graham Robert Allan (1964)
 |__Thomas Joseph Ransford (1984)
```

Figure 1 – Mon arbre généalogique mathématique

Notation

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$	Ensemble des nombres naturels
$\mathbb{Z}$	Groupe additif des nombres entiers
$\mathbb{Q}$	Corps des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Groupe additif des nombres entiers modulo n
$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ \lvert z \rvert = 1\} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$	Le groupe circulaire
$\mathcal{C}(X)$	Espace vectoriel des fonctions continues sur X à valeur complexes
$\mathscr{B}(\mathcal{H})$	Espace vectoriel des opérateurs continus sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$

Introduction

Définitions et conventions d'écriture

Les espaces vectoriels de fonctions à valeurs complexes définies sur un groupe et dont la puissance d'exposant $p \geq 1$ est intégrable au sens de Lebesgue seront au coeur de nos travaux.

Pour que l'énoncé qui précède ait un sens, il faut que le groupe sous-jacent soit doté d'une topologie compatible avec sa structure algébrique fondamentale, permettant du coup de bâtir une mesure borélienne dont les propriétés rendent possible la définition d'une intégrale généralisant l'intégration sur $\mathbb{R}$ contre la mesure de Lebesgue. Ainsi, chaque fois qu'il sera question d'un *groupe*, il sera toujours sous-entendu que :

— Le groupe est muni d'une topologie suffisamment fine pour que la loi de composition interne du groupe $(x, y) \mapsto xy$ ainsi que le passage à l'inverse $x \mapsto x^{-1}$ soient des fonctions continues ;

— La topologie sous-jacente est séparée/Hausdorff (deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints) et localement compacte (tous les points admettent des voisinages compacts) ;

— Le groupe possède une mesure de Haar à gauche, à savoir une mesure de Radon non nulle μ qui est invariante par translation à gauche ;

— L'élément neutre de G est noté par e.

Suivant la terminologie usuelle, nous appellerons *exposant conjugué de* $p \in [1, \infty]$ l'unique nombre $q \in [1, \infty]$ satisfaisant :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1.$$

Toujours suivant l'usage, on définit l'*espace de fonctions sur le groupe G dont la puissance d'exposant $p \geq 1$ est μ-intégrable*, où $p \in [1, \infty)$, comme suit :

$$\mathscr{L}_p(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \|f\|_p < \infty \right\},$$

où

$$\|f\|_p := \left(\int_{x \in G} \left| f(x) \right|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

De plus, nous désignerons du nom d'*espace de fonctions essentiellement bornées* sur le groupe G l'ensemble suivant :

$$\mathscr{L}_\infty(G) := \Big\{ f : G \to \mathbb{C} \;\Big|\; \|f\|_\infty < \infty \Big\},$$

où

$$\|f\|_\infty := \inf \Big\{ C \geq 0 : \; \big|f(x)\big| \leq C \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in G \Big\}.$$

Pour clore cette section, relevons que tout groupe G équipé de la topologie discrète (c'est-à-dire la topologie où tous les sous-ensembles de G sont ouverts) admet un analogue discret de la distribution delta de Dirac :

Définition. Étant donné un groupe discret G et un élément $x \in G$, on appelle *symbole de Kronecker* la fonction $\delta_x : G \to \mathbb{C}$ définie comme suit :

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{si } y = x, \\ 0, & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

Plan de la thèse

Le chapitre 1 s'ouvre sur une description du contexte ayant motivé l'étude des espaces pondérés de fonctions. Ce discours introductif culmine avec la présentation d'une condition – appelée *sous-convolutivité au sens faible* – qui, si elle se trouve vérifiée, entraîne que l'espace pondéré de fonctions dont la puissance d'exposant $p > 1$ est intégrable revêt un caractère stable par rapport au produit de convolution. Ce résultat soulève une question importante : la satisfaction de cette condition est-elle nécessaire ou contingente ?

Le chapitre 2 présente un bref survol d'un exemple conçu par Yulia Kuznetsova qui résout la question : il existe une pondération sur le groupe $\mathbb{R}$ qui n'est pas faiblement sous-convolutive et pour laquelle la stabilité par rapport au produit de convolution de l'espace des fonctions de carré intégrable est néanmoins assurée.

Notre objectif principal, au chapitre 3, est de détailler une preuve de Fricke à l'effet qu'il soit possible de construire des pondérations sur le semi-groupe $\mathbb{N}$ qui, sans être sous-convolutive, engendre un espace pondéré de suites de carré sommable qui est stable par rapport au produit de convolution.

Tirant les conclusions qui s'imposent du résultat obtenu par Kuznetsova voulant que la sous-convolutivité ne caractérise pas la stabilité par rapport au produit de convolution sur les espaces de fonctions définies sur un groupe libre non abélien muni de la topologie discrète, nous soulevons la question suivante : en va-t-il autrement si l'on réduit la portée de l'étude aux groupes *abéliens* discrets ? Ou, pour le dire autrement, une pondération sur un groupe abélien discret doit-elle impérativement vérifier la condition de sous-convolutivité au sens faible afin que l'espace pondéré des suites dont la puissance d'exposant p est intégrable soit stable par rapport au produit de convolution ? L'accumulation des contre-exemples dans des cas apparentés suggère qu'il est raisonnable de s'attendre à pouvoir répondre par la négative.

Au chapitre 4 nous développons de nouveaux outils conceptuels (l'*indice de $*$-stabilité* et l'*indice de sous-convolutivité*) qui nous aideront à aborder ce problème dans le cas particulier où $p = 2$. Puis nous passons en revue les conditions que doivent nécessairement vérifier les pondérations afin d'engendrer un espace pondéré de suites de carré sommable qui soit stable par rapport au produit de convolution.

Dans le chapitre 5 nous adoptons une approche précédemment inexplorée : nous reformulons la question principale dans le langage de la théorie des espaces de Hilbert à noyau reproduisant. Ce faisant, nous obtenons une démonstration significativement différente d'un théorème de Kuznetsova sans toutefois parvenir à résoudre la question principale.

Les résultats présentés dans la seconde partie de cette thèse reposent sur le constat que la valeur de l'indice de $*$-stabilité d'un groupe abélien discret pondéré coïncide avec la valeur de la norme d'un certain opérateur T_w sur l'espace de Hilbert des suites de carré sommable.

Au chapitre 6 on présente dans un premier temps une preuve que la valeur de la norme de Hilbert–Schmidt de l'opérateur T_w correspond à l'indice de sous-convolutivité du groupe w-pondéré. En exploitant les résultats sur la hiérarchisation des classes de Schatten, nous développons d'abord une seconde preuve alternative d'un cas particulier du théorème stipulant que la sous-convolutivité au sens faible est une condition suffisant à garantir la stabilité de l'espace des suites de carré sommable par rapport au produit de convolution, puis nous identifions une nouvelle estimation de l'indice de $*$-stabilité.

Le chapitre 7 contient une étude – à la lumière des résultats obtenus au chapitre précédent – de la stabilité dans le cas où le groupe sous-jacent est d'ordre fini.

En guise de conclusion, nous formulons quelques observations supplémentaires au sujet d'un type prometteur de pondérations sur les sommes directes de groupes abéliens finis.

Afin de ne pas entraver la fluidité du discours, nous avons cru bon d'éviter les longues digressions introduisant les piliers sur lesquels reposent certaines démonstrations à même le texte. Nous avons plutôt choisi d'inclure ceux-ci en annexe.

Réitérons que tous les résultats originaux contenus dans cette thèse sont le fruit d'un travail réalisé en collaboration soutenue et constante avec Thomas J. Ransford.

Chapitre 1

Contexte

1.1 Définition et propriétés élémentaires

L'analyse de Fourier *classique* est l'étude de la façon dont un signal périodique de forme quelconque peut s'exprimer comme une superposition de fonctions trigonométriques simples. Cette étude comporte deux opérations antithétiques :

— L'*analyse*, qui consiste à décomposer la fonction périodique en ondes de base dont l'amplitude doit être déterminée ;

— La *synthèse*, qui consiste en la reconstruction – autant que faire se peut – de la fonction en sommant les diverses composantes oscillatoires.

En raison de sa compatibilité avec le procédé d'analyse – qu'on appelle communément la *transformation de Fourier* – l'opération mathématique, pourtant peu soutenue par l'intuition, appelée *convolution* s'impose d'elle-même : sous certaines conditions la transformée de Fourier de la convolution de deux signaux correspond au produit ponctuel de leurs transformées de Fourier respectives.

L'analyse de Fourier qu'on qualifie de *moderne* ou d'*abstraite* s'appuie sur l'idée que la transformation de Fourier peut être généralisée en une transformation des fonctions définies sur tout groupe topologique localement compact et Hausdorff. Il est également possible de définir la convolution dans ce contexte plus général.

Définition 1.1. Soient deux fonctions boréliennes $f, g : G \to \mathbb{C}$. Pour tout $x \in G$ satisfaisant

$$\int_G \left|f(y)g(y^{-1}x)\right| \, d\mu(y) \; < \; \infty, \tag{1.1}$$

on définit la *convolution de f et g en x* par la formule

$$(f * g)(x) := \int_G f(y)g(y^{-1}x) \, d\mu(y).$$

Théorème 1.1.

(i) *Si $f, g \in \mathscr{L}_1(G)$ alors l'équation (1.1) est vérifiée pour μ-presque tout $x \in G$ et la fonction $f * g$ appartient à $\mathscr{L}_1(G)$.*

(ii) *La norme $\|\cdot\|_1$ est sous-multiplicative par rapport au produit de convolution, c'est-à-dire*

$$\big\|f * g\big\|_1 \;\leq\; \|f\|_1\|g\|_1, \qquad \big(f, g \in \mathscr{L}_1(G)\big).$$

(iii) *Quelles que soient $f, g, h \in \mathscr{L}_1(G)$, on a $(f * g) * h = f * (g * h)$.*

Démonstration. Voir le théorème 1.6.2. de [43]. □

Il ressort du théorème 1.1 que l'espace $\mathscr{L}_1(G)$ est une algèbre de Banach par rapport au produit de convolution.

La proposition qui suit répertorie les conditions sous lesquelles l'algèbre $\mathscr{L}_1(G)$ jouit de propriétés cruciales en vue de l'application de certains théorèmes centraux de la théorie des algèbres de Banach (par exemple le théorème de Gel'fand–Mazur), à savoir la commutativité du produit et l'unitarité.

Proposition 1.2.

(i) *L'algèbre $\mathscr{L}_1(G)$ est commutative si et seulement si le groupe G est abélien.*

(ii) *L'algèbre $\mathscr{L}_1(G)$ est unitaire si et seulement si le groupe G discret.*

Démonstration.

(i) Voir le théorème 1.6.4. de [9].

(ii) Voir le théorème 2.1.3. de [9]. □

Puisque nous serons appelés à discuter abondamment des propriétés liées à la convolution analogues à celles dont il est question au théorème 1.1, il convient d'adopter dès maintenant une terminologie adéquate et précise.

Définition 1.2. Soit $\mathscr{A}(G)$ un espace vectoriel normé de fonctions boréliennes complexes définies sur G.

(i) L'espace $\mathscr{A}(G)$ est dit *stable par rapport au produit de convolution* ou $*$-*stable* si, quelles que soient $f, g \in \mathscr{A}(G)$, l'équation (1.1) est vérifiée pour μ-presque tout $x \in G$ et si la fonction $f * g$ ainsi définie appartient à $\mathscr{A}(G)$.

(ii) On dit que l'espace $\mathscr{A}(G)$ est une *algèbre de convolution* s'il est $*$-stable et que la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{A}(G)}$ est sous-multiplicative par rapport au produit de convolution.

Pour clore cette section, introduisons une expression symbolique qui n'a pour but que d'accroître la fluidité du texte.

Notation. Étant donné $\mathscr{A}(G), \mathscr{B}(G)$ et $\mathscr{C}(G)$ trois espaces de fonctions boréliennes sur G à valeur dans $\mathbb{C}$, nous écrirons

$$\mathscr{A}(G) * \mathscr{B}(G) \;\subseteq\; \mathscr{C}(G)$$

pour signifier que, quelles que soient $f \in \mathscr{A}(G)$ et $g \in \mathscr{B}(G)$, la fonction $f * g$ est bien définie et qu'elle appartient à $\mathscr{C}(G)$.

1.2 La conjecture $\mathscr{L}_p$ et le théorème de Saeki

Contrairement à $\mathscr{L}_1(G)$, les espaces $\mathscr{L}_p(G)$ avec $p > 1$ ou $p = \infty$ ne sont pas des algèbres de convolution en général comme en témoignent les exemples qui suivent.

Exemple 1.1.

- Cas $1 < p < \infty$. Prenons $\alpha \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1+p}{2p}\right)$ et considérons la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(n) := \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha}, & n > 0, \\ 0, & n \leq 0. \end{cases}$$

  D'une part, on vérifie que $f \in \ell_p(\mathbb{Z})$ puisque $p\alpha > 1$. D'autre part, pour $n \geq 2$, on a

$$(f * f)(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} \;\geq\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^{2\alpha}} \;=\; \frac{n-1}{n^{2\alpha}} \;\geq\; \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} \;=\; \frac{1}{2n^{2\alpha-1}}.$$

  Ainsi $(f * f) \notin \ell_p(\mathbb{Z})$ car

$$\left\| f * f \right\|_p^p \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| (f * f)(n) \right|^p \;\geq\; \frac{1}{2^p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p\alpha - p}}.$$

  Or, cette dernière somme diverge puisque

$$2p\alpha - p \;<\; 2p\left(\frac{1+p}{2p}\right) - p \;=\; 1.$$

- Cas $p = \infty$. Considérons la fonction $f \equiv 1$ sur G. Cette fonction appartient ostensiblement à $\mathscr{L}_\infty(G)$ mais

$$(f * f)(x) \;=\; \int_G \left| f(y) f(y^{-1}x) \right| \, d\mu(y) \;=\; \mu(G)$$

  diverge pour tout x si G est un groupe non compact d'ordre infini.

En vertu lemme qui suit (que Grafakos [18] attribue à Minkowski), nous verrons sous peu qu'il est néanmoins possible d'obtenir – sous des hypothèses additionnelles plutôt restrictives – un analogue au théorème 1.1 pour tout $p > 1$.

Lemme 1.3. *Quel que soit $p > 1$, on a $\mathscr{L}_1(G) * \mathscr{L}_p(G) \subseteq \mathscr{L}_p(G)$ et*

$$\big\|f * g\big\|_p \;\le\; \|f\|_1 \|g\|_p, \qquad \Big(f \in \mathscr{L}_1(G),\ g \in \mathscr{L}_p(G)\Big).$$

Démonstration. Soit q l'exposant conjugué de p. Pour tout $x \in G$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\big|(f * g)(x)\big| &\le \int_G \big|f(y) g(y^{-1}x)\big| \, d\mu(y) \\
&= \int_G \big|f(y)\big|^{1/p} \big|f(y)\big|^{1/q} \big|g(y^{-1}x)\big| \, d\mu(y) \\
&\le \left(\int_G \big|f(y)\big| \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p} \left(\int_G \big|f(y)\big| \, d\mu(y) \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_G \big|f(y)\big| \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\big\|f * g\big\|_p^p &= \int_G \big|(f * g)(x)\big|^p \, d\mu(x) \\
&\le \|f\|_1^{p/q} \int_G \int_G \big|f(y)\big| \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&= \|f\|_1^{p/q} \int_G \big|f(y)\big| \int_G \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&= \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \|g\|_p^p \\
&= \|f\|_1^p \|g\|_p^p.
\end{aligned}$$

Enfin, on obtient le résultat désiré en extrayant la p-ième racine. □

Théorème 1.4. *Quel que soit $p > 1$, si le groupe G est compact alors $\mathscr{L}_p(G)$ est $*$-stable et il existe une constante $C > 0$ pour laquelle*

$$\big\|f * g\big\|_p \;\le\; C \|f\|_p \|g\|_p, \qquad \big(f, g \in \mathscr{L}_p(G)\big).$$

Démonstration. La compacité de G implique que la mesure de Haar de G est finie. Il découle alors du théorème C.4 que $\mathscr{L}_p(G) \subseteq \mathscr{L}_1(G)$ et cette inclusion est continue. Il s'ensuit qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle

$$\big\|f * g\big\|_p \;\le\; \|f\|_1 \|g\|_p \;\le\; C \|f\|_p \|g\|_p.$$ □

Au tournant des années 1960, Wiesław Żelazko et Minakshisundaram Rajagopalan ont tous deux émis de manière indépendante – le premier dans un article de recherche [53] publié en 1961 et le second dans sa thèse de doctorat [36] soumise en 1963 à l'Université Yale – une audacieuse conjecture liée au théorème 1.4 qui devait susciter une attention considérable au cours des années qui suivirent.

Conjecture $\mathscr{L}_p$. S'il existe $p > 1$ pour lequel $\mathscr{L}_p(G)$ est $*$-stable et la norme $\|\cdot\|_p$ est sous-multiplicative alors G est compact.

Pour Żelazko, la plausibilité de la conjecture $\mathscr{L}_p$ était justifiée par le fait qu'il en avait établi dans [53] la véracité pour tout $p > 1$ dans le cas particulier où G est abélien. Quant à Rajagopalan, sa confiance en la conjecture $\mathscr{L}_p$ était fondée sur le fait qu'il savait, pour l'avoir lui-même démontré dans [37], que celle-ci était valide si on supposait G discret et qu'on se restreignait aux indices $p \geq 2$.

Au cours de la décennie qui suivit la formulation de la conjecture $\mathscr{L}_p$, une multitude de résultats partiels furent obtenus (voir par exemple : [8; 7; 16; 22; 29; 38; 39; 40; 41; 35; 49; 54]) mais une solution complète semblait toujours aussi insaisissable.

De tous ces résultats provisoires, nous ne citerons qu'un théorème que l'on doit à Tong S. Quek et Leonard Y. H. Yap et qui améliore un résultat classique de l'analyse harmonique qui est connu sous le nom d'*inégalité de Young pour la convolution* [52]. Bien qu'il ne soit appelé à jouer qu'un rôle limité dans ce qui suit, le théorème de Quek et Yap, que voici, nous servira à illustrer certains points dans la présente discussion introductrice.

Théorème 1.5. *Soit G un groupe abélien d'ordre infini et soient $p, q, r \geq 1$. Considérons la condition que voici :*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_p(G) * \mathscr{L}_q(G) \subseteq \mathscr{L}_r(G), \\ \|f * g\|_r \;\leq\; C_{p,q}\|f\|_p\|g\|_q \quad \textit{pour tout } f \in \mathscr{L}_p(G) \textit{ et tout } g \in \mathscr{L}_q(G). \end{cases} \tag{1.2}$$

Alors

(i) Si G est discret, la condition (1.2) est satisfaite si et seulement si $1 + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$;

(ii) Si G est compact, la condition (1.2) est satisfaite si et seulement si $1 + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$;

(iii) Si G n'est ni discret ni compact, la condition (1.2) est satisfaite si et seulement si $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Démonstration. Voir le corollaire 1.6. dans [35]. □

Vers la fin des années 1980, l'attention soutenue à laquelle la conjecture $\mathscr{L}_p$ avait eu droit commençait à se dissiper. Puis, en 1990, Sadahiro Saeki résolut de manière complète et définitive la question :

Théorème 1.6. *Quel que soit $p > 1$, si $\mathscr{L}_p(G)$ est $*$-stable et si la norme $\|\cdot\|_p$ est faiblement sous-multiplicative alors le groupe G est compact.*

Démonstration. Voir le théorème 1 dans [46]. □

1.3 Espaces $\mathscr{L}_p$ pondérés

La structure d'algèbre de Banach dont est pourvu l'espace $\mathscr{L}_1(G)$ muni du produit de convolution est substantiellement plus riche que la simple structure d'espace de Banach dont sont dotés les espaces $\mathscr{L}_p(G)$ pour $p > 1$. De plus, on dispose d'un coffre à outils mieux garni afin d'étudier celle-ci : aux techniques provenant l'analyse harmonique abstraite s'ajoutent celles de la théorie de représentation de Gel'fand. Ajoutons également que la structure d'algèbre de Banach de $\mathscr{L}_1(G)$ soulève de profondes et intéressantes questions ayant trait, par exemple, à la structure des idéaux.

Dans cette section, nous verrons qu'il est parfois possible de se soustraire au théorème de Saeki en modifiant la définition de la norme $\|\cdot\|_p$ afin d'introduire une *pondération*. Ce faisant, on substitue à l'espace $\mathscr{L}_p$ un espace $\mathscr{L}_p$ *pondéré* qui, sous certaines conditions qu'il conviendra d'étudier, peut se révéler être une algèbre de convolution. Au-delà de l'intérêt que revêtent ces espaces quant à leurs applications pratiques, les algèbres de convolution $\mathscr{L}_p$ *pondérées* sont remarquables puisqu'elles bénéficient du double avantage – peu commun – d'être à la fois des algèbres de Banach par rapport au produit de convolution et des espaces réflexifs. De telles algèbres ont d'ailleurs joué un rôle prépondérant dans des questions de factorisation et dans la théorie de l'interpolation [5; 12].

Définition 1.3.

(i) On appelle *pondération sur G* toute fonction $w : G \to (0, \infty)$.

(ii) On nomme *groupe pondéré* la paire (G, w) formée du groupe G et d'une pondération w sur G.

Définition 1.4.

(i) Pour $p \geq 1$, on appelle *espace w-pondéré des fonctions $\mathscr{L}_p$* l'ensemble suivant :

$$\mathscr{L}_p(G, w) := \Big\{ f : G \to \mathbb{C} \;\Big|\; \|f\|_{p,w} < \infty \Big\},$$

où

$$\|f\|_{p,w} := \|wf\|_p = \left(\int_G w(x)^p \big|f(x)\big|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

(ii) On appelle *espace w-pondéré des fonctions $\mathscr{L}_\infty$* l'ensemble suivant :

$$\mathscr{L}_\infty(G, w) := \Big\{ f : G \to \mathbb{C} \;\Big|\; \|f\|_{\infty,w} < \infty \Big\},$$

où

$$\|f\|_{\infty,w} := \|wf\|_\infty = \inf \Big\{ M \geq 0 : \; w(x)\big|f(x)\big| \leq M \quad \mu\text{-presque partout} \Big\}.$$

Les espaces pondérés de fonctions jouent un rôle important tant en analyse harmonique théorique (voir par exemple le théorème de Muckenhoupt [30]) qu'au niveau des applications où, en substance, on peut introduire une pondération pour étudier, par exemple, le comportement des fonctions autour d'un certain point donné en ignorant d'éventuelles oscillations à l'infini ou, au contraire, pour accentuer le comportement asymptotique des fonctions. Pour le dire autrement, l'application d'une pondération permet de façonner ou d'étudier quantitativement la croissance et la décroissance des fonctions sujettes à étude comme en fait foi l'exemple suivant :

Exemple 1.2. Considérons le groupe $G := \mathbb{R}$ et la pondération $w : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ définie par $w(x) := \big(1 + |x|\big)^{-\alpha}$ avec $\alpha \neq 0$. Notons qu'une fonction f appartient à $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}, w)$ si

$$\|f\|_{\infty,w} \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} w(x)\big|f(x)\big| \;<\; \infty,$$

c'est-à-dire s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\big|f(x)\big| \;\leq\; C\big(1 + |x|\big)^{\alpha}. \tag{1.3}$$

Ainsi, si $\alpha < 0$ alors l'inégalité (1.3) permet d'estimer la décroissance de f lorsque x tend vers l'infini. À l'inverse, si $\alpha > 0$ alors l'inégalité (1.3) entraîne que f ne peut croître qu'au plus comme un polynôme de degré $\lceil\alpha\rceil$.

Bien entendu, il ne suffit pas d'introduire n'importe quelle pondération pour obtenir instantanément et sans effort une algèbre de convolution. L'ajout d'une pondération de la forme $w \equiv c > 0$, par exemple, ne modifie pas substantiellement le comportement des fonctions et la structure des espaces $\mathscr{L}_p$; une telle pondération ne fait qu'opérer qu'un changement d'échelle.

Étant donné $p > 1$, le problème consistant à décrire de façon exhaustive la classe $\mathscr{W}\mathscr{L}(p)$ des groupes pour lesquels il existe au moins une pondération pour laquelle $\mathscr{L}_p(G, w)$ est $*$-stable demeure non résolue à ce jour et apparaît être d'une redoutable difficulté. Quoi qu'il en soit, des éléments de réponse non négligeables ont été obtenus par Kuznetsova [26; 27; 28] :

- Si G est un groupe abélien alors $G \in \mathscr{W}\mathscr{L}(p)$ si et seulement si G est σ-compact [1] ;
- Si G est un groupe non abélien alors $G \in \mathscr{W}\mathscr{L}(p)$ si G est σ-compact, mais la réciproque est fausse ;
- La teneur de $\mathscr{W}\mathscr{L}(p)$ dépend de l'indice p. Autrement dit, on a $\mathscr{W}\mathscr{L}(p) \neq \mathscr{W}\mathscr{L}(q)$ en général si $p \neq q$.

Une fois qu'on a établi qu'un certain groupe G appartient à la classe $\mathscr{W}\mathscr{L}(p)$, une épineuse question demeure :

Question 1.1. Peut-on caractériser la classe $\mathscr{W}_p(G)$ des pondérations sur G pour lesquelles $\mathscr{L}_p(G, w)$ est $*$-stable ?

1. Rappelons qu'un espace topologique est dit σ-compact s'il peut s'exprimer comme une union dénombrable d'ensembles compacts

1.3.1 Cas où $p = 1$

Le théorème suivant – dont nous avons été incapable d'établir avec certitude la paternité, mais dont une version partielle est présentée dans [17] et dont un cas particulier est démontré en entier dans [13] – fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une pondération appartienne à la classe $\mathscr{W}_1(G)$.

Théorème 1.7. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) La pondération w est M-faiblement sous-multiplicative, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in G$ on a

$$w(xy) \ \leq \ Mw(x)w(y), \tag{1.4}$$

(ii) L'espace $\mathscr{L}_1(G, w)$ est $*$-stable et la norme $\|\cdot\|_{1,w}$ est M-faiblement sous-multiplicative :

$$\big\|f * g\big\|_{1,w} \ \leq \ M\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}, \qquad \big(f, g \in \mathscr{L}_1(G, w)\big).$$

Démonstration.

- Implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Quelles que soient $f, g \in \mathscr{L}_1(G, w)$, par une utilisation du théorème de Fubini on trouve :

$$\begin{aligned}
\big\|f * g\big\|_{1,w} &\leq \int_G w(x) \int_G \big|f(y)g(y^{-1}x)\big| \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&\leq \int_G Mw(y)w(y^{-1}x) \int_G \big|f(y)\big|\big|g(y^{-1}x)\big| \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&= M \int_G w(y)\big|f(y)\big| \left(\int_G w(y^{-1}x)\big|g(y^{-1}x)\big| \, d\mu(x) \right) \, d\mu(y) \\
&= M\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}.
\end{aligned}$$

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (i).
  - Cas d'un groupe discret. Étant donné $x, y \in G$, considérons la fonction δ_x définie comme suit :

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = y, \\ 0, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

    Observons que $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$. Par conséquent

$$w(xy) \ = \ \|\delta_{xy}\|_{1,w} \ = \ \big\|\delta_x * \delta_y\big\|_{1,w} \ \leq \ M\|\delta_x\|_{1,w}\|\delta_y\|_{1,w} \ = \ Mw(x)w(y).$$

  - Cas d'un groupe non discret. La démonstration est similaire mais nécessite d'avoir recours aux approximations de l'identité. Pour avoir tous les détails on pourra consulter la proposition 1.11 et le théorème 1.13 de [11]. □

Si la sous-multiplicativité au sens faible suffit à assurer la $*$-stabilité de $\mathscr{L}_1(G, w)$, il en va manifestement tout autrement pour $p > 1$ comme en témoigne l'exemple suivant :

Exemple 1.3. Considérons G un groupe abélien d'ordre infini qui n'est ni compact ni discret (par exemple $G := \mathbb{R}$) ainsi que la pondération multiplicative $w \equiv 1$. Alors il découle directement de la partie (iii) du théorème de Quek et Yap 1.5 que $\mathscr{L}_p(G, w)$ n'est pas $*$-stable.

1.3.2 Cas où $p = \infty$

Étant donné $G \in \mathscr{W}\mathscr{L}(\infty)$, la classe $\mathscr{W}_\infty(G)$ est elle aussi complètement caractérisée par une condition relativement simple à énoncer.

Théorème 1.8. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) La fonction $\frac{1}{w}$ est C-faiblement sous-convolutive, c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{w} * \frac{1}{w}\right)(x) \ \leq \ C\frac{1}{w}(x), \tag{1.5}$$

pour tout $x \in G$;

(ii) L'espace $\mathscr{L}_\infty(G, w)$ est $*$-stable et la norme $\|\cdot\|_{\infty,w}$ est C-faiblement sous-multiplicative, c'est-à-dire

$$\big\|f * g\big\|_{\infty,w} \ \leq \ C\|f\|_{\infty,w}\|g\|_{\infty,w} \tag{1.6}$$

pour tout $f, g \in \mathscr{L}_\infty(G, w)$.

Démonstration.

- Implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Étant donné $f, g \in \mathscr{L}_\infty(G, w)$, pour μ-presque tout $x \in G$ on a

$$\begin{aligned}
\big|(f * g)(x)\big| \ &\leq \ \int_G \big|f(y)g(y^{-1}x)\big| \, d\mu(y) \\
&= \ \int_G \frac{w(y)\big|f(y)\big|w(y^{-1}x)\big|g(y^{-1}x)\big|}{w(y)w(y^{-1}x)} \, d\mu(y) \\
&\leq \ \int_G \frac{\|f\|_{\infty,w}\|g\|_{\infty,w}}{w(y)w(y^{-1}x)} \, d\mu(y) \\
&= \ \left(\frac{1}{w} * \frac{1}{w}\right)(x)\|f\|_{\infty,w}\|g\|_{\infty,w} \\
&\leq \ C\frac{1}{w(x)}\|f\|_{\infty,w}\|g\|_{\infty,w}.
\end{aligned}$$

  Ainsi

$$\big\|f * g\big\|_{\infty,w} \ \leq \ C\|f\|_{\infty,w}\|g\|_{\infty,w}.$$

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Notons que $\frac{1}{w} \in \mathscr{L}_\infty(G, w)$ car

$$\big\|\tfrac{1}{w}\big\|_{\infty,w} \ = \ \big\|w \cdot \tfrac{1}{w}\big\|_\infty \ = \ 1.$$

  Ainsi, en posant $f := \frac{1}{w}$ et $g := \frac{1}{w}$ dans l'équation (1.6), on obtient

$$\big\|\tfrac{1}{w} * \tfrac{1}{w}\big\|_{\infty,w} \ \leq \ C.$$

Cela signifie que

$$w(x)\left|\left(\tfrac{1}{w} * \tfrac{1}{w}\right)(x)\right| \;\leq\; C$$

pour μ-presque tout $x \in G$, d'où on tire que la fonction $\frac{1}{w}$ est C-faiblement sous-convolutive. □

1.3.3 Cas où $p > 1$

Observant que la preuve d'un résultat figurant implicitement dans un article précurseur de Wermer [51] puis, sous une forme plus explicite, dans les travaux de Kerlin et Lambert [24] ainsi que dans ceux de Nikol'skiĭ [31] était transférable *mutatis mutandis* à tous les groupes localement compacts séparés, Kuznetsova a démontré dans [26] que, pour $p > 1$, la $*$-stabilité de $\mathscr{L}_p(G, w)$ de même que la sous-multiplicativité au sens faible de la norme $\|\cdot\|_{p,w}$ sont assurés si la fonction $\frac{1}{w^q}$ est faiblement sous-convolutive , où q désigne l'exposant conjugué de p. Comme ce résultat joue un rôle central dans ce qui suit, nous en détaillerons la preuve.

Théorème 1.9. *Soient $p, q \in (1, \infty)$ des exposants conjugués et soit (G, w) un groupe pondéré. Si la fonction $\frac{1}{w^q}$ est C^q-faiblement sous-convolutive, c'est-à-dire si pour tout $x \in G$ on a*

$$\left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(x) \;\leq\; C^q \frac{1}{w^q}(x), \tag{1.7}$$

alors $\mathscr{L}_p(G, w)$ est $*$-stable et la norme $\|\cdot\|_{p,w}$ est C-faiblement sous-multiplicative, c'est-à-dire

$$\big\|f * g\big\|_{p,w} \;\leq\; C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w} \tag{1.8}$$

pour tout $f, g \in \mathscr{L}_p(G, w)$.

Démonstration. Soient $f, g \in \mathscr{L}_p(G, w)$. Quel que soit $x \in G$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
&\int_G \left|f(y)g(y^{-1}x)\right| \, d\mu(y) \\
\leq\quad & \left(\int_G \frac{1}{w(y)^q w(y^{-1}x)^q} \, d\mu(y)\right)^{1/q} \left(\int_G w(y)^p \big|f(y)\big|^p w(y^{-1}x)^p \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
=\quad & \left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(x)^{1/q} \left(\int_G w(y)^p \big|f(y)\big|^p w(y^{-1}x)^p \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
\leq\quad & C \frac{1}{w(x)} \left(\int_G w(y)^p \big|f(y)\big|^p w(y^{-1}x)^p \big|g(y^{-1}x)\big|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\left\|f * g\right\|_{p,w}^{p} &\leq \int_G w(x)^p \left(\int_G \left|f(y)g(y^{-1}x)\right| \, d\mu(y) \right)^p \, d\mu(x) \\
&\leq \int_G C^p \int_G w(y)^p \left|f(y)\right|^p w(y^{-1}x)^p \left|g(y^{-1}x)\right|^p \, d\mu(y) \, d\mu(x) \\
&= C^p \int_G w(y)^p \left|f(y)\right|^p \left(\int_G w(y^{-1}x)^p \left|g(y^{-1}x)\right|^p \, d\mu(x) \right) \, d\mu(y) \\
&= C^p \|f\|_{p,w}^p \|g\|_{p,w}^p .
\end{aligned}$$

Enfin, en extrayant la p-ième racine on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$\left\|f * g\right\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}, \qquad \big(f, g \in \mathscr{L}_p(G,w)\big). \quad \square$$

Le fait que le théorème 1.9 ne fasse mention que du caractère suffisant de la condition (1.7) et non pas d'un quelconque caractère nécessaire n'est pas une omission de notre part. On connaît en effet de nombreux exemples de groupes pondérés (G, w) pour lesquels $\mathscr{L}_p(G, w)$ avec $p > 1$ est $*$-stable et vérifie l'équation (1.8) mais pas la condition (1.7). Un exemple identifié par Kuznetsova dans [26] est présenté ci-dessous et d'autres exemples plus complexes seront présentés plus loin.

Exemple 1.4. Fixons $p \leq 2$. Considérons la pondération $w : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ définie par $w(0) := 1$ et $w(t) := \left(\frac{\pi}{|t|}\right)^{1/2p}$ pour $t \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$. On vérifie sans difficulté que $w \in \mathscr{L}_p(\mathbb{T})$ avec $\|w\|_p = 2^{1/p}$. Pour tout $t \in \mathbb{T}$ fixé, on a

$$\left|(f * g)(t)\right| \leq \|f\|_p\|g\|_q \leq \|f\|_p\|g\|_p \leq \|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w},$$

où la première inégalité provint d'une application de l'inégalité de Hölder, la seconde découle du théorème C.3 et la dernière vient de ce que $w \geq 1$. Il s'ensuit que

$$\left\|f * g\right\|_{p,w} \leq \|w\|_p\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}.$$

Cela signifie que $\mathscr{L}_p(\mathbb{T}, w)$ est $*$-stable et satisfait l'équation (1.8) avec $C = 2^{1/p}$.

Cependant, étant donné s satisfaisant $-\frac{\pi}{2} < s < 0$ et $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ on a $w(t) \leq 2^{1/2p}$ et $w(s - t) \leq 2^{1/2p}$, de sorte que

$$\left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(s) \geq \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{w(t)^q w(s-t)^q} \frac{dt}{2\pi} \geq \frac{2^{-q/p}}{4}, \qquad \left(-\tfrac{\pi}{2} < s < 0\right).$$

Comme $\frac{1}{w^q}(s) \xrightarrow[s \to 0]{} 0$, la pondération w ne vérifie pas la condition (1.7).

Pour clore ce chapitre, soulignons qu'à ce jour aucune condition caractérisant de façon exhaustive la classe $\mathscr{W}_p(G)$ – à l'image de ce qu'accomplissent les théorèmes 1.7 et 1.8 – n'a pu être identifiée, et ce, quel que soit $p > 1$.

Chapitre 2

Sous-convolutivité et $*$-stabilité sur le groupe additif des nombres réels

2.1 Un exemple dû à Kuznetsova

Si le théorème 1.9 établit hors de tout doute que la sous-convolutivité au sens faible de la fonction $\frac{1}{w^q}$ suffit à assurer la $*$-stabilité de $\mathscr{L}_p(G,w)$ et la sous-multiplicativité au sens faible de la norme $\|\cdot\|_{p,w}$, l'exemple 1.4 témoigne de façon tout aussi incontestable du caractère contingent de cette condition.

Il convient cependant de mettre en exergue le fait que l'exemple 1.4 fait intervenir de manière déterminante la compacité du groupe sous-jacent. Or le théorème de Saeki 1.6 a fait ressortir emphatiquement que la compacité est susceptible d'occasionner des variations comportementales significatives. Il est donc tout à fait légitime de se poser la question suivante :

Question 2.1. Étant donné une pondération w sur un groupe G qui n'est pas compact, est-il nécessaire que $1/w^q$ soit faiblement sous-convolutive pour que l'espace $\mathscr{L}_p(G,w)$ soit $*$-stable et que la norme $\|\cdot\|_{p,w}$ soit faiblement sous-multiplicative ?

L'exemple suivant (présenté dans une remarque suivant le théorème 1 dans [26]) témoigne du fait que le caractère contingent de la sous-convolutivité au sens faible de la fonction $\frac{1}{w^q}$ n'est pas observable que pour les groupes compacts.

Exemple 2.1. Considérons la pondération $w : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ définie par

$$w(x) := \begin{cases} \max\left\{|x|, |x|^{-1/4}\right\}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

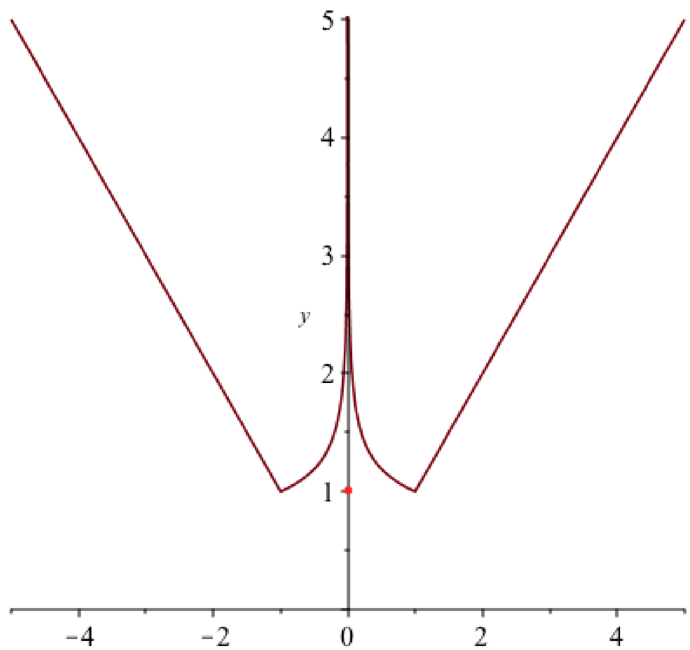

FIGURE 2.1 – Graphe de la pondération w définie à l'équation (2.1) pour $x \in [-5, 5]$

Remarquons que $w^2 \leq w_1^2 + w_2^2$, où

$$w_1(x) := \begin{cases} |x|, & |x| \geq 1, \\ 1, & |x| < 1; \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_2(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ |x|^{-1/4}, & |x| < 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que w_1 satisfait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{w_1^2} * \frac{1}{w_1^2}\right)(x)}{\frac{1}{w_1^2}(x)} \;\leq\; 32.$$

Par conséquent, il découle du théorème 1.9 que

$$\int_{\mathbb{R}} w_1(x)^2 \big|(f * g)(x)\big|^2 \, dx \;=\; \big\|f * g\big\|_{2,w_1}^2 \;\leq\; 32\|f\|_{2,w_1}^2 \|g\|_{2,w_1}^2 \;\leq\; 32\|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2 \qquad (2.2)$$

pour tout $f, g \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}, w)$.

Comme $w \geq 1$, on a que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{2,w}$ de sorte que, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} \big|(f * g)(x)\big| \;&=\; \left|\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) \, dy\right| \\ &\leq\; \left(\int_{\mathbb{R}} \big|f(y)\big| \, dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \big|g(x-y)\big| \, dy\right)^{1/2} \\ &\leq\; \|f\|_{2,w} \|g\|_{2,w}. \end{aligned}$$

Ainsi, quelles que soient $f, g \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}, w)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} w_2(x)^2 \big|(f * g)(x)\big|^2 \, dx \;\leq\; \left(\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2} \, dx\right) \|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2 \;=\; 4\|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2. \tag{2.3}$$

Des inégalités (2.2) et (2.3), on tire que

$$\big\|f * g\big\|_{2,w}^2 \;\leq\; 32\|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2 + 4\|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2, \qquad \big(f, g \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}, w)\big),$$

et enfin

$$\big\|f * g\big\|_{2,w} \;\leq\; 6\|f\|_{2,w} \|g\|_{2,w},$$

ce qui signifie que $\mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ est $*$-stable.

Or, pour $x \in [-1, 0)$ on a

$$\frac{\left(\dfrac{1}{w^2} * \dfrac{1}{w^2}\right)(x)}{\dfrac{1}{w^2}(x)} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(x-y)^2} \, dy \;\geq\; \int_1^{\infty} \frac{|x|^{-1/2}}{y^2(1+y)^2} \, dy \;\geq\; \int_1^{\infty} \frac{|x|^{-1/2}}{4y^4} \, dy \;\geq\; \frac{|x|^{-1/2}}{4}.$$

Comme $|x|^{-1/2} \xrightarrow[x \to 0^-]{} \infty$, la fonction $\dfrac{1}{w^2}$ n'est pas faiblement sous-convolutive.

Chapitre 3

Sous-convolutivité et $*$-stabilité sur les groupes discrets

3.1 Sous-convolutivité et stabilité sur les groupes discrets

Les exemples 1.4 et 2.1 indiquent clairement que, pour que la norme sur $\mathscr{L}_p(G, w)$ soit faiblement sous-multiplicative, la sous-convolutivité au sens faible de $\frac{1}{w^q}$ n'est pas primordiale.

En va-t-il autrement si on se restreint aux seuls groupes discrets ? Autrement dit, se pourrait-il que la sous-convolutivité au sens faible soit une condition non seulement suffisante, mais également nécessaire à la sous-multiplicativité au sens faible de la norme sur $\ell_p(G, w)$? Kuznetsova s'est penché sur cette question et l'a résolu dans [28]. Dans cette section, nous présenterons le résultat fort éclairant auquel elle est parvenue.

Définition 3.1. Un groupe G est dit *libre sur* $S \subseteq G$ si chaque élément de G admet une unique représentation comme un produit réduit [1] d'éléments de S et d'inverses d'éléments de S.

Intuitivement, on peut voir le groupe libre sur S comme l'ensemble des mots engendrés par S, c'est-à-dire l'ensemble des chaînes finies et réduites de caractères constituées d'éléments de S et d'inverses d'éléments de S.

Théorème 3.1. *Soit G un groupe libre d'ordre infini et muni de la topologie discrète. Il existe une pondération w sur G pour laquelle $\mathscr{L}_p(G, w)$ est $*$-stable et la norme $\|\cdot\|_{p,w}$ est faiblement sous-multiplicative.*

Démonstration. Voir le théorème 1.1 de [28]. □

1. *Réduit* signifie qu'il n'y a pas d'occurrence d'un sous-produit de la forme xx^{-1} ou de la forme $x^{-1}x$.

Il convient de mettre en évidence qu'une pondération w sur un groupe libre G d'ordre indénombrable muni de la topologie discrète ne saurait être faiblement sous-convolutive. En effet, quel que soit $x \in G$, le corollaire A.2 implique que

$$\frac{\left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(x)}{\frac{1}{w^q}(x)} = \sum_{y \in G} \frac{w(x)^q}{w(y)^q w(y^{-1}x)^q} = \infty,$$

car il s'agit d'une somme indénombrable de termes strictement positifs.

Remarque. Si on prenait le temps d'analyser en détail la preuve établie par Kuznetsova, on remarquerait que – contrairement aux pondérations définies aux exemples 1.4 et 2.1 – la pondération sur le groupe libre G est localement bornée. Ainsi, l'ajout de cette hypothèse ne change rien à la dynamique : la sous-convolutivité au sens faible demeure suffisante mais facultative.

D'autres leçons seront tirées du théorème 3.1 au prochain chapitre lorsque nous aurons présentés tous les résultats prérequis.

3.2 Une tentative suivant la voie tracée par Kuznetsova

On remarquera que les groupes dont traite le théorème 3.1 sont discrets, certes, mais ils sont également non abéliens (et même non moyennables). Or, il arrive que certains résultats s'appliquant aux groupes abéliens (ou moyennables) échouent pour les groupes non abéliens (ou non moyennables) et *vice versa*. Nous en verrons d'ailleurs un cas patent au prochain chapitre. Il est donc légitime de se poser la question suivante :

Question 3.1. Étant donné un groupe abélien discret G, une pondération w sur G doit-elle nécessairement satisfaire à la condition (1.7) pour que $\ell_p(G, w)$ soit $*$-stable et vérifie (1.8) ?

Afin de tenter de résoudre cette question, on peut chercher à s'inspirer des exemples 1.4 et 2.1. Or, on remarquera en étudiant ces deux exemples que le fait que les pondérations définies ne sont pas localement bornées joue un rôle crucial dans la violation de la condition de sous-convolutivité au sens faible. La topologie des groupes discrets fait cependant en sorte que toute fonction sur un tel groupe est automatiquement localement bornée. Il n'est donc pas possible de suivre aveuglément la voie tracée dans les exemples 1.4 et 2.1.

Une analyse plus attentive de l'exemple 2.1 suggère une autre avenue : considérer d'abord une pondération w_1 pour laquelle la norme $\|\cdot\|_{2,w_1}$ est faiblement sous-multiplicative (en vertu du théorème 1.9 toute pondération faiblement sous-convolutive fera l'affaire), puis définir une pondération w vérifiant $w^2 = w_1^2 + w_2^2$, où w_2 est une fonction qui reste à définir, et – tout comme à l'exemple 2.1 – mettre à profit les propriétés de w_2 pour montrer que la norme $\|\cdot\|_{2,w}$ est faiblement sous-multiplicative mais que la pondération w n'est pas faiblement convolutive.

Suivant cette ligne de pensée, nous avons montré que la satisfaction par la fonction w_2 de deux conditions relativement peu exigeantes suffit à garantir la sous-multiplicativité au sens faible de la norme $\|\cdot\|_{2,w}$:

Proposition 3.2. *Soit w_1 une pondération sur G qui est C^2-faiblement sous-convolutive et soit w_2 est une pondération sur G vérifiant*

$$A := \sup_{x,y\in G} \frac{w_2(xy)}{w_2(x)w_2(y)} \ < \ \infty \qquad \text{et} \qquad B := \sum_{x\in G} \frac{w_2(x)^2}{w_1(x)^2} \ < \ \infty. \tag{3.1}$$

Posons $w^2 := w_1^2 + w_2^2$. Alors $\ell_2(G,w)$ est $*$-stable et vérifie

$$\big\|f*g\big\|_{2,w} \ \leq \ \big(C^2 + A^2B^2\big)^{1/2}\|f\|_{2,w}\|g\|_{2,w}, \qquad \big(f,g\in\ell_2(G,w)\big).$$

Démonstration. Quelles que soient $f,g\in\ell_2(G,w)$, on a

$$\begin{aligned}
\big\|f*g\big\|_{2,w}^2 \ &\leq \ \big\|f*g\big\|_{2,w_1}^2 + \big\|f*g\big\|_{2,w_2}^2 \\
&\overset{1.9}{\leq} \ C^2\|f\|_{2,w_1}^2\|g\|_{2,w_1}^2 + \big\|f*g\big\|_{2,w_2}^2 \\
&\overset{C.3}{\leq} \ C^2\|f\|_{2,w_1}^2\|g\|_{2,w_1}^2 + \big\|f*g\big\|_{1,w_2}^2 \\
&\overset{1.7}{\leq} \ C^2\|f\|_{2,w_1}^2\|g\|_{2,w_1}^2 + \Big(A\|f\|_{1,w_2}\|g\|_{1,w_2}\Big)^2 \\
&\overset{\dagger}{\leq} \ C^2\|f\|_{2,w_1}^2\|g\|_{2,w_1} + \Big(A\big(B^{1/2}\|f\|_{2,w_1}\big)\big(B^{1/2}\|g\|_{2,w_1}\big)\Big)^2 \\
&\leq \ \big(C^2 + A^2B^2\big)\|f\|_{2,w_1}^2\|g\|_{2,w_1}^2 \\
&\leq \ \big(C^2 + A^2B^2\big)\|f\|_{2,w}^2\|g\|_{2,w}^2,
\end{aligned}$$

où l'inégalité marquée d'une croix vient d'une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

□

Malgré ce départ prometteur, cette approche est infructueuse puisque la sous-convolutivité au sens faible de w_1 conjointement avec la condition (3.1) implique que la pondération w sera elle aussi sous-convolutive. En effet, quel que soit $x\in G$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x)}{\frac{1}{w^2}(x)} \ &= \ \sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2w(y^{-1}x)^2} \\
&\leq \ \sum_{y\in G} \frac{w_1(x)^2}{w(y)^2w(y^{-1}x)^2} \ + \ \sum_{y\in G} \frac{w_2(x)^2}{w(y)^2w(y^{-1}x)^2} \\
&\leq \ \sum_{y\in G} \frac{w_1(x)^2}{w_1(y)^2w_1(y^{-1}x)^2} \ + \ \sum_{y\in G} \frac{w_2(x)^2}{w_1(y)^2w_2(y^{-1}x)^2} \\
&\leq \ C^2 \ + \ \sum_{y\in G} \frac{w_2(x)^2}{w_2(y)^2w_2(y^{-1}x)^2}\cdot\frac{w_2(y)^2}{w_1(y)^2} \\
&\leq \ C^2 + A^2B.
\end{aligned}$$

3.3 Semi-groupes abéliens discrets : un exemple dû à Fricke

Avant de se pencher plus avant sur le cas des groupes abéliens discrets et son porte-étendard, le groupe additif $\mathbb{Z}$, nous nous permettrons une digression pour étudier le cas du semi-groupe additif des nombres naturels $\mathbb{N}$.

Comme l'impossibilité dans $\mathbb{N}$ de donner un sens à l'expression $x-y$ pour $x, y \in \mathbb{N}$ satisfaisant $x < y$ rend inopérante la définition 1.1, nous devrons d'abord préciser ce qu'on entend par la convolution de deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Définition 3.2. Étant donné deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. La *convolution de f et g* est la fonction $(f * g) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ définie comme suit :

$$(f * g)(n) := \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k).$$

En reproduisant *mutatis mutandis* la démonstration du théorème 1.9, on obtient un résultat analogue pour $\ell_p(\mathbb{N}, w)$ muni de la convolution « tronquée » définie ci-dessus.

Théorème 3.3. *Soient $p, q \in (1, \infty)$ des exposants conjugués et soit w une pondération sur le semi-groupe $\mathbb{N}$. Si la fonction $1/w^q$ est C^q-faiblement sous-convolutive, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(n) \;\leq\; C^q \frac{1}{w^q}(n), \tag{3.2}$$

alors $\ell_p(G, w)$ est $*$-stable et la norme $\|\cdot\|_{p,w}$ est C-faiblement sous-multiplicative, c'est-à-dire

$$\big\|f * g\big\|_{p,w} \;\leq\; C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w} \tag{3.3}$$

pour tout $f, g \in \ell_p(\mathbb{N}, w)$.

Démonstration. Soient $f, g \in \ell_p(\mathbb{N}, w)$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \big|f(k)g(n-k)\big| \;&\leq\; \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{w(k)^q w(n-k)^q}\right)^{1/q} \left(\sum_{k=0}^{n} w(k)^p\big|f(k)\big|^p w(n-k)^p\big|g(n-k)\big|^p\right)^{1/p} \\
&=\; \left(\frac{1}{w^q} * \frac{1}{w^q}\right)(n)^{1/q} \left(\sum_{k=0}^{n} w(k)^p\big|f(k)\big|^p w(n-k)^p\big|g(n-k)\big|^p\right)^{1/p} \\
&\leq\; C\frac{1}{w}(n) \left(\sum_{k=0}^{n} w(k)^p\big|f(k)\big|^p w(n-k)^p\big|g(n-k)\big|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\big\|f * g\big\|_{p,w}^p &\le \sum_{n=0}^{\infty} w(n)^p \left(\sum_{k=0}^{n} \big|f(k)g(n-k)\big|\right)^p \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} C^p \left(\sum_{k=0}^{n} w(k)^p \big|f(k)\big|^p w(n-k)^p \big|g(n-k)\big|^p\right) \\
&\le C^p \sum_{k=0}^{\infty} w(k)^p \big|f(k)\big|^p \sum_{n=0}^{\infty} w(n)^p \big|g(n)\big|^p \\
&= C^p \|f\|_{p,w}^p \|g\|_{p,w}^p.
\end{aligned}$$

Enfin, en extrayant la p-ième racine, on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$\big\|f * g\big\|_{p,w} \le C\|f\|_{p,w}\|g\|_{p,w}, \qquad \big(f, g \in \ell_p(\mathbb{N}, w)\big). \quad \square$$

Soulignons que le théorème 3.3 figure implicitement dans les travaux de Wermer [51] datant de 1954 et qu'il a été obtenu, sous forme explicite, de façon indépendante par Kerlin et Lambert [24] en 1973 ainsi que par Nikol'skiĭ [31] l'année suivante.

Tout comme le théorème analogue s'appliquant aux groupes, le théorème 3.3 présente une condition suffisante et suggère la question suivante : cette condition suffisante est-elle également nécessaire ? Dans un article publié en 1978, Gerd Fricke [15] a montré que la condition (3.2) ne caractérise pas plus la sous-multiplicativité au sens faible de la norme sur $\ell_p(\mathbb{N}, w)$ que la condition (1.7) ne la caractérise sur $\mathscr{L}_p(G, w)$. La preuve de Fricke comportant certaines subtilités, nous avons préféré – par souci d'exhaustivité et de clarté – inclure une démonstration complète et détaillée dans le cas particulier où $p = 2$.

Théorème 3.4. *Il existe une pondération $w : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ satisfaisant (3.3) mais pas (3.2).*

Démonstration.

Définition de la pondération.
Soit $\{n_j\}_{j\ge1}$ une suite de nombres naturels qui seront choisis ultérieurement. Pour l'instant, il nous suffira de supposer que $n_j > 2n_{j-1}$ pour tout $j > 1$. Posons

$$w(k) := a_0 a_1 \cdots a_k, \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

où

$$a_i := \begin{cases} 1, & 0 \le i \le n_1, \\ \frac{1}{n_j}, & n_{j-1} < i \le n_j - n_{j-1}, \\ \frac{1}{n_{j-1}}, & n_j - n_{j-1} < i \le n_j. \end{cases}$$

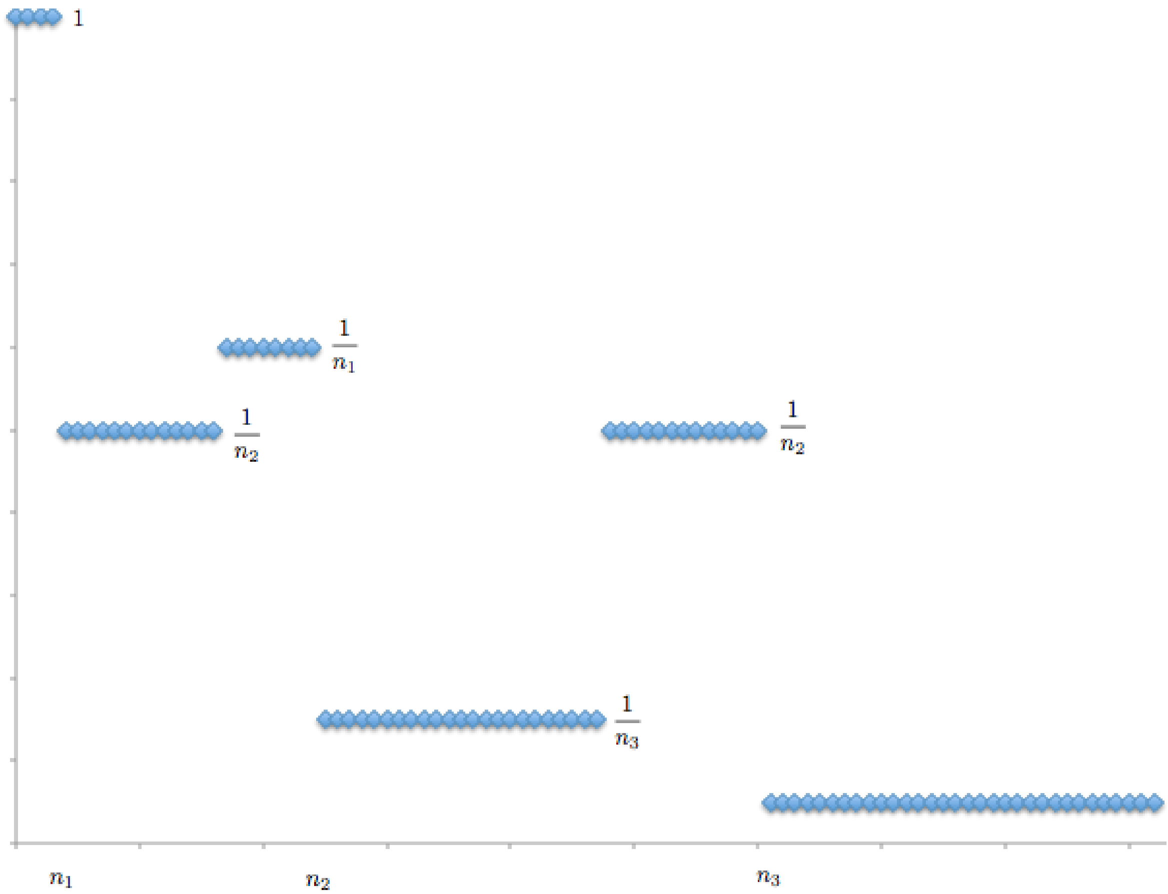

FIGURE 3.1 – Esquisse d'une pondération suivant la définition donnée par Fricke

Afin d'améliorer l'intelligibilité de la preuve, nous tiendrons pour acquis les deux énoncés suivants (ils seront démontré à la toute fin) :

ÉNONCÉ I.
La pondération w satisfait

$$\frac{w(n)}{w(k)w(n-k)} \leq a_n, \qquad (0 < k < n).$$

ÉNONCÉ II.
La pondération w satisfait

$$\frac{w(n_j)}{w(k)w(n_j-k)} \geq (a_{n_j})^{n_{j-1}}, \qquad (0 < k < n_j).$$

Preuve de ce que $\ell_2(\mathbb{N}, w)$ satisfait (3.3).
Étant donné $f, g \in \ell_2(\mathbb{N}, w)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|f * g\right\|_{2,w}^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} w(n)^2 \left(\sum_{k=0}^{n} \left|f(k)\right|\left|g(n-k)\right|\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} w(n)^2 \left(\left|f(0)\right|\left|g(n)\right| + \left|f(n)\right|\left|g(0)\right| + \sum_{k=1}^{n-1} \left|f(k)\right|\left|g(n-k)\right|\right)^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} w(n)^2 \cdot 9 \left(\left|f(0)\right|^2\left|g(n)\right|^2 + \left|f(n)\right|^2\left|g(0)\right|^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left|f(k)\right|\left|g(n-k)\right|\right)^2\right) \\
&= 9\left|f(0)\right|^2 \|g\|_{2,w}^2 + 9\left|g(0)\right|^2 \|f\|_{2,w}^2 + 9\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} w(n)\left|f(k)\right|\left|g(n-k)\right|\right)^2 \\
&\leq 18\|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2 + 9\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} w(n)\left|f(k)\right|\left|g(n-k)\right|\right)^2.
\end{aligned}$$

Or, l'énoncé I implique que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n-1} w(n)\left|f(k)\right|\left|g(n-k)\right|\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{w(n)}{w(k)w(n-k)} w(k)\left|f(k)\right| w(n-k)\left|g(n-k)\right|\right)^2 \\
&\leq a_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} w(k)\left|f(k)\right| w(n-k)\left|g(n-k)\right|\right)^2 \\
&\leq a_n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} w(k)^2\left|f(k)\right|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} w(n-k)^2\left|g(n-k)\right|^2\right) \\
&\leq a_n^2 \|f\|_{2,w}^2 \|g\|_{2,w}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en combinant ces deux chaînes d'inégalités, on obtient

$$\left\|f * g\right\|_w^2 \leq \left(18 + 9\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2\right) \|f\|_w^2 \|g\|_w^2.$$

Ainsi, pourvu que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, cela achève la démonstration d'un équation du type (3.3). Or on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = n_1 + \frac{n_2 - 2n_1}{n_2^2} + \frac{n_1}{n_1^2} + \frac{n_3 - 2n_2}{n_3^2} + \frac{n_2}{n_2^2} + \ldots \leq n_1 + 2\sum_j \frac{1}{n_j} \leq n_1 + 2\sum_j \frac{1}{2^j}$$

et cette dernière série converge manifestement.

Preuve de ce que w ne vérifie pas la condition (3.2).
Quel que soit $j \in \mathbb{N}$ fixé, il découle de l'énoncé II que

$$\frac{\left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(n_j)}{\frac{1}{w^2}(n_j)} = \sum_{k=0}^{n_j} \frac{w(n_j)^2}{w(k)^2 w(n_j-k)^2} \geq \sum_{k=1}^{n_j-1} (a_{n_j})^{2\cdot n_{j-1}} \geq \frac{n_j}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)^{2\cdot n_{j-1}}.$$

Notons qu'en choisissant des n_j suffisamment grands on peut clairement faire en sorte que

$$\frac{n_j}{2} \cdot \left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)^{2 \cdot n_{j-1}} \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty.$$

Ce faisant, on s'assure que la fonction $1/w^2$ viole la condition de sous-convolutivité au sens faible.

Preuve de l'énonce I.

Remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{w(n)}{w(k)w(n-k)} \leq a_n \quad &\iff \quad \frac{a_0 a_1 \cdots a_n}{w(k)w(n-k)} \leq a_n \\ &\iff \quad \frac{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}{w(k)w(n-k)} \leq 1 \\ &\iff \quad \frac{w(n-1)}{w(k)w(n-k)} \leq 1. \end{aligned}$$

Nous procéderons par induction sur n pour démontrer cette dernière inégalité.

- Initialisation : L'inégalité est vraie pour $n = k+1$ car

$$\frac{w\big((k+1)-1\big)}{w(k)w\big((k+1)-k\big)} = \frac{w(k)}{w(k)w(1)} = \frac{1}{a_0 a_1} \leq 1.$$

  De même, inégalité est vérifiée pour $n = k+2$ puisque

$$\frac{w\big((k+2)-1\big)}{w(k)w\big((k+2)-k\big)} = \frac{w(k+1)}{w(k)w(2)} = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{k+1}}{(a_0 a_1 \cdots a_k)(a_0 a_1 a_2)} = \frac{a_{k+1}}{a_0 a_1 a_2} = 1.$$

- Hérédité : Pour $n > k+2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\frac{w(n)}{w(k)w(n+1-k)}}{\frac{w(n-1)}{w(k)w(n-k)}} &= \frac{w(n)w(n-k)}{w(n-1)w(n+1-k)} \\ &= \frac{(a_0 a_1 \cdots a_n)(a_0 a_1 \cdots a_{n-k})}{(a_0 a_1 \cdots a_{n-1})(a_0 a_1 \cdots a_{n+1-k})} \\ &= \frac{a_n}{a_{n-k+1}}. \end{aligned}$$

  Si cela est inférieur ou égal à 1 alors on a fini. Sinon c'est qu'il existe nécessairement $j \geq 2$ tel que

$$n_{j-1} < n-k+1 \leq n_j - n_{j-1} \qquad \text{et} \qquad n_j - n_{j-1} \leq n \leq n_j.$$

  Dans ce cas, on a

$$\frac{w(n)}{w(k)w(n+1-k)} = \frac{a_0 a_1 \cdots a_n}{(a_0 a_1 \cdots a_k)(a_0 a_1 \cdots a_{n+1-k})} = \frac{a_{n-k+2} \cdots a_n}{a_2 \cdots a_k}.$$

Le produit $a_{n-k+2}\cdots a_n$ est composé de $k-1$ termes dont au plus n_{j-1} valent $\frac{1}{n_{j-1}}$ et les autres valent au plus $\frac{1}{n_j}$. Donc

$$a_{n-k+2}\cdots a_n \;\leq\; \begin{cases} \left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)^{n_{j-1}}\left(\frac{1}{n_j}\right)^{k-1-n_{j-1}}, & \text{si } k > n_{j-1}, \\ \left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)^{k-1}, & \text{si } k \leq n_{j-1}. \end{cases}$$

Pour sa part, le produit $a_2\cdots a_k$ est composé de $k-1$ termes dont au moins $\min\{k-1, n_j-1\}$ valent au moins $\frac{1}{n_{j-1}}$ et le reste vaut au moins $\frac{1}{n_j}$. Donc

$$a_2\cdots a_k \;\geq\; \begin{cases} \left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)^{n_{j-1}}\left(\frac{1}{n_j}\right)^{k-1-n_{j-1}}, & \text{si } k > n_{j-1}, \\ \left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)^{k-1}, & \text{si } k \leq n_{j-1}. \end{cases}$$

En mettant toutes ces inégalité ensembles on obtient

$$\frac{w(n)}{w(k)w(n+1-k)} \;=\; \frac{a_{n-k+2}\cdots a_n}{a_2\cdots a_k} \;\leq\; 1,$$

ce qui complète l'induction et, du même coup, la démonstration de l'énoncé I.

Preuve de l'énonce II.

Par symétrie du terme dénominateur, on peut supposer sans perte de généralité que $k \leq \frac{n_j}{2}$.

- Si $k < n_{j-1}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{\frac{w(n_j)}{w(n_{j-1})w(n_j-n_{j-1})}}{\frac{w(n_j)}{w(n_k)w(n_j-k)}} &= \frac{w(n_k)w(n_j-k)}{w(n_{j-1})w(n_j-n_{j-1})} \\ &= \frac{(a_0a_1\cdots a_{n_k})(a_0a_1\cdots a_{n_j-k})}{(a_0a_1\cdots a_{n_{j-1}})(a_0a_1\cdots a_{n_j-n_{j-1}})} \\ &= \frac{a_{n_j-n_{j-1}+1}\cdots a_{n_j-k}}{a_{n_k+1}\cdots a_{n_{j-1}}}. \end{aligned}$$

  Ce dernier quotient est en fait un produit de termes de la forme $\frac{a_{n_j-r+1}}{a_r}$ pour $k < r \leq n_{j-1}$. Or chacun de ces termes est inférieur ou égal à 1.

- Si $k > n_{j-1}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{\frac{w(n_j)}{w(n_{j-1})w(n_j-n_{j-1})}}{\frac{w(n_j)}{w(n_k)w(n_j-k)}} &= \frac{w(n_k)w(n_j-k)}{w(n_{j-1})w(n_j-n_{j-1})} \\ &= \frac{(a_0a_1\cdots a_{n_k})(a_0a_1\cdots a_{n_j-k})}{(a_0a_1\cdots a_{n_{j-1}})(a_0a_1\cdots a_{n_j-n_{j-1}})} \\ &= \frac{a_{n_{j-1}+1}\cdots a_{n_k}}{a_{n_j-k+1}\cdots a_{n_j-n_{j-1}}}. \end{aligned}$$

  Ce dernier quotient est quant à lui un produit de termes de la forme $\frac{a_r}{a_{n_j-r+1}}$ pour $n_{j-1} < r \leq k$. Or chacun de ces termes est inférieur ou égal à 1.

Dans un cas comme dans l'autre on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{w(n_j)}{w(k)w(n_j-k)} &\geq \frac{w(n_j)}{w(n_{j-1})w(n_j-n_{j-1})} \\
&= \frac{a_0a_1\cdots a_{n_j}}{(a_0a_1\cdots a_{n_{j-1}})(a_0a_1\cdots a_{n_j-n_{j-1}})} \\
&= \frac{a_{n_j-n_{j-1}+1}\cdots a_{n_j}}{a_0a_1\cdots a_{n_j-1}} \\
&= \frac{a_{n_j}^{n_j-1}}{a_0a_1\cdots a_{n_j-1}} \\
&\geq a_{n_j}^{n_j-1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 4

Énoncé du problème principal

Ni les travaux de Fricke, ni ceux de Kuznetsova ne permettent de déterminer si, oui ou non, la sous-convolutivité au sens faible est une condition nécessaire à la $*$-stabilité des espaces $\ell_p(G, w)$ pour $p > 1$ lorsque G parcourt la classe des groupes abéliens discrets. La question demeure notamment en suspens dans le cas de $\mathbb{Z}$, l'un des trois plus importants groupes – avec $\mathbb{R}$ et $\mathbb{T}$ – en ce qui a trait aux applications pratiques de l'analyse harmonique. Par voie de conséquence, il s'agit incontestablement d'un cas sur lequel on aimerait statuer.

Problème principal. *Étant donné (G, w) un groupe abélien discret pondéré, est-il nécessaire que la pondération w soit faiblement sous-convolutive pour que l'espace $\ell_2(G, w)$ soit $*$-stable ?*

Les raisons justifiant notre insistance à étudier spécifiquement le cas $p = 2$ sont nombreuses et variées :

— Rappelons que les espaces ℓ_p sont emboîtés (voir le théorème C.3) et qu'on retrouve à une extrémité de la chaîne d'inclusion l'espace $\ell_\infty(G, w)$ pour lequel le théorème 1.8 nous enseigne que la sous-convolutivité au sens faible est une condition nécessaire et suffisante pour que cet espace soit $*$-stable et que sa norme soit faiblement sous-multiplicative. À l'autre extrémité, on retrouve $\ell_1(G, w)$ pour lequel on peut déduire que théorème 1.7 que la sous-convolutivité au sens faible est une condition suffisante, mais contingente. Il n'est pas rare, lorsqu'il y a une telle divergence comportementale, que le point de bifurcation soit $p = 2$. En un mot comme en mille, il est possible que la résolution du problème dans le cas $p = 2$ trace la voie vers la résolution pour tout $p \geq 2$ ou encore pour tout $p \leq 2$.

— L'espace $\ell_2(G, w)$ étant muni d'une riche structure d'espace de Hilbert, notre coffre à outils s'en trouve mieux garni. On dispose par exemple du théorème de représentation de Fréchet–Riesz pour caractériser les fonctionnelles linéaires continues sur $\ell_2(G, w)$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz est un autre exemple d'outil remarquablement utile. Il est vrai que pour $p \neq 2$ on peut compter sur l'inégalité de Hölder mais celle-ci est, au mieux, un substitut imparfait.

— La structure d'espace de Hilbert dont jouit $\ell_2(G,w)$ permet également des le recours à des techniques issues de la théorie des opérateurs définis sur des espaces de Hilbert ainsi qu'avec la théorie de espaces de Hilbert à noyau reproduisant.

Notation. Puisque dans la suite de l'exposé nous nous concentrerons sur le cas $p = 2$, nous adopterons une notation plus concise pour désigner la norme sur $\ell_2(G,w)$. Nous écrirons désormais $\|\cdot\|_w$ pour désigner $\|\cdot\|_{2,w}$.

4.1 Indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité

Commençons par déterminer sous quelles conditions la convolution de f et g en $x \in G$ est bien définie :

Lemme 4.1. *Soit (G,w) un groupe abélien discret pondéré et soit $x \in G$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\sum_{y\in G} \left|f(y)g(y^{-1}x)\right|$ *converge pour tout $f, g \in \ell_2(G,w)$;*

(ii) $\gamma_x := \inf_{y\in G} w(y)w(y^{-1}x) > 0$.

Si ces énoncés sont vérifiés alors, quels que soient $f, g \in \ell_2(G,w)$, on a

$$\sum_{y\in G} \left|f(y)g(y^{-1}x)\right| \;\leq\; \gamma_x^{-1}\|f\|_w\|g\|_w. \tag{4.1}$$

Démonstration. Les énoncés (i) et (ii) étant vérifiés d'emblée pour tout groupe d'ordre fini, nous ne considérons par conséquent que les groupes d'ordre infini.

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Étant donné $f, g \in \ell_2(G,w)$, il découle de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\begin{aligned}
\sum_{y\in G} \left|f(y)g(y^{-1}x)\right| &= \sum_{y\in G} \frac{w(y)\left|f(y)\right|w(y^{-1}x)\left|g(y^{-1}x)\right|}{w(y)w(y^{-1}x)} \\
&\leq \gamma_x^{-1} \sum_{y\in G} w(y)\left|f(y)\right|w(y^{-1}x)\left|g(y^{-1}x)\right| \\
&\leq \gamma_x^{-1} \left(\sum_{y\in G} w(y)^2\left|f(y)\right|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{y\in G} w(y^{-1}x)^2\left|g(y^{-1}x)\right|^2\right)^{1/2} \\
&= \gamma_x^{-1}\|f\|_w\|g\|_w.
\end{aligned}$$

  Ainsi l'inégalité (4.1) est vérifiée et, par voie de conséquence, la série $\sum_{y\in G} \left|f(y)g(y^{-1}x)\right|$ converge.

- Implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Nous procéderons par contraposition et supposerons que $\inf_{y\in G} w(y)w(y^{-1}x) = 0$. C'est donc dire qu'il existe une suite $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de G tels que

$$w(y_n)w(y_n^{-1}x) \;<\; \frac{1}{n^2}. \tag{4.2}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer sans perte de généralité que les y_n et les $y_n^{-1}x$ sont tous distincts. Ce faisant on peut définir une fonction $f : G \to [0, \infty)$ comme suit :

$$f(y) := \begin{cases} \frac{1}{nw(y_n)}, & \text{si } y = y_n, \\ \frac{1}{nw(y_n^{-1}x)}, & \text{si } y = y_n^{-1}x, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que

$$\|f\|_w^2 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} w(y_n)^2 \cdot \frac{1}{n^2 w(y_n)^2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} w(y_n^{-1}x)^2 \cdot \frac{1}{n^2 w(y_n^{-1}x)^2} \;=\; 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;<\; \infty.$$

Il s'ensuit que $f \in \ell_2(G, w)$. Remarquons cependant qu'en vertu de (4.2) on a

$$f(y_n)f(y_n^{-1}x) \;=\; \frac{1}{nw(y_n)} \cdot \frac{1}{nw(y_n^{-1}x)} \;\geq\; 1$$

et ce, quel que soit l'entier $n \geq 1$. Il en découle que la série $\sum_{y \in G} f(y)f(y^{-1}x)$ ne peut certainement pas converger. □

Le théorème qui suit stipule que la stabilité par rapport au produit de convolution n'est pas seulement une condition devant nécessairement être vérifiée par $\ell_2(G, w)$ pour que cet espace soit (isomorphe à) une algèbre par rapport au produit de convolution ; c'est également une condition suffisante.

Théorème 4.2. *Soit (G, w) un groupe abélien discret pondéré. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) L'espace $\ell_2(G, w)$ est $*$-stable ;

(ii) La norme $\|\cdot\|_w$ est faiblement sous-multiplicative par rapport au produit de convolution, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\big\|f * g\big\|_w \;\leq\; C\|f\|_w\|g\|_w, \qquad \big(f, g \in \ell_2(G, w)\big) ;$$

(iii) L'espace $\ell_2(G, w)$ muni du produit de convolution est isomorphe à une algèbre de Banach.

Démonstration.

- Implication (i) ⇒ (ii). Étant donné $f \in \ell_2(G, w)$, définissons $M_f : \ell_2(G, w) \to \ell_2(G, w)$ par $M_f(g) := f * g$. Comme l'espace $\ell_2(G, w)$ est $*$-stable par hypothèse, cette application de multiplication par f est bien définie et elle est de toute évidence linéaire.

  Nous montrerons, à l'aide du théorème du graphe fermé, que l'application M_f est continue. Pour ce faire, considérons une suite $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions appartenant à $\ell_2(G, w)$ satisfaisant $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}$ ainsi que $M_f(g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} h$ dans $\ell_2(G, w)$ et montrons que $h \equiv 0$. Par le lemme 4.1, il existe, pour tout $x \in G$, une constante $\gamma_x > 0$ pour laquelle

$$\Big|(f * g_n)(x)\Big| \;\leq\; \gamma_x^{-1}\|f\|_w\|g_n\|_w, \qquad (n \geq 1).$$

Il s'ensuit que

$$\big(f * g_n\big)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad (x \in G).$$

Or, on a également

$$\big(f * g_n\big)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(x), \qquad (x \in G).$$

Donc $h \equiv 0$ comme voulu.

Considérons la famille d'applications linéaires suivante : $\big\{M_f \;:\; \|f\|_w \leq 1\big\}$. Pour tout $g \in \ell_2(G,w)$ on a

$$\|M_f(g)\|_w \;=\; \|f * g\|_w \;=\; \|g * f\|_w \;=\; \|M_g(f)\|_w \;\leq\; \|M_g\|\|f\|_w \;\leq\; \|M_g\|.$$

En d'autres termes, la famille $\big\{M_f \;:\; \|f\|_w \leq 1\big\}$ est simplement bornée. Par le théorème de Banach–Steinhaus, il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\|M_f\| \leq C$ quel que soit $f \in \ell_2(G,w)$ satisfaisant $\|f\|_w \leq 1$. Par homogénéité, il s'ensuit que

$$\|M_f\| \;\leq\; C\|f\|_w, \qquad \big(f \in \ell_2(G,w)\big).$$

Ainsi, on a

$$\big\|f * g\big\|_w \;=\; \big\|M_f(g)\big\|_w \;\leq\; \|M_f\|\|g\|_w \;\leq\; C\|f\|_w\|g\|_w, \qquad \big(f \in \ell_2(G,w)\big).$$

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (iii). Il s'agit d'un cas particulier du théorème D.1.
- Implication (iii) $\Rightarrow$ (i). C'est clair. □

Définition 4.1. Étant donné (G,w) un groupe abélien discret pondéré, on définit l'*indice de $*$-stabilité* de $\ell_2(G,w)$ comme étant

$$C(G,w) := \sup\Big\{\big\|f * g\big\|_w : \; \|f\|_w \leq 1, \|g\|_w \leq 1\Big\}. \tag{4.3}$$

Cette terminologie est justifiée par l'équivalence, pour $\ell_2(G,w)$, entre la $*$-stabilité et la sous-multiplicativité au sens faible de la norme $\|\cdot\|_w$ établie au théorème précédant. Dans la même veine, attribuons un nom à la constante minimale (à supposer qu'il en existe une) pour laquelle (1.7) est vérifiée.

Définition 4.2. Étant donné (G,w) un groupe abélien discret pondéré, on définit l'*indice de sous-convolutivité* de (G,w) comme étant

$$C_2(G,w) := \sup_{x\in G} \frac{\left(\dfrac{1}{w^2} * \dfrac{1}{w^2}\right)(x)}{\dfrac{1}{w^2}(x)} \;=\; \sup_{x\in G}\sum_{y\in G}\frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2}. \tag{4.4}$$

Grâce à ces deux définitions, nous sommes en mesure revisiter le théorème 1.9 et de reformuler le problème principal en faisant preuve de plus de concision :

Théorème 4.3. *Étant donné (G, w) un groupe abélien discret pondéré, on a $C(G, w) \leq C_2(G, w)$.*

Problème principal. *Étant donné (G, w) un groupe abélien discret pondéré, est-il possible que $C(G, w) < \infty$ mais que $C_2(G, w) = \infty$?*

4.2 Un premier critère de $*$-stabilité pour $\ell_2(G, w)$: la sous-multiplicativité

Rappelons que le théorème 1.7 stipule qu'une condition fort simple – la sous-multiplicativité au sens faible de la pondération – entraîne la $*$-stabilité de l'espace $\ell_1(G, w)$. En reproduisant à l'identique la preuve de ce théorème, on déduit que la sous-multiplicativité au sens faible est une condition que doit impérativement satisfaire w afin que l'espace $\ell_2(G, w)$ soit $*$-stable.

Théorème 4.4. *Étant donné (G, w) un groupe discret pondéré, l'espace $\ell_2(G, w)$ est $*$-stable seulement si la pondération w est faiblement sous-multiplicative.*

Démonstration. Quels que soient $x, y \in G$, on vérifie que $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ et il s'ensuit que

$$w(xy) \;=\; \|\delta_{xy}\|_w \;=\; \left\|\delta_x * \delta_y\right\|_w \;\leq\; C(G, w)\|\delta_x\|_w\|\delta_y\|_w \;=\; C(G, w)w(x)w(y).$$

Ainsi

$$\sup_{x,y\in G} \frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \;\leq\; C(G, w).$$

□

De très nombreux exemples font foi de ce que la sous-multiplicativité est en soi insuffisante pour assurer la $*$-stabilité de $\ell_2(G, w)$. Nous y reviendrons lorsque nous aurons abordé d'autres critères permettant d'exclure la possibilité qu'un groupe pondéré engendre un espace $\ell_2(G, w)$ qui soit $*$-stable.

4.3 Un second critère de $*$-stabilité pour $\ell_2(G, w)$

Le théorème suivant montre que la $*$-stabilité de $\ell_2(G, w)$ est conditionnelle à ce que w satisfasse une condition dont la forme n'est pas sans rappeler la sous-convolutivité au sens faible :

Théorème 4.5. *Pour tout groupe abélien discret pondéré (G, w), on a*

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;\leq\; C(G, w)^2.$$

Démonstration. En vertu du théorème D.1, on sait que l'espace $\ell_2(G, w)$ muni de la norme

$$\|f\|_m := \sup_{\substack{g\in\ell_2(G,w)\\ g\not\equiv 0}} \left\|f * g\right\|_w$$

est isomorphe à une algèbre de Banach complexe commutative et unifère. Le théorème E.4 implique donc l'existence d'un caractère $\chi : \ell_2(G,w) \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire d'une fonctionnelle linéaire $\|\cdot\|_m$-continue sur $\ell_2(G,w)$ qui est multiplicative et de norme 1. Ainsi, quel que soit $f \in \ell_2(G,w)$, on a

$$\left|\chi(f)\right| \;\leq\; \|f\|_m \;=\; \sup_{\substack{g\in\ell_2(G,w)\\ g\neq 0}} \frac{\left\|f*g\right\|_w}{\|g\|_w} \;\leq\; \sup_{\substack{g\in\ell_2(G,w)\\ g\neq 0}} \frac{C(G,w)\|f\|_w\|g\|_w}{\|g\|_w} \;=\; C(G,w)\|f\|_w.$$

C'est donc dire que χ est également $\|\cdot\|_w$-continue et que sa norme, comme application sur l'espace $\ell_2(G,w)$ muni de la norme $\|\cdot\|_w$, est au plus $C(G,w)$.

Mais, $\ell_2(G,w)$ étant un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Fréchet–Riesz G.2 implique qu'il existe $h \in \ell_2(G,w)$ tel que pour tout $f, g \in \ell_2(G,w)$ on ait

$$\chi(f) \;=\; \langle f,h\rangle_w \;=\; \sum_{x\in G} w(x)^2 f(x)\overline{h(x)}, \tag{4.5}$$

et $\|\chi\| = \|h\|_w$. Afin d'identifier h, posons $f := \delta_x$ dans l'équation 4.5. On trouve

$$h(x) \;=\; \frac{\overline{\chi(\delta_x)}}{w(x)^2}, \qquad (x \in G).$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{x\in G} \frac{\left|\chi(\delta_x)\right|^2}{w(x)^2} \;=\; \sum_{x\in G} w(x)^2\left|h(x)\right|^2 \;=\; \|h\|_w^2 \;=\; C(G,w)^2.$$

Comme

$$1 \;=\; \chi(\delta_e) \;=\; \chi(\delta_{xx^{-1}}) \;=\; \chi(\delta_x * \delta_{x^{-1}}) \;=\; \chi(\delta_x)\chi(\delta_{x^{-1}}),$$

l'inégalité de Cauchy–Schwarz nous donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;&=\; \sum_{x\in G} \frac{\chi(\delta_x)\chi(\delta_{x^{-1}})}{w(x)w(x^{-1})} \\
&\leq\; \left(\sum_{x\in G} \frac{\left|\chi(\delta_x)\right|^2}{w(x)^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{x\in G} \frac{\left|\chi(\delta_{x^{-1}})\right|^2}{w(x^{-1})^2}\right)^{1/2} \\
&=\; \|h\|_w^2 \\
&=\; C(G,w)^2,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Ce résultat fournit une preuve alternative du fait que, quel que soit le groupe abélien discret, l'espace $\ell_2(G)$ n'est pas $*$-stable pour les groupes non compacts. De plus, il nous permet de générer facilement des exemples (comme l'exemple 4.1 ci-dessous) de groupes pondérés satisfaisant la condition de sous-multiplicativité au sens faible du théorème 4.4 mais qui ne sont pas $*$-stables, montrant du coup que cette condition ne caractérise pas la $*$-stabilité des espaces $\ell_2(G,w)$.

Exemple 4.1. Considérons le groupe additif $\mathbb{Z}$ muni de la pondération $w : \mathbb{Z} \to (0, \infty)$ définie par $w(n) := r^n$, où r est un nombre réel strictement positif quelconque. Notons que

$$\sup_{n,k\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+k)}{w(n)w(k)} \;=\; \sup_{n,k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{n+k}}{r^n \cdot r^k} \;=\; 1.$$

Pourtant, l'espace $\ell_2(\mathbb{Z}, w)$ n'est pas $*$-stable car

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{w(n)w(-n)} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{r^n \cdot r^{-n}} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1$$

et cette dernière série diverge de façon manifeste.

Il est légitime de se demander si la condition énoncée au théorème 4.5 suffit à assurer la $*$-stabilité de $\ell_2(G, w)$. Autrement dit, cette condition nécessaire est-elle également suffisante ? Il s'avère que ce n'est pas le cas le révèlent les deux exemples suivants :

Exemple 4.2. Considérons le groupe additif $\mathbb{Z}$ de même que la pondération suivante :

$$w(n) := \begin{cases} 2^{|n|}, & \text{si } n \text{ est pair ou nul,} \\ |n|, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'une part,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{w(n)w(-n)} \;=\; 1 \;+\; 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \;+\; 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{2j})^2} \;<\; \infty.$$

D'autre part, étant donné $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{w(2n+2)}{w(1)w(2n+1)} \;=\; \frac{2^{2n+2}}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Ainsi, il découle du théorème 4.4 que $\ell_2(\mathbb{Z}, w)$ n'est pas $*$-stable.

Exemple 4.3. Considérons le groupe additif $\mathbb{Q}$ et la pondération $w : \mathbb{Q} \to (0, \infty)$ définie comme suit :

$$w\left(\frac{a}{b}\right) := \begin{cases} |ab|, & \text{si } a \neq 0, \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$ et $b > 0$. D'une part, on a

$$\sum_{x\in\mathbb{Q}} \frac{1}{w(x)w(-x)} \;\leq\; 1 + \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z} \\ a\neq 0}} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 b^2} \;=\; 1 + \left(2\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}\right) \cdot \left(\sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b^2}\right) \;<\; \infty.$$

D'autre part, étant donné un nombre premier $p > 2$, on pose $x := \frac{p+2}{2p}$ et $y := \frac{1}{p}$. On vérifie que $x - y = \frac{1}{2}$ et il s'ensuit que

$$\frac{w(x)}{w(y)w(x-y)} \;=\; \frac{w\left(\frac{p+2}{2p}\right)}{w\left(\frac{1}{p}\right) w\left(\frac{1}{2}\right)} \;=\; (p+2) \xrightarrow[p\to\infty]{} \infty.$$

Ainsi, il découle du théorème 4.4 que $\ell_2(\mathbb{Q}, w)$ n'est pas $*$-stable.

Une autre conséquence du théorème qui est digne de mention concerne la cardinalité des groupes sous-jacents à une algèbre de convolution $\ell_2(G, w)$. Le résultat en question est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général qui est dû à Kuznetsova [27]. Avant d'énoncer et de démontrer ce résultat, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme 4.6. *Quel que soit l'entier $m > 1$ on a*

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^2(m-n)^2} \ \leq \ \frac{4\pi^2}{3m^2}.$$

Démonstration. Remarquons que pour $n \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$ on a $m \leq 2n$, tandis que pour $n < \lceil \frac{m}{2} \rceil$ on a plutôt $m \leq 2(m-n)$. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{m^2}{n^2(m-n)^2} \ \leq \ \sum_{n=1}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} \frac{4}{n^2} + \sum_{n=\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{m} \frac{4}{(m-n)^2} \ \leq \ 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ = \ \frac{4\pi^2}{3}. \qquad \square$$

Théorème 4.7. *Soit G un groupe abélien discret. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) G est au plus dénombrable ;

(ii) Il existe une pondération w pour laquelle $\ell_2(G, w)$ est $*$-stable.

Démonstration.

- Implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $g_1, g_2, ...$ une énumération des éléments de G. Définissons une fonction $u_1 : G \to (0, \infty)$ par $u_1(g_n) := \frac{1}{2^n}$. On vérifie sans difficulté que $u_1 \in \ell_1(G)$ et que $\|u_1\|_1 = 1$.

  Définissons inductivement des fonctions u_n comme suit :

  $$u_{n+1} := \ u_1 * u_n.$$

  Il découle du théorème 1.1 que

  $$\|u_n\|_1 \ \leq \ 1, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

  Posons ensuite

  $$w := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2} \right)^{-1/2}.$$

Observons que, pour tout $x \in G$ fixé,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}\right) * \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k^2}\right)(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(u_n * u_k\big)(x)}{n^2 k^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_{n+k}(x)}{n^2 k^2} \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u_m(x)}{n^2 (m-n)^2} \\
&\overset{4.6}{\leq} \frac{4\pi^2}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m(x)}{m^2} \\
&= \frac{4\pi^2}{3} \frac{1}{w^2}(x).
\end{aligned}$$

Ayant montré que

$$\left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x) \leq \frac{4\pi^2}{3} \frac{1}{w^2}(x), \qquad (x \in G),$$

on conclut du théorème 1.9 que $\ell_2(G, w)$ est $*$-stable car $C_2(G, w) \leq \frac{4\pi^2}{3}$.

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Procédons par contraposition. Soit G un groupe abélien discret indénombrable. Quelle que soit la pondération $w : G \to (0, \infty)$, le corollaire A.2 implique que la série $\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})}$ diverge. Il découle donc du théorème 4.5 que l'indice de $*$-stabilité de (G, w) est infini. □

Dans toute cette section nous avons supposé que G était un groupe abélien. Cette exigence ne relève pas d'un excès de frilosité puisque le théorème 3.1 dont nous avons brièvement discuté au chapitre précédent, qui stipule que tout groupe libre d'ordre infini (quelle que soit sa cardinalité) admet une pondération lui conférant une structure d'algèbre par rapport au produit de convolution, montre hors de tout doute que le théorème 4.5 est faux en général si on omet la condition « G est abélien ». Cela illustre le fait que des divergences fondamentales se manifestent selon que le groupe G soit commutatif ou non. De plus, cela justifie l'intérêt que nous avons accordé dans cette thèse à la question quant à savoir si la sous-convolutivité au sens faible est une condition nécessaire à la $*$-stabilité de $\ell_2(G, w)$ lorsqu'on restreint le périmètre de notre étude aux seuls groupes discrets qui sont abéliens.

Pour clore notre discussion au sujet du théorème 4.5, revenons brièvement sur la construction de Fricke qui a été présentée en détail au chapitre 3. Le théorème 4.5 montre qu'il serait mal avisé de simplement étendre la pondération de Fricke sur le groupe $\mathbb{Z}$ tout entier en définissant w sur les entiers négatifs comme étant l'image miroir de $w \restriction \mathbb{N}$ comme à la figure qui suivante :

FIGURE 4.1 – Esquisse d'une pondération paire sur $\mathbb{Z}$ coïncidant avec la pondération de Fricke sur $\mathbb{N}$

En effet, pour toute pondération définie de la sorte, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{w(n)w(-n)}$ ne pourrait faire autrement que diverger.

4.4 Pondérations polynômiales au sens entendu par Pytlik

Il découle respectivement des théorèmes 1.9 et 4.5 que l'espace $\ell_2(G,w)$ vérifie l'expression $\ell_2(G,w) * \ell_2(G,w) \subseteq \ell_2(G,w)$:

— si $\sup_{x\in G} \dfrac{\left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x)}{\frac{1}{w^2}(x)} = \sup_{x\in G} \left(\sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2}\right)$ est fini ;

— seulement si $\left(\frac{1}{w} * \frac{1}{w}\right)(e) = \sum_{y\in G} \frac{1}{w(y)w(y^{-1}e)}$ converge.

Dans cette section, nous tenterons de déterminer ou, à tous le moins, de mieux apprécier la distance qui sépare ces deux conditions. Nous verrons que, si w satisfait certaines hypothèses de régularité, ces deux conditions coïncident. L'une de ces hypothèses a été étudiée par Tadeusz Pytlik [33; 34] et le terme par lequel il l'a désigné est entré dans l'usage :

Définition 4.3. Étant donné $M > 0$, une pondération $w : G \to (0,\infty)$ est dite *M-polynômiale au sens entendu par Pytlik* ou, pour faire plus court, *M-Pytlik*, si

$$w(xy) \ \leq \ M\Big(w(x) + w(y)\Big), \qquad (x, y \in G).$$

Théorème 4.8. *Soit (G,w) un groupe abélien discret pondéré. S'il existe une constante $M > 0$ telle que w est M-Pytlik et satisfait à la condition suivante pour tout $x \in G$*

$$w(x^{-1}) \ \leq \ Mw(x), \tag{4.6}$$

alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $C_2(G,w) < \infty$ *;*

(ii) $C(G,w) < \infty$ *;*

(iii) $\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)w(x^{-1})} < \infty$ *;*

(iv) $\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)^2} < \infty$.

Démonstration.

- IMPLICATION (i) $\Rightarrow$ (ii). Il s'agit d'un cas particulier du théorème 1.9.
- IMPLICATION (ii) $\Rightarrow$ (iii). Nous l'avons montré au théorème 4.5.
- IMPLICATION (iii) $\Rightarrow$ (iv). La condition (4.6) implique que $\frac{1}{w(x)} \leq \frac{M}{w(x^{-1})}$, d'où on tire

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)^2} \ \leq \ \sum_{x\in G} \frac{M}{w(x)w(x^{-1})} \ < \ \infty.$$

- IMPLICATION (iv) $\Rightarrow$ (i). Quels que soient $x, y \in G$, on a ou bien $w(y) \geq w(y^{-1}x)$ auquel cas l'hypothèse voulant que la pondération soit M-Pytlik implique que

$$w(x) \ = \ w(yy^{-1}x) \ \leq \ M\Big(w(y) + w(y^{-1}x)\Big) \ \leq \ 2Mw(y),$$

ou encore $w(y) < w(y^{-1}x)$ auquel cas l'hypothèse voulant que la pondération soit M-Pytlik implique plutôt que

$$w(x) \ = \ w(yy^{-1}x) \ \leq \ M\Big(w(y) + w(y^{-1}x)\Big) \ \leq \ 2Mw(y^{-1}x).$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2} \ \leq \ \sum_{\substack{y\in G \\ w(y)\geq w(y^{-1}x)}} \frac{4M^2}{w(y^{-1}x)^2} + \sum_{\substack{y\in G \\ w(y)< w(y^{-1}x)}} \frac{4M^2}{w(y)^2} \ \leq \ \sum_{y\in G} \frac{8M^2}{w(y)^2} \ < \ \infty.$$

$\square$

Le corollaire suivant énonce un résultat classique qui est un cas spécifique du théorème 4.8.

Corollaire 4.9. *Considérons le groupe* $\mathbb{Z}$ *muni de la pondération* $w(n) := \big(1 + |n|\big)^{\alpha}$. *Alors* $\ell_2(\mathbb{Z}, w)$ *est* $*$*-stable si et seulement si* $\alpha > \frac{1}{2}$.

Démonstration. Notons que la fonction w est polynômiale au sens de Pytlik. En effet

- Si $\alpha \leq 1$ alors, quels que soient $n, k \in \mathbb{Z}$, on a

$$w(n{+}k) \ = \ \big(1{+}|n{+}k|\big)^{\alpha} \ \overset{C.2}{\leq} \ 1{+}|n{+}k|^{\alpha} \ \leq \ 1{+}\big(|n|{+}|k|\big)^{\alpha} \ \overset{C.2}{\leq} \ 1{+}|n|^{\alpha}{+}|k|^{\alpha} \ \leq \ w(n){+}w(k).$$

- Si $\alpha > 1$, la convexité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ implique que
$$\left(\frac{1+|n+k|}{2}\right)^\alpha \;\leq\; \frac{1^\alpha + |n+k|^\alpha}{2}.$$
Ainsi
$$\big(1+|n+k|\big)^\alpha \;\leq\; 2^{\alpha-1}\big(1+|n+k|^\alpha\big). \tag{4.7}$$
Par un argument similaire on trouve que
$$|n+k|^\alpha \;\leq\; 2^{\alpha-1}\big(|n|^\alpha + |k|^\alpha\big). \tag{4.8}$$
Ainsi, il découle des équations 4.7 et 4.8 que, quels que soient $n, k \in \mathbb{Z}$, on a
$$w(n+k) \;=\; \big(1+|n+k|\big)^\alpha \;\leq\; 2^{\alpha-1} + 4^{\alpha-1}\big(|n|^\alpha + |k|^\alpha\big) \;\leq\; 4^{\alpha-1}\big(w(n)+w(k)\big).$$

Ainsi, par théorème 4.8, l'espace $\ell_2(\mathbb{Z}, w)$ est $*$-stable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\big(1+|n|\big)^{2\alpha}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. □

Comme nous l'avons vu à l'exemple 4.2, les implications (iv) ⇒ (i) et (iv) ⇒ (ii) sont fausses en général s'il n'existe aucune constante $M > 0$ pour laquelle la pondération est M-Pytlik. L'implication (iii) ⇒ (iv), quant à elle, ne tient plus si on omet la condition (4.6) comme en témoigne l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.4. Considérons le groupe $\mathbb{Z}$ muni de la pondération définie par
$$w(n) := \begin{cases} \big(|n|+1\big)^{1/2}, & \text{si } n \geq 0, \\ \big(|n|+1\big), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$
D'une part
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{w(n)w(-n)} \;=\; 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big(|n|+1\big)^{3/2}} \;<\; \infty$$
et d'autre part
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{w(n)^2} \;\geq\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big(|n|+1\big)} \;=\; \infty.$$

4.5 La clé de voûte : la transgression de la condition de Pytlik

On peut déduire du théorème 4.8 que toute pondération donnant lieu à un indice de $*$-stabilité fini et à un indice de sous-convolutivité infini – à supposer qu'une telle chose existe – devra impérativement déroger à la condition de Pytlik et/ou à la condition 4.6.

Le prochain théorème – démontré par Kuznetsova [26] – précise qu'on peut, en fait, concentrer notre recherche d'une pondération sur G satisfaisant $C(G, w) < \infty$ et $C_2(G, w) = \infty$ aux pondérations vérifiant $\frac{1}{w^2} \in \ell_1(G)$.

Théorème 4.10. *Soit (G,w) est un groupe abélien discret pondéré. Si $\ell_2(G,w)$ est $*$-stable alors il existe une pondération $\widetilde{w} : G \to (0,\infty)$ satisfaisant $\dfrac{1}{\widetilde{w}^2} \in \ell_1(G)$ pour laquelle :*

(i) $\ell_2(G,\widetilde{w})$ *est isométriquement isomorphe à* $\ell_2(G,w)$ *;*

(ii) $C(G,\widetilde{w}) = C(G,w)$ *;*

(iii) $C_2(G,\widetilde{w}) = C_2(G,w)$.

Démonstration. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 4.5, l'espace $\ell_2(G,w)$ est isomorphe à une algèbre de Banach commutative et unifère et, conséquemment, il existe un caractère χ sur $\ell_2(G,w)$ qui est assimilable à une fonction $h \in \ell_2(G,w)$ satisfaisant $\|h\|_w \leq C(G,w)$. Posons

$$\widetilde{w}(x) := \frac{w(x)}{\big|\chi(\delta_x)\big|}.$$

- Montrons que les espaces $\ell_2(G,w)$ et $\ell_2(G,\widetilde{w})$ sont isométriquement isomorphes. Considérons l'homomorphisme $\Psi : \ell_2(G,w) \to \ell_2(G,\widetilde{w})$ défini par $f(x) \mapsto f(x)\big|\chi(\delta_x)\big|$. On a :

$$\begin{aligned}
\big\|\Psi(f)\big\|_{\widetilde{w}}^2 &= \sum_{x\in G} \widetilde{w}(x)^2\big|f(x)\big|^2\big|\chi(\delta_x)\big|^2 \\
&= \sum_{x\in G} \frac{w(x)^2}{\big|\chi(\delta_x)\big|^2}\big|f(x)\big|^2\big|\chi(\delta_x)\big|^2 \\
&= \sum_{x\in G} w(x)^2\big|f(x)\big|^2 \\
&= \|f\|_w^2.
\end{aligned}$$

Ainsi l'homomorphisme Ψ est une isométrie. Il reste à montrer que Ψ est surjectif. Étant donné $g \in \ell_2(G,\widetilde{w})$, on considère $k(x) := \frac{g(x)}{\left|\chi(\delta_x)\right|}$. On a

$$\|k\|_w^2 \;=\; \sum_{x\in G} w(x)^2 \left|\frac{g(x)}{\chi(\delta_x)}\right|^2 \;=\; \sum_{x\in G} \widetilde{w}(x)^2\big|g(x)\big|^2 \;=\; \|g\|_{\widetilde{w}}^2 \;<\; \infty.$$

Ainsi $k \in \ell_2(G,w)$. Or $g = \Psi(k)$.

- Concordance des indices de sous-convolution. Pour tout $x \in G$ on a

$$\sum_{y\in G} \frac{\widetilde{w}(x)^2}{\widetilde{w}(y)^2\widetilde{w}(y^{-1}x)^2} \;=\; \sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2} \cdot \frac{\big|\chi(\delta_y)\big|^2 \cdot \big|\chi(\delta_{y^{-1}x})\big|^2}{\big|\chi(\delta_x)\big|^2} \;=\; \sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2}.$$

Ainsi

$$C_2(G,\widetilde{w})^2 \;=\; \sup_{x\in G}\sum_{y\in G} \frac{\widetilde{w}(x)^2}{\widetilde{w}(y)^2\widetilde{w}(y^{-1}x)^2} \;=\; \sup_{x\in G}\sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2} \;=\; C_2(G,w)^2.$$

- Concordance des indices de $*$-stabilité. D'une part, étant donné $f, g \in \ell_2(G, \widetilde{w})$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz nous donne, pour $x \in G$ fixé, que

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{y\in G} \frac{\left|f(y)\right|}{\left|\chi(\delta_y)\right|} \cdot \frac{\left|g(y^{-1}x)\right|}{\left|\chi(\delta_{y^{-1}x})\right|}\right)^2 \\
= & \left(\sum_{y\in G} \frac{1}{w(y)w(y^{-1}x)} \cdot \frac{w(y)}{\left|\chi(\delta_y)\right|} \cdot \left|f(y)\right| \cdot \frac{w(y^{-1}x)}{\left|\chi(\delta_{y^{-1}x})\right|} \cdot \left|g(y^{-1}x)\right|\right)^2 \\
= & \left(\sum_{y\in G} \frac{1}{w(y)w(y^{-1}x)} \cdot \widetilde{w}(y)\left|f(y)\right|\widetilde{w}(y^{-1}x)\left|g(y^{-1}x)\right|\right)^2 \\
\leq & \left(\sum_{y\in G} \frac{1}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2}\right) \cdot \left(\sum_{y\in G} \widetilde{w}(y)^2\left|f(y)\right|^2\widetilde{w}(y^{-1}x)^2\left|g(y^{-1}x)\right|^2\right) \\
\leq & \frac{C_2(G,w)^2}{w(x)^2}\left(\sum_{y\in G} \widetilde{w}(y)^2\left|f(y)\right|^2\widetilde{w}(y^{-1}x)^2\left|g(y^{-1}x)\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|f * g\right\|_{\widetilde{w}}^2 &= \sum_{x\in G} \widetilde{w}(x)^2 \left|\sum_{y\in G} f(y)g(y^{-1}x)\right|^2 \\
&= \sum_{x\in G} \frac{w(x)^2}{\left|\chi(\delta_x)\right|^2} \left|\sum_{y\in G} f(y)g(y^{-1}x)\right|^2 \\
&\leq \sum_{x\in G} w(x)^2 \left(\sum_{y\in G} \frac{\left|f(y)\right| \cdot \left|g(y^{-1}x)\right|}{\left|\chi(\delta_x)\right|}\right)^2 \\
&= \sum_{x\in G} w(x)^2 \left(\sum_{y\in G} \frac{\left|f(y)\right|}{\left|\chi(\delta_y)\right|} \cdot \frac{\left|g(y^{-1}x)\right|}{\left|\chi(\delta_{y^{-1}x})\right|}\right)^2 \\
&\leq \sum_{x\in G} C_2(G,w)^2 \left(\sum_{y\in G} \widetilde{w}(y)^2\left|f(y)\right|^2\widetilde{w}(y^{-1}x)^2\left|g(y^{-1}x)\right|^2\right) \\
&= C_2(G,w)^2 \sum_{y\in G} \widetilde{w}(y)^2\left|f(y)\right|^2 \cdot \left(\sum_{x\in G} \widetilde{w}(y^{-1}x)^2\left|g(y^{-1}x)\right|^2\right) \\
&\leq C_2(G,w)^2 \|f\|_{\widetilde{w}}^2 \|g\|_{\widetilde{w}}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $C(G, \widetilde{w}) \leq C(G, w)$. Un argument similaire permet de montrer l'inégalité inverse.

- Montrons que $1/\widetilde{w}^2$ appartient à $\ell_1(G)$. Pour tout $x \in G$ fixé, il découle de la formule (4.5) que $\left|\chi(\delta_x)\right| = w(x)^2\left|h(x)\right|$. Ainsi

$$\sum_{x\in G} \frac{1}{\widetilde{w}(x)^2} = \sum_{x\in G} \frac{\left|\chi(\delta_x)\right|^2}{w(x)^2} = \sum_{x\in G} w(x)^2\left|h(x)\right|^2 = \|h\|_w^2 = C(G,w)^2 < \infty. \qquad \square$$

Comme en témoigne un autre théorème de Kuznetsova [26], le choix de se restreindre aux pondérations $\frac{1}{w^2} \in \ell_1(G)$ se révèle avantageux :

Théorème 4.11. *Soit G un groupe abélien discret dénombrable. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\dfrac{1}{w^2} \in \ell_1(G)$ *;*

(ii) $\ell_2(G,w) \subseteq \ell_1(G)$ *et cette inclusion est continue.*

Démonstration.

- Implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Étant donné $f \in \ell_2(G,w)$, il résulte de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que

$$\|f\|_1^2 \;=\; \left(\sum_{x\in G} \big|f(x)\big|\right)^2 \;\leq\; \left(\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)^2}\right)\left(\sum_{x\in G} w(x)^2\big|f(x)\big|^2\right) \;=\; \left(\sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)^2}\right)\|f\|_w^2 \;<\; \infty.$$

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $g_1, g_2, \ldots$ une énumération des éléments de G. Par hypothèse, il existe $M>0$ tel que pour tout $f \in \ell_2(G,w)$ on a :

$$\|f\|_1 \;\leq\; M\|f\|_w.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w(x_i)^2} \;&=\; \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w(x_i)^2}\delta_{x_i}\right\|_1 \\
&\leq\; M\left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w(x_i)^2}\delta_{x_i}\right\|_w \\
&=\; M\left(\sum_{i=1}^{n} w(x_i)^2\left|\frac{1}{w(x_i)^2}\right|^2\right)^{1/2} \\
&=\; M\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w(x_i)^2}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Ainsi, en divisant puis en élevant au carré, on trouve que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w(x_i)^2} \;\leq\; M^2, \qquad (n>1).$$

Enfin, en laissant n tendre vers l'infini on trouve que

$$\left\|\tfrac{1}{w^2}\right\|_1 \;=\; \sum_{x\in G} \frac{1}{w(x)^2} \;\leq\; M^2.$$

□

4.6 De l'importance d'adopter de nouvelles approches

Considérons le groupe $\mathbb{Z}$ et la pondération $w(n) := r^{|n|}$, où $r > 1$. Remarquons que

— w EST SOUS-MULTIPLICATIVE.

$$\sup_{n,k\in\mathbb{Z}} \frac{w(n+k)}{w(n)w(k)} \;=\; \sup_{n,k\in\mathbb{Z}} \frac{r^{|n+k|}}{r^{|n|+|k|}} \;\leq\; 1.$$

— $\dfrac{1}{w^2}$ APPARTIENT À $\ell_1(G)$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{w(n)^2} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{r^{2|n|}} \;=\; \frac{r^2+1}{r^2-1} \;<\; \infty.$$

— w N'EST PAS FAIBLEMENT SOUS-CONVOLUTIVE. Pour tout entier $n > 0$ on a

$$C_2(\mathbb{Z},w)^2 \;\geq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(r^n)^2}{(r^k)^2(r^{n-k})^2} \;=\; \sum_{k=0}^{n} 1 \;=\; n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

— w N'EST PAS POLYNÔMIALE AU SENS DE PYTLIK. Pour tout $M > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r^n > 2M$. Ainsi

$$w(2n) \;=\; r^{2n} \;>\; 2Mr^n \;=\; M\big(r^n + r^n\big) \;=\; M\big(w(n)+w(n)\big).$$

En somme, cette pondération vérifie les conditions nécessaires 4.4 et 4.5 mais elle viole la condition suffisante 1.9. Enfin, elle ne satisfait pas à la condition du théorème 4.8 sous laquelle il y a concordance entre les indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité. C'est donc dire que la technologie présentée jusqu'ici ne permet pas de statuer sur la finitude de l'indice de $*$-stabilité du groupe pondéré $(\mathbb{Z}, w)$.

Cet exemple, d'une simplicitié désarmante, souligne le besoin criant de développer de nouvelles façons d'estimer l'indice de $*$-stabilité des groupes pondérés [1]. C'est d'ailleurs ce à quoi nous nous emploierons dans ce qui suit.

1. Notons néanmoins qu'il est possible de montrer, en adoptant une approche *ad hoc* plutôt laborieuse, que l'indice de $*$-stabilité du groupe $\mathbb{Z}$ muni la pondération $w(n) := r^{|n|}$ est infini. On peut par exemple considérer les fonctions $f_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{r^{|k|}}\delta_k$ pour $m \in \mathbb{N}$ et vérifier que $\|f_m\|_w^2 = m+1$ tandis que $\|f_m * f_m\|_w^2 = \frac{2}{3}m^3 + 2m^2 + \frac{7}{3}m + 1$.

Première partie

Une approche basée sur la théorie des espaces de Hilbert à noyau reproduisant

Chapitre 5

Espaces de Hilbert à noyau reproduisant et algèbres de convolution

5.1 Définitions

Étant donné un ensemble arbitraire X, on désigne l'ensemble des fonctions complexes sur X par $\mathcal{F}(X)$. Cet ensemble est, de toute évidence, un espace vectoriel par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un scalaire définies ponctuellement :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\\ (\lambda f)(x) &:= \lambda \cdot f(x).\end{aligned}$$

Définition 5.1. On appelle *espace de Hilbert à noyau reproduisant* tout sous-espace vectoriel $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(X)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\mathcal{H}$ est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\, , \,\cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ lui conférant une structure d'espace de Hilbert ;

(ii) Quel que soit $x \in X$, la fonctionnelle linéaire d'évaluation $\mathrm{ev}_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$ est continue.

D'après le théorème de représentation de Fréchet–Riesz G.2, à la fonctionnelle linéaire continue ev_x est associé un unique élément $k_x \in \mathcal{H}$ jouissant de la propriété suivante :

$$f(x) \;=\; \mathrm{ev}_x(f) \;=\; \langle f, k_x \rangle, \qquad (f \in \mathcal{H}).$$

Il importe de ne pas perdre de vue que $\mathcal{H}$ est un espace de fonctions. C'est donc dire que l'élément k_x est une fonction complexe définie sur X.

Définition 5.2. On nomme *noyau reproduisant pour l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ la fonction $\mathcal{K} : X \times X \to \mathbb{C}$ définie comme suit :

$$\mathcal{K}(x,y) := k_y(x).$$

Remarque.

(i) Notons que l'unicité de l'élément $k_x \in \mathcal{H}$ associé à la fonctionnelle linéaire d'évaluation ev_x, qui est assurée par le théorème de représentation de Fréchet–Riesz, implique que le noyau reproduisant pour l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est entièrement déterminé par $\mathcal{H}$.

(ii) Quels que soient $x, y \in X$, on a

$$\mathcal{K}(x, y) \;=\; k_y(x) \;=\; \mathrm{ev}_x(k_y) \;=\; \langle k_y, k_x \rangle.$$

Il en découle que le noyau reproduisant pour l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est conjugué-symétrique. En effet

$$\mathcal{K}(x, y) \;=\; \langle k_y, k_x \rangle \;=\; \overline{\langle k_x, k_y \rangle} \;=\; \overline{\mathcal{K}(y, x)}, \qquad (x, y \in X).$$

5.2 Résultats préalables

Avant d'aborder directement le sujet principal du présent chapitre, commençons par développer les rudiments de la théorie des espaces de Hilbert à noyau reproduisant afin de pouvoir énoncer et démontrer les résultats qui interviendront plus tard.

Définition 5.3. Une matrice auto-adjointe M de dimension $n \times n$ est dite *semi-définie positive* si, pour toute matrice colonne x à n éléments, on a

$$x^{\mathrm{T}} M x \;\geq\; 0,$$

où x^{T} désigne la matrice transconjuguée de x.

Définition 5.4. Étant donné deux matrices A et B de dimension $m \times n$, le produit matriciel de Hadamard de A et B, noté $A \circ B$, est la matrice de même dimension et dont le (i, j)-ième élément est le produit du (i, j)-ième élément de A avec le (i, j)-ième élément de B.

Le résultat suivant, énoncé et démontré par Issai Schur, porte le nom de *théorème du produit de Schur.*

Lemme 5.1. *Le produit de Hadamard de deux matrices semi-définies positives de dimension $n \times n$ est une matrice semi-définie positive de même dimension.*

Démonstration. Voir le théorème VII de [47]. □

Définition 5.5. Soit X un ensemble. Une fonction $F : X \times X \to \mathbb{C}$ est dite *semi-définie positive* si, pour tout entier $n \geq 1$ et tout choix de $x_1, ..., x_n \in X$, la matrice $\big(F(x_i, x_j)\big)_{i,j}$ est semi-définie positive.

Notation. Soit X un ensemble ainsi que F et G deux fonctions complexes sur $X \times X$. Nous écrirons :

(i) $F \succcurlyeq 0$ pour signifier que la fonction F est semi-définie positive ;

(ii) $F \preccurlyeq G$ pour indiquer que la fonction $G - F$ est semi-définie positive.

Proposition 5.2. *Soit X un ensemble et soit encore F et G deux fonctions complexes sur $X \times X$. Si $F \succcurlyeq 0$ et $G \succcurlyeq 0$ alors :*

(i) $(F + G) \succcurlyeq 0$ *;*

(ii) $FG \succcurlyeq 0$.

Démonstration.

(i) Cela découle directement du fait que pour toutes matrices A et B de dimension $n \times n$ et toute matrice colonne x à n éléments on a :

$$x^{\mathrm{T}}(A + B)x \;=\; x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}Bx.$$

(ii) Étant donné un entier $n \geq 1$ et des éléments $x_1, ..., x_n \in X$, on a

$$\big(FG(x_i, x_j)\big)_{i,j} \;=\; \big(F(x_i, x_j)\big)_{i,j} \circ \big(G(x_i, x_j)\big)_{i,j}.$$

Le théorème du produit de Schur 5.1 implique alors que la matrice $\big(FG(x_i, x_j)\big)_{i,j}$ est semi-définie positive et on conclut que $FG \succcurlyeq 0$. □

Lemme 5.3. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur X de noyau $\mathcal{K}$ et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $f \in \mathcal{H}$ *et* $\|f\|_{\mathcal{H}} \leq C$ *;*

(ii) $f(x)\overline{f(y)} \preccurlyeq C^2\mathcal{K}(x, y)$.

Démonstration. Voir le théorème 3.11 de [32]. □

Définition 5.6. Étant donné $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant, on appelle *multiplicateur de $\mathcal{H}$* toute fonction $g : X \to \mathbb{C}$ satisfaisant

$$gf \in \mathcal{H}, \qquad\qquad (f \in \mathcal{H}).$$

De façon manifeste, l'ensemble de tous les multiplicateurs de $\mathcal{H}$, noté $\mathrm{Mult}(\mathcal{H})$, forme une algèbre.

Lemme 5.4. *Étant donné $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant ainsi qu'un élément $g \in Mult(\mathcal{H})$, l'application linéaire $M_g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ définie par $M_g(f) := gf$ est continue.*

Démonstration. Nous allons montrer, à l'aide du théorème du graphe fermé, que l'application M_g est continue. Pour ce faire, considérons une suite de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ satisfaisant

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ ainsi que $M_g(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} h$ pour un certain élément $h \in \mathcal{H}$. Notons que, quel que soit $x \in X$, on a

$$(gf)(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} (gf_n)(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} M_g(f_n)(x) \;=\; h(x).$$

Ainsi $gf = h$ et il s'ensuit que M_g est continue comme voulu. $\square$

Le lemme qui suit propose une caractérisation des multiplicateurs.

Lemme 5.5. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur X de noyau $\mathcal{K}$ et soit $g : X \to \mathbb{C}$ une fonction. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $g \in \mathit{Mult}(\mathcal{H})$ *et* $\|g\|_{\mathit{Mult}(\mathcal{H})} \leq C$ *;*

(ii) $\mathcal{K}(x,y)g(x)\overline{g(y)} \preccurlyeq \mathcal{K}(x,y)$.

Démonstration. Voir le théorème 5.21 de [32]. $\square$

En principe, la question quant à savoir si un espace de Hilbert à noyau reproduisant forme une algèbre est entièrement déterminée par son noyau. Mais, en pratique, identifier des conditions nécessaires et suffisantes auxquelles le noyau doit satisfaire demeure un problème redoutable. Nous détenons cependant tous les outils requis afin de démontrer le théorème suivant qui contient une condition suffisante relativement simple :

Théorème 5.6. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant et soit $\mathcal{K}$ son noyau. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathcal{K}^2 \;\preccurlyeq\; C^2\mathcal{K}. \tag{5.1}$$

Alors $\mathcal{H}$ est une algèbre et

$$\|fg\|_{\mathcal{H}} \;\leq\; C\|f\|_{\mathcal{H}}\|g\|_{\mathcal{H}}, \qquad (f, g \in \mathcal{H}).$$

Démonstration. Soien f et g des éléments de $\mathcal{H}$ satisfaisant $\|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ et $\|g\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Il découle du lemme 5.3 que

$$g(x)\overline{g(y)} \;\preccurlyeq\; \mathcal{K}(x,y). \tag{5.2}$$

Par la proposition 5.2(ii), le fait que $\mathcal{K} \succcurlyeq 0$ implique qu'on peut multiplier tous les termes de l'équation (5.2) par $\mathcal{K}$ et utilisé l'hypothèse (5.1) afin d'obtenir

$$\mathcal{K}(x,y)g(x)\overline{g(y)} \;\preccurlyeq \mathcal{K}^2(x,y) \;\preccurlyeq C^2\mathcal{K}(x,y).$$

Enfin, selon le lemme 5.5, cela implique que $g \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ et $\|g\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \leq C$. Il s'ensuit que $fg \in \mathcal{H}$ et que $\|fg\|_{\mathcal{H}} \leq C$ comme désiré. $\square$

5.3 Lien avec la sous-convolutivité au sens faible

Rappelons que pour tout groupe abélien discret G, l'espace $\ell_1(G)$ est une algèbre de Banach par rapport au produit de convolution. Or, le théorème F.1 stipule que l'espace des caractères sur $\ell_1(G)$ est isomorphe au groupe dual $\widehat{G}$. Ainsi, il découle de la discussion présentée aux annexes E et F que $\widehat{G}$ est un ensemble faiblement-$*$ compact et que la transformation de Fourier–Gel'fand $f \mapsto \widehat{f}$ est une injection de $\ell_1(G)$ dans $\mathcal{C}(\widehat{G})$, l'espace des fonctions continues sur $\widehat{G}$. L'image de $\ell_1(G)$ par cette transformation – que nous noterons $\widehat{\ell_1}(G)$ – est une algèbre isométriquement isomorphe à $\ell_1(G)$. Seulement, alors que le produit sur l'espace d'origine est la convolution, c'est la multiplication ponctuelle qui constitue le produit sur l'espace d'arrivée.

Sous l'hypothèse que $1/w^2 \in \ell_1(G)$, le théorème 4.11 implique que $\ell_2(G,w) \subseteq \ell_1(G)$. Par conséquent, on peut associer l'espace $\ell_2(G,w)$ à son image par la transformation de Fourier–Gel'fand sur $\ell_1(G)$. Cette image, que nous désignerons par $\widehat{\ell_2}(G,w)$, est un espace de fonctionnelles linéaires sur $\widehat{G}$ héritant – grâce à son association avec $\ell_2(G,w)$ – d'une structure d'espace de Hilbert. Conséquemment, l'espace $\widehat{\ell_2}(G,w)$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur $\widehat{G}$. Procédons maintenant au calcul de son noyau :

Théorème 5.7. *Soit (G,w) un groupe pondéré avec $1/w^2 \in \ell_1(G)$. Le noyau reproduisant pour l'espace de Hilbert $\widehat{\ell_2}(G,w)$ est donné par*

$$\mathcal{K}(\phi,\psi) := \sum_{x\in G} \frac{\phi(x)\overline{\psi(x)}}{w(x)^2}, \qquad (\phi,\psi \in \widehat{G}).$$

Démonstration. Posons

$$k_\psi(\phi) := \mathcal{K}(\phi,\psi), \qquad (\phi \in \widehat{G}).$$

Alors $k_\psi \in \widehat{\ell_2}(G,w)$ et, en développant cet élément par rapport à la base hilbertienne $\left\{\frac{\widehat{\delta_x}}{w(x)}\right\}_{x\in G}$ de $\widehat{\ell_2}(G,w)$, on obtient :

$$k_\psi = \sum_{x\in G} \left\langle k_\psi , \frac{\widehat{\delta_x}}{w(x)} \right\rangle_w \frac{\widehat{\delta_x}}{w(x)} = \sum_{x\in G} \langle k_\psi, \widehat{\delta_x}\rangle_w \frac{\widehat{\delta_x}}{w(x)^2}.$$

Or

$$\langle k_\psi , \widehat{\delta_x}\rangle_w = \overline{\langle \widehat{\delta_x} , k_\psi\rangle} = \overline{\widehat{\delta_x}(\psi)} = \overline{\psi(x)}.$$

Ainsi

$$\mathcal{K}(\phi,\psi) = k_\psi(\phi) = \sum_{x\in G} \langle k_\psi , \widehat{\delta_x}\rangle_w \frac{\widehat{\delta_x}}{w(x)^2} = \sum_{x\in G} \overline{\psi(x)} \frac{\phi(x)}{w(x)^2}.$$ □

Ayant identifié au théorème 5.6 une condition garantissant qu'un espace de Hilbert à noyau reproduisant générique est une algèbre, il convient maintenant d'analyser ce que nous sommes en mesure de tirer de ce théorème dans le cas particulier où l'espace de Hilbert à noyau reproduisant est $\widehat{\ell_2}(G,w)$ muni du produit ponctuel et où la pondération w satisfait $1/w^2 \in \ell_1(G)$.

Pour ce faire, nous aurons besoin d'un dernier résultat préalable, à savoir le cas particulier suivant du théorème de Bochner :

Lemme 5.8. *Étant donné $f \in \ell_1(G)$, définissons $F : \widehat{G} \times \widehat{G} \to \mathbb{C}$ par*

$$F(\phi, \psi) := \sum_{x \in G} f(x)\phi(x)\overline{\psi(x)}, \qquad (\phi, \psi \in \widehat{G}).$$

Alors $F \succcurlyeq 0$ si et seulement si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in G$.

Démonstration. Voir le théorème 2 de [43]. □

D'après le théorème 5.7, on a

$$\mathcal{K}(\phi, \psi) \;=\; \sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2}\phi(x)\overline{\psi(x)}. \tag{5.3}$$

En effectuant un calcul, on vérifie directement que

$$\mathcal{K}^2(\phi, \psi) \;=\; \sum_{x \in G} \left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x)\phi(x)\overline{\psi(x)}. \tag{5.4}$$

On tire des équations (5.3) et (5.4) la chaîne d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}^2(\phi, \psi) \;\preccurlyeq\; C^2\mathcal{K}(\phi, \psi) \\
\iff \quad & \sum_{x \in G} \left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x)\phi(x)\overline{\psi(x)} \;\preccurlyeq\; \sum_{x \in G} \frac{C^2}{w(x)^2}\phi(x)\overline{\psi(x)} \\
\overset{5.8}{\iff} \quad & \left(\frac{1}{w^2} * \frac{1}{w^2}\right)(x) \;\leq\; \frac{C^2}{w(x)^2}, && (x \in G) \\
\iff \quad & \sum_{y \in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2} \;\leq\; C^2, && (x \in G) \\
\iff \quad & C_2(G, w)^2 \;\leq\; C^2.
\end{aligned}$$

Cela signifie qu'en appliquant le théorème 5.6 à l'espace de Hilbert $\widehat{\ell_2}(G, w)$ on obtient le résultat suivant :

Corollaire 5.9. *Soit (G, w) un groupe discret pondéré où $1/w^2 \in \ell_1(G)$. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant $C_2(G, w) \leq C$. Alors $\widehat{\ell_2}(G, w)$ est stable par rapport au produit de convolution et*

$$\|f * g\|_w \;\leq\; C\|f\|_w\|g\|_w, \qquad \big(f, g \in \widehat{\ell_2}(G, w)\big).$$

Autrement dit, nous avons obtenu une preuve alternative (considérablement plus compliquée !) du théorème 1.9 dans le cas particulier où G est un groupe discret et $p = 2$.

Deuxième partie

Une approche fondée sur la théorie des opérateurs

Chapitre 6

Caractérisation de $C(G, w)$ et $C_2(G, w)$ en termes de norme d'un d'opérateur

Dans ce chapitre, différents types d'espaces vectoriels d'opérateurs sur $\ell_2(G)$ interviendront dans la discussion. Dans un souci d'alléger la notation, nous poserons $\mathcal{H} := \ell_2(G)$ et, pour des raisons de cohérence,

$$\|f\|_{\mathcal{H}} := \ \|f\|_2 \ = \left(\sum_{x \in G} \left| f(x) \right|^2 \right)^{1/2} .$$

Étant donné $x \in G$, nous avons défini en introduction la fonction $\delta_x : G \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & \text{si } y = x, \\ 0, & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

On conviendra sans difficulté que le système orthonormé de vecteurs $\{\delta_x : \ x \in G\}$ forme une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.

Toujours à des fins de concision, nous écrirons :

- $\mathcal{H}_0$ pour désigner $\mathrm{Vect}\{\delta_x : \ x \in G\}$, le sous-espace dense de $\mathcal{H}$ formé des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{\delta_x : \ x \in G\}$;
- $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ pour dénoter l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de $\mathcal{H}_0$ vers lui-même ;
- $\mathscr{B}(\mathcal{H}_0)$ pour référer au sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ composé des seules applications linéaires sur $\mathcal{H}_0$ qui sont continues par rapport à la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$.

6.1 Caractérisation de $C(G,w)$

Rappelons qu'en vertu du théorème 4.2, l'espace $\ell_2(G,w)$ est isomorphe à une algèbre de convolution si et seulement si l'indice de $*$-stabilité qui suit est fini :

$$C(G,w) := \sup\Big\{\big\|f*g\big\|_w : \|f\|_w \le 1, \|g\|_w \le 1\Big\}.$$

Dans cette section, nous verrons comment l'indice de $*$-stabilité d'un groupe pondéré peut être exprimé comme la norme d'un certain opérateur. Cette caractérisation sera exploitée ultérieurement pour en tirer des estimations concrètes de $C(G,w)$.

Définition 6.1. Étant donné $y,z \in G$, notons par $\delta_y \otimes \delta_z \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ l'opérateur défini comme suit :

$$(\delta_y \otimes \delta_z)(h) := \langle h, \delta_z\rangle_{\mathcal{H}}\delta_y \;=\; h(z)\delta_y, \qquad (h \in \mathcal{H}).$$

Il convient de souligner que $\delta_y \otimes \delta_z$ est un opérateur de rang un. Cela signifie que, par rapport à la base orthonormale $\big\{\delta_x : x \in G\big\}$, cette application linéaire peut être assimilée à une « matrice infinie » dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la (y,z)-ième qui, elle, vaut 1.

Définition 6.2. Soit $T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ l'application définie par

$$T_w(h) := \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} h(yz)\frac{w(yz)}{w(y)w(z)}(\delta_y \otimes \delta_z), \qquad (h \in \mathcal{H}_0).$$

Afin de pouvoir faire ressortir le lien qui unit l'application T_w et l'indice de $*$-stabilité, il nous faudra invoquer le lemme suivant :

Lemme 6.1. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\ell_2(G,w)$ *est $*$-stable et* $C(G,w) \le C$ *;*

(ii) $\big\|f*g\big\|_w \le C\|f\|_w\|g\|_w$ *pour tout* $f,g \in \mathcal{H}_0$.

Démonstration.

- Implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Notons d'abord que

$$\begin{aligned} & \ell_2(G,w) \text{ est } *\text{-stable et } C(G,w) \le C \\ \overset{4.2}{\iff} \quad & \big\|f*g\big\|_w \le C\|f\|_w\|g\|_w, && \big(f,g \in \ell_2(G,w)\big) \\ \Longrightarrow \quad & \big\|f*g\big\|_w \le C\|f\|_w\|g\|_w, && (f,g \in \mathcal{H}_0). \end{aligned}$$

- Implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Soient $f,g \in \ell_2(G,w)$ et soit $z_1, z_2, \ldots$ une énumération des éléments appartenant à $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$. Définissons $f_n, g_n : G \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$f_n(z_i) := \begin{cases} f(z_i), & \text{si } i \le n, \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_n(z_i) := \begin{cases} g(z_i), & \text{si } i \le n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n, g_n sont ont un support fini et satisfont

$$\|f_n\|_w \;\leq\; \|f\|_w \qquad \text{et} \qquad \|g_n\|_w \;\leq\; \|g\|_w.$$

Notons d'une part que, puisque

$$\big|(f-f_n)(y)(g-g_n)(y^{-1}x)\big|, \qquad \big|(f-f_n)(y)g_n(y^{-1}x)\big|, \qquad \text{et} \qquad \big|f_n(y)(g-g_n)(y^{-1}x)\big|$$

sont dominées, en tant que fonctions de y, par $\big|f(y)g(y^{-1}x)\big|$. Or, sous les hypothèses qui sont les nôtres, le lemme 4.1 implique que $\sum_{y\in G}\big|f(y)g(y^{-1}x)\big|$ converge quel que soit $x \in G$ fixé, car un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 4.4 permet de voir que $\gamma_x := \inf_{y\in G} w(y)w(y^{-1}x) \geq \frac{w(x)}{C} > 0$. Le théorème de convergence dominée et la continuité de la norme impliquent alors que

$$\lim_{n\to\infty}\big\|(f-f_n)*(g-g_n)\big\|_w \;=\; \lim_{n\to\infty}\big\|(f-f_n)*g_n\big\|_w \;=\; \lim_{n\to\infty}\big\|f_n*(g-g_n)\big\|_w \;=\; 0.$$

D'autre part, comme f_n et g_n sont deux fonctions de support fini, on a que

$$\big\|f_n * g_n\big\|_w \;\leq\; C\|f_n\|_w\|g_n\|_w \;\leq\; C\|f\|_w\|g\|_w$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \big\|f*g\big\|_w \\
= \quad & \big\|(f-f_n+f_n)*(g-g_n+g_n)\big\|_w \\
= \quad & \Big\|(f-f_n)*(g-g_n) \;+\; (f-f_n)*g_n + f_n*(g-g_n) + f_n*g_n\Big\|_w \\
\leq \quad & \big\|(f-f_n)*(g-g_n)\big\|_w + \big\|(f-f_n)*g_n\big\|_w + \big\|f_n*(g-g_n)\big\|_w + \big\|f_n*g_n\big\|_w \\
\leq \quad & \big\|(f-f_n)*(g-g_n)\big\|_w + \big\|(f-f_n)*g_n\big\|_w + \big\|f_n*(g-g_n)\big\|_w + C\|f_n\|_w\|g_n\|_w \\
\leq \quad & \big\|(f-f_n)*(g-g_n)\big\|_w + \big\|(f-f_n)*g_n\big\|_w + \big\|f_n*(g-g_n)\big\|_w + C\|f\|_w\|g\|_w \\
\xrightarrow[n\to\infty]{} \quad & C\|f\|_w\|g\|_w.
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du résultat annoncé. □

Théorème 6.2. *L'indice de $*$-stabilité d'un groupe abélien discret pondéré est fini si et seulement si T_w est une application linéaire continue de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathscr{B}(\mathcal{H}_0)$, auquel cas*

$$C(G,w) \;=\; \big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\|.$$

Démonstration. Commençons par observer que

$$\begin{aligned}
& T_w \text{ est une application linéaire bornée de } \mathcal{H}_0 \text{ dans } \mathscr{B}(\mathcal{H}_0) \\
& \quad \text{vérifiant } \big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\| \leq C \\
\iff \quad & \big\|T_w(h)\big\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H}_0)} \;\leq\; C\|h\|_{\mathcal{H}}, && (h \in \mathcal{H}_0) \\
\iff \quad & \big\|T_w(h)[g]\big\|_{\mathcal{H}} \;\leq\; C\|g\|_{\mathcal{H}}\|h\|_{\mathcal{H}}, && (g,h \in \mathcal{H}_0) \\
\iff \quad & \Big|\big\langle T_w(h)[g]\;,\;\overline{f}\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \;\leq\; C\|f\|_{\mathcal{H}}\|g\|_{\mathcal{H}}\|h\|_{\mathcal{H}}, && (f,g,h \in \mathcal{H}_0) \\
\iff \quad & \Big|\big\langle T_w(wh)[wg]\;,\;w\overline{f}\big\rangle_{\mathcal{H}}\Big| \;\leq\; C\|f\|_w\|g\|_w\|h\|_w, && (f,g,h \in \mathcal{H}_0),
\end{aligned}$$

où l'implication ($\Rightarrow$) de l'avant-dernière équivalence provient d'une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Étant donné $f, g, h \in \mathcal{H}_0$, on a

$$\begin{aligned} T_w(h)[g] &= \sum_{y \in G} \sum_{z \in G} h(yz) \frac{w(yz)}{w(y)w(z)} (\delta_y \otimes \delta_z)[g] \\ &= \sum_{y \in G} \sum_{z \in G} h(yz) \frac{w(yz)}{w(y)w(z)} (\delta_y \otimes \delta_z) \left[\sum_{t \in G} g(t) \delta_t \right] \\ &= \sum_{y \in G} \sum_{t \in G} g(t) h(yt) \frac{w(yt)}{w(y)w(t)} \delta_y, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left\langle T_w(h)[g]\ ,\ \overline{f} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{y \in G} \sum_{t \in G} f(y) g(t) h(yt) \frac{w(yt)}{w(y)w(t)} \\ &= \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} f(y) g(y^{-1}x) h(x) \frac{w(x)}{w(y)w(y^{-1}x)}. \end{aligned}$$

Substituons maintenant wf, wg et wh à f, g et h respectivement afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \left\langle T_w(wh)[wh], w\overline{f} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} f(y) g(y^{-1}x) h(x) w(x)^2 \\ &= \sum_{x \in G} w(x)^2 \left(\sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x) \right) h(x) \\ &= \left\langle f * g, \overline{h} \right\rangle_w. \end{aligned}$$

En assemblant le tout, on déduit que

$$\begin{aligned} & T_w \text{ est une application linéaire bornée de } \mathcal{H}_0 \text{ dans } \mathscr{B}(\mathcal{H}_0) \\ & \quad \text{vérifiant } \big\| T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0) \big\| \leq C \\ \Longleftrightarrow \quad & \left| \left\langle f * g, \overline{h} \right\rangle_w \right| \ \leq \ C \|f\|_w \|g\|_w \|h\|_w, \qquad (f, g, h \in \mathcal{H}_0) \\ \Longleftrightarrow \quad & \big\| f * g \big\|_w \ \leq \ C \|f\|_w \|g\|_w, \qquad (f, g \in \mathcal{H}_0) \\ \overset{6.1}{\Longleftrightarrow} \quad & \ell_2(G, w) \text{ est } *\text{-stable et } C(G, w) \leq C, \end{aligned}$$

où l'implication ($\Leftarrow$) de l'avant-dernière équivalence provient, encore une fois, d'une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. □

En examinant attentivement la démonstration du théorème 6.2, on remarque que – sous les mêmes hypothèses et en prenant toujours $h \in \mathcal{H}_0$ mais en laissant f, g parcourir $\mathcal{H}$ plutôt que simplement $\mathcal{H}_0$ – l'application linéaire $T_w(h)$ appartient également à $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.

Comme $\mathcal{H}_0$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{H}$, on peut ensuite appliquer le théorème B.1 pour prolonger T_w sur l'espace $\mathcal{H}$ tout entier. L'application $\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})$ ainsi obtenue est de même norme que l'application linéaire initiale $T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)$. Consignons cette observation dans une proposition afin de pouvoir y référer plus explicitement par la suite :

Proposition 6.3. *Si l'application linéaire $T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)$ est continue, alors il existe une unique application linéaire continue $\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})$ qui prolonge T_w, au sens où*

$$\widetilde{T}_w \restriction \mathcal{H}_0 \ \equiv \ T_w,$$

et

$$\big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})\big\| \ = \ \big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\|.$$

6.2 Caractérisation de $C_2(G, w)$ au moyen de la norme de Hilbert–Schmidt

On se souviendra que, par le théorème 1.9,

$$C(G, w) \leq C_2(G, w),$$

pour tout groupe abélien discret pondéré, où

$$C_2(G, w)^2 := \sup_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2} \right).$$

Ayant caractérisé l'indice de $*$-stabilité $C(G, w)$ en termes de la norme d'opérateur de l'application $\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})$, nous nous emploierons à obtenir une caractérisation pour l'indice de sous-convolutivité $C_2(G, w)$ en termes d'un autre type de norme. Ce faisant, nous obtiendrons une preuve alternative et inédite du théorème 1.9 dans le cas particulier où G est un groupe abélien discret et $p = 2$.

Notation. Nous écrirons $\mathscr{S}_2(\mathcal{H})$ pour référer à la classe des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur $\mathcal{H}$.

Théorème 6.4. *L'indice de sous-convolutivité d'un groupe abélien discret pondéré est fini si et seulement si $\widetilde{T}_w$ est une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathscr{S}_2(\mathcal{H})$, auquel cas*

$$C_2(G, w) \ = \ \big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{S}_2(\mathcal{H})\big\|.$$

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}
& \big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{S}_2(\mathcal{H})\big\| \le C && \\
\iff \quad & \big\|\widetilde{T}_w(h)\big\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})} \le C\|h\|_{\mathcal{H}}, && (h \in \mathcal{H}) \\
\overset{B.1}{\iff} \quad & \big\|T_w(h)\big\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})} \le C\|h\|_{\mathcal{H}}, && (h \in \mathcal{H}_0) \\
\iff \quad & \left\|\sum_{y\in G}\sum_{z\in G} h(yz)\frac{w(yz)}{w(y)w(z)}(\delta_y \otimes \delta_z)\right\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})} \le C\|h\|_{\mathcal{H}}, && (h \in \mathcal{H}_0) \\
\overset{G.16}{\iff} \quad & \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} \big|h(yz)\big|^2 \frac{w(yz)^2}{w(y)^2w(z)^2} \le C^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2, && (h \in \mathcal{H}_0) \\
\iff \quad & \sum_{x\in G}\big|h(x)\big|^2 \sum_{y\in G}\frac{w(x)^2}{w(y)^2w(y^{-1}x)^2} \le C^2\sum_{x\in G}\big|h(x)\big|^2 && (h \in \mathcal{H}_0) \\
\iff \quad & \sum_{y\in G}\frac{w(x)^2}{w(y)^2w(y^{-1}x)^2} \le C^2, && (x \in G) \\
\iff \quad & C_2(G,w) \le C. &&
\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.5. *Pour tout groupe abélien discret pondéré (G, w), on a $C(G, w) \le C_2(G, w)$.*

Démonstration. On a

$$C(G,w) \overset{6.2}{=} \big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\| \overset{6.3}{=} \big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})\big\| \overset{G.13}{\le} \big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{S}_2(\mathcal{H})\big\| \overset{6.4}{=} C_2(G,w).$$

□

Le corollaire 6.5 n'est qu'une reformulation d'un cas particulier du théorème 1.9. Cependant, la preuve produite ci-dessus est inédite et elle diffère d'une manière appréciable de celle présentée au chapitre 1 de même que de celle présentée au chapitre 5. Ajoutons qu'une inégalité dans la direction opposée dans le cas particulier où G est un groupe d'ordre fini découle du théorème 6.4, comme l'exprime le théorème suivant :

Corollaire 6.6. *Étant donné (G, w) un groupe abélien discret pondéré d'ordre fini, on a $C_2(G, w) \le |G|^{1/2}C(G, w)$.*

Démonstration. Cela découle de l'effet combiné des théorèmes 6.2 et 6.4 et de la proposition G.15. En effet, sous l'hypothèse voulant que $\dim(\mathcal{H}) < \infty$, on a

$$\|\cdot\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})} \le \sqrt{n}\|\cdot\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})}.$$

□

Nous verrons plus loin (voir la remarque suivant le théorème 7.3) que l'inégalité du corollaire 6.6 est relativement précise au sens où plus l'ordre de G est grand, plus la constante $|G|^{1/2}$ frôle l'optimalité.

6.3 Estimation de $C(G,w)$ au moyen des normes de Schatten

Bien qu'on puisse associer l'indice de $*$-stabilité $C(G,w)$ à la norme $\big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\|$, cela ne garantit en rien qu'obtenir une valeur numérique pour $C(G,w)$ soit aisé. Bien au contraire, le calcul de la norme $\big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\|$ se révèle en général fort difficile.

Il serait avantageux de disposer d'une estimation pour $C(G,w)$ qui serait à la fois inférieure à $\big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{S}_2(\mathcal{H})\big\|$ et plus simple à calculer que $\big\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\big\|$. Les espaces de Schatten $\mathscr{S}_p(\mathcal{H})$ avec $p > 2$ constituent une piste prometteuse, car :

$$\mathscr{S}_2(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{S}_p(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H}), \qquad (p \geq 2)$$

et

$$\|\cdot\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \leq \|\cdot\|_{\mathscr{S}_p(\mathcal{H})} \leq \|\cdot\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})}, \qquad (p \geq 2).$$

Définition 6.3. Étant donné un groupe abélien discret pondéré (G,w) et un indice $p \geq 2$, on pose

$$C_p(G,w) := \big\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{S}_p(\mathcal{H})\big\|.$$

Soulignons que cette définition justifie *a posteriori* notre choix d'ajouter un « 2 » en indice dans la notation introduite au chapitre 4 pour désigner l'indice de sous-convolutivité de (G,w).

De toutes les normes de Schatten avec $p \geq 2$, c'est celle pour $p = 4$ qui semble offrir les meilleures perspectives de fournir une estimation relativement simple et pratique.

Théorème 6.7. *Quel que soit le groupe abélien discret pondéré* (G,w) *on a*

$$C_4(G,w)^8 \leq \widetilde{C}_4(G,w)^8 := \sup_{s\in G} \sum_{x\in G}\sum_{y\in G} \left(\sum_{z\in G} \frac{w(s)w(x)w(y)w(y^{-1}xs)}{w(z^{-1}x)^2 w(z^{-1}y)^2 w(z)^2 w(y^{-1}zs)^2} \right)^2 .$$

Démonstration. Étant donné $h \in \mathcal{H}_0$, on vérifie sans difficulté que l'opérateur adjoint de

$$T_w(h) = \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} h(yz)\frac{w(yz)}{w(y)w(z)}(\delta_y \otimes \delta_z) \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)$$

est

$$T_w(h)^* = \sum_{y\in G}\sum_{z\in G} \overline{h(yz)}\frac{w(yz)}{w(y)w(z)}(\delta_y \otimes \delta_z) \in \mathscr{B}(\mathcal{H}_0).$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_w(h)^*T_w(h) &= \left(\sum_{p\in G}\sum_{q\in G}\overline{h(pq)}\frac{w(pq)}{w(p)w(q)}(\delta_p\otimes\delta_q)\right)\left(\sum_{u\in G}\sum_{v\in G}h(uv)\frac{w(uv)}{w(u)w(v)}(\delta_u\otimes\delta_v)\right)\\ &= \sum_{p\in G}\sum_{v\in G}\left(\sum_{q\in G}\overline{h(pq)}h(qv)\frac{w(pq)w(qv)}{w(p)w(q)^2w(v)}\right)(\delta_p\otimes\delta_v). \end{aligned}$$

Ainsi, en vertu du théorème G.16, on a

$$\begin{aligned}
\left\|T_w(h)\right\|_{\mathscr{S}_4(\mathcal{H})}^4 &= \left\|T_w(h)^* T_w(h)\right\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})}^2 \\
&= \sum_{r\in G} \left\|T_w(h)^* T_w(h)[\delta_r]\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \sum_{r\in G}\sum_{p\in G}\left|\sum_{q\in G} \overline{h(pq)}h(qr)\frac{w(pq)w(qr)}{w(p)w(q)^2w(r)}\right|^2 \\
&= \sum_{r\in G}\sum_{p\in G}\sum_{q\in G}\sum_{j\in G} \overline{h(pq)}h(qr)h(pj)\overline{h(jr)}\frac{w(pq)w(qr)w(pj)w(jr)}{w(p)^2w(q)^2w(j)^2w(r)^2} \\
&= \sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\sum_{t\in G} \overline{h(x)}h(y)h(t)\overline{h(x^{-1}yt)}\left(\sum_{p\in G}\frac{w(x)w(y)w(t)w(x^{-1}yt)}{w(p)^2w(p^{-1}x)^2w(p^{-1}t)^2w(px^{-1}y)^2}\right).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\|T_w(h)\right\|_{\mathscr{S}_4(\mathcal{H})}^8 \\
&= \left(\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\sum_{t\in G} \overline{h(x)}h(y)h(t)\overline{h(x^{-1}yt)}\left(\sum_{p\in G}\frac{w(x)w(y)w(t)w(x^{-1}yt)}{w(p)^2w(p^{-1}x)^2w(p^{-1}t)^2w(px^{-1}y)^2}\right)\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{(x,y,t)\in G^3}\left|\overline{h(x)}h(y)h(t)\right|^2\right)\left(\sum_{(x,y,t)\in G^3}\left|h(x^{-1}yt)\right|^2\left(\sum_{p\in G}\frac{w(x)w(y)w(t)w(x^{-1}yt)}{w(p)^2w(p^{-1}x)^2w(p^{-1}t)^2w(px^{-1}y)^2}\right)^2\right) \\
&= \|h\|_{\mathcal{H}}^6 \sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\sum_{t\in G}\left|h(x^{-1}yt)\right|^2\left(\sum_{p\in G}\frac{w(x)w(y)w(t)w(x^{-1}yt)}{w(p)^2w(p^{-1}x)^2w(p^{-1}t)^2w(px^{-1}y)^2}\right)^2 \\
&= \|h\|_{\mathcal{H}}^6 \sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\sum_{s\in G}\left|h(s)\right|^2\left(\sum_{p\in G}\frac{w(x)w(y)w(y^{-1}xs)w(s)}{w(p)^2w(p^{-1}x)^2w(p^{-1}y^{-1}xs)^2w(px^{-1}y)^2}\right)^2 \\
&= \|h\|_{\mathcal{H}}^6 \sum_{s\in G}\left|h(s)\right|^2\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\left(\sum_{z\in G}\frac{w(s)w(x)w(y)w(y^{-1}xs)}{w(z^{-1}x)^2w(z)^2w(y^{-1}zs)^2w(z^{-1}y)^2}\right)^2 \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{H}}^8 \sup_{s\in G}\sum_{x\in G}\sum_{y\in G}\left(\sum_{z\in G}\frac{w(s)w(x)w(y)w(y^{-1}xs)}{w(z^{-1}x)^2w(z^{-1}y)^2w(z)^2w(y^{-1}zs)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du résultat annoncé. □

Tout comme le théorème 6.4, le théorème 6.7 permet d'obtenir une borne supérieure pour $C(G,w)$. Il s'agit cette fois d'une estimation inédite.

Corollaire 6.8. *Pour tout groupe abélien discret pondéré* (G,w), *on a* $C(G,w) \leq \widetilde{C}_4(G,w)$.

Démonstration. On dispose de la chaîne suivante :

$$C(G,w) \overset{6.2}{=} \left\|T_w : \mathcal{H}_0 \to \mathscr{B}(\mathcal{H}_0)\right\| \overset{6.3}{=} \left\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})\right\| \overset{G.13}{\leq} \left\|\widetilde{T}_w : \mathcal{H} \to \mathscr{S}_4(\mathcal{H})\right\| \overset{6.7}{\leq} \widetilde{C}_4(G,w).$$

$\square$

Remarque. Comme la formule $\widetilde{C}_4(G,w)$ nous fournit une borne supérieure pour $C_4(G,w)$ et non une valeur exacte, nous sommes dans l'impossibilité de conclure directement que

$$\widetilde{C}_4(G,w) \ \leq \ C_2(G,w). \tag{6.1}$$

Nous verrons cependant que pour de nombreux groupes pondérés on a bel et bien la chaîne d'inégalité suivante

$$C(G,w) \ \leq \ C_4(G,w) \ \leq \ \widetilde{C}_4(G,w) \ < \ C_2(G,w),$$

comme souhaité. Il existe toutefois des exemples[1] pour lesquels l'inégalité (6.1) n'est pas vérifiée.

6.4 Bornes inférieures pour $C(G,w)$, $C_2(G,w)$ et $\widetilde{C}_4(G,w)$

Bien que nous soyons principalement intéressés par l'obtention de bornes supérieures pour $C(G,w)$ et $C_4(G,w)$, il est également avantageux de disposer de bornes inférieures pour ces mêmes indices, ne serait-ce que pour pouvoir plus aisément anticiper les voies sans issues dans notre recherche d'une pondération dont l'indice de $*$-stabilité est fini.

La proposition suivante contient des bornes inférieures très indulgentes et néanmoins utiles pour chacun des indices $C(G,w)$, $C_2(G,w)$ et $\widetilde{C}_4(G,w)$.

Proposition 6.9. *Soit G un groupe abélien discret d'ordre au moins 2 et soit w une pondération sur G. On a*

(i) $C(G,w) \geq \frac{2/\sqrt{3}}{w(e)}$ *;*

(ii) $C_2(G,w) \geq \frac{\sqrt{2}}{w(e)}$ *;*

(iii) Si G est d'ordre au moins n alors $\widetilde{C}_4(G,w) \geq \frac{\sqrt[8]{n}}{w(e)}$.

Démonstration.

(i) Fixons $x_0 \in G \backslash \{e\}$ et posons $t := w(x_0)$. Étant donné $a > 0$, définissons une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x = e, \\ a, & \text{si } x = x_0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $\|f\|_w^2 = w(e)^2 + a^2t^2$. On vérifie aisément que

$$(f * f)(x_0) \ = \ 2a$$

1. À ce propos, voir la proposition 7.2.

et

$$(f * f)(e) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 + x_0 \neq e, \\ 1 + a^2, & \text{si } x_0 + x_0 = e. \end{cases}.$$

Ainsi $\left\|f * f\right\|_w^2 \geq w(e)^2 + 4a^2t^2$. Il s'ensuit que

$$C(G,w)^2 \;\geq\; \sup_{a>0} \frac{w(e)^2 + 4a^2t^2}{\left(w(e)^2 + a^2t^2\right)^2}.$$

Les techniques usuelles du calcul différentiel permettent de voir que ce supremum est atteint lorsque $a = \frac{w(e)}{t\sqrt{2}}$, auquel cas

$$C(G,w)^2 \;\geq\; \frac{4}{3w(e)^2}.$$

(ii) Fixons $x_0 \in G\backslash\{e\}$. On a alors

$$C_2(G,w)^2 \;\geq\; \frac{w(x_0)^2}{w(e)^2 w(ex_0)^2} + \frac{w(x_0)^2}{w(x_0)^2 w(e)^2} \;=\; \frac{2}{w(e)^2}.$$

(iii) En se limitant à considérer les termes pour lesquels $s = y = z = e$, on voit que

$$C_4(G,w)^8 \;\geq\; \sum_{x \in G} \left(\frac{w(e)^2 w(x)^2}{w(e)^6 w(x)^2}\right)^2 \;\geq\; \frac{n}{w(e)^8}. \qquad \square$$

La proposition 6.9 est porteuses de nouvelles désagréables : le théorème 6.7 ne représente pas le point d'orgue espéré, car l'estimation $\widetilde{C}_4(G,w)$ se révèle inutile pour tout groupe G d'ordre infini puisque $\widetilde{C}_4(G,w) = \infty$. Ayant cela à l'esprit, on voit mal comment $\widetilde{C}_4(G,w)$ pourrait être d'une quelconque utilité dans l'étude de la $*$-stabilité de $\ell_2(\mathbb{Z},w)$. Cela ne signifie pas pour autant que l'estimation $\widetilde{C}_4(G,w)$ soit absolument sans intérêt puisqu'il demeure une borne supérieure pertinente et pratique lorsque G est un groupe fini.

Chapitre 7

Application aux groupes finis

Bien que notre préoccupation principale réside dans l'étude des groupes abéliens infinis, et plus spécifiquement dans celle du groupe $G := \mathbb{Z}$, les caractérisations obtenues au chapitre précédent s'appliquent également au cas où G est un groupe fini.

À l'évidence, les groupes abéliens finis ne permettent pas de résoudre directement le problème principal puisque – indépendamment du choix de la pondération – l'espace $\ell_2(G, w)$ est toujours $*$-stable et les indices $C(G, w)$, $C_2(G, w)$, $\widetilde{C}_4(G, w)$ sont toujours finis. Dans ce chapitre, notre intérêt dominant sera de calculer ces différents indices et de comparer ceux-ci. Nous verrons ultérieurement qu'une meilleure compréhension des indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité des groupes finis pondérés n'est pas une perte de temps et peut être mise à profit.

7.1 Cas du groupe $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

Le premier exemple sur lequel nous porterons notre attention est celui de $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Ce groupe est suffisamment simple pour faire en sorte qu'il soit possible d'obtenir une description exhaustive de $C(\mathbb{Z}_2, w)$, $C_2(\mathbb{Z}_2, w)$ et $\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2, w)$ par des techniques analytiques élémentaires comme en témoigne le théorème qui suit.

Théorème 7.1. *Considérons la pondération* $w : \mathbb{Z}_2 \to (0, \infty)$ *définie par* $w(0) := 1$ *et* $w(1) := t > 0$. *On a*

(i) $C(\mathbb{Z}_2, w) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}, & \textit{si } 0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{2}{\sqrt{3 - \frac{1}{t^2}}}, & \textit{si } t > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

(ii) $C_2(\mathbb{Z}_2, w) = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}, & \textit{si } 0 < t \leq 1, \\ \sqrt{2}, & \textit{si } t \geq 1. \end{cases}$

(iii) $\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2, w) = \begin{cases} \left(3 + \frac{8}{t^4} + \frac{4}{t^8} + \frac{1}{t^{16}}\right)^{1/8}, & \text{si } 0 < t < 1, \\ \left(6 + \frac{8}{t^4} + \frac{2}{t^8}\right)^{1/8}, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$

Démonstration.

(i) Nous aurons recours à la caractérisation obtenue au théorème 6.2 afin de calculer $C(\mathbb{Z}_2, w)$:

$$C(\mathbb{Z}_2, w) \;=\; \sup\left\{ \left\|T_w(h)\right\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} : \; \|h\|_{\mathcal{H}} = 1 \right\}.$$

Par la façon dont l'application T_w est définie, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $h \in \mathcal{H}$:

$$\left\|T_w(h)\right\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \;\leq\; \left\|T_w(|h|)\right\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})}.$$

On peut donc, dans ce qui suit, supposer sans perte de généralité que h est une fonction positive. Or, un élément $h \in \mathcal{H}$ positif et unitaire générique est de la forme $h = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$, où $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour un tel h, on vérifie que :

$$T_w(h) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)/t^2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant auto-adjointe/hermitienne, sa norme d'opérateur est donnée par sa plus grande valeur propre, à savoir la plus grande racine du polynôme caractéristique suivant :

$$X^2 - \cos(\theta)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)X + \left(\frac{\cos^2(\theta)}{t^2} - \sin^2(\theta)\right) \;=\; 0.$$

Posons $c := \cos(\theta)$ et $u := 1 + \frac{1}{t^2}$. L'équation qui précède peut se reformuler comme suit :

$$X^2 - cuX + (c^2u - 1) \;=\; 0.$$

La plus grande racine de cette équation quadratique est :

$$\frac{cu + \sqrt{(u^2 - 4u)c^2 + 4}}{2}.$$

L'indice de $*$-stabilité de $(\mathbb{Z}_2, w)$ s'obtient donc en maximisant cette équation en considérant tous les h positifs et unitaires, c'est-à-dire en considérant le supremum sur tous les $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou, de façon équivalente, sur tous les $c \in [0, 1]$. On vérifie, au moyen de techniques d'optimisation élémentaire issues du calcul différentiel, que :

$$\sup_{c \in [0,1]} \frac{cu + \sqrt{(u^2 - 4u)c^2 + 4}}{2} \;=\; \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4-u}}, & \text{si } 1 \leq u \leq 3, \\ u - 1, & \text{si } u \geq 3, \end{cases}$$

ce qui revient à dire que

$$C(\mathbb{Z}_2, w) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{t^2}, & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{2}{\sqrt{3 - \frac{1}{t^2}}}, & \text{si } t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

(ii) Par un calcul direct, on trouve que

$$C_2(\mathbb{Z}_2, w)^2 \;=\; \max_{x\in\mathbb{Z}_2} \sum_{y\in\mathbb{Z}_2} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(x-y)^2} \;=\; \max\left\{1+\frac{1}{t^4}\ ,\ 2\right\}.$$

(iii) Une fois de plus, on procède au calcul directement à partir de la définition afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2, w)^8 \;&=\; \max_{s\in\mathbb{Z}_2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}_2} \left(\sum_{z\in\mathbb{Z}_2} \frac{w(s)w(x)w(y)w(s+x-y)}{w(x-z)^2 w(y-z)^2 w(z)^2 w(s+z-y)^2} \right)^2 \\ &=\; \max\left\{3+\frac{8}{t^4}+\frac{4}{t^8}+\frac{1}{t^{16}}\ ,\ 6+\frac{8}{t^4}+\frac{2}{t^8}\right\}.\end{aligned}$$

□

Notons que le fait de poser $w(0)=1$ ne joue qu'un rôle négligeable dans la démonstration du théorème 7.1. On aurait très bien pu laisser $w(0)$ prendre n'importe quelle autre valeur strictement positive et poser plutôt $t := \frac{w(1)}{w(0)}$. Cela aurait eu pour effet d'altérer la valeur de $C(\mathbb{Z}_2, w)$, $C_2(\mathbb{Z}_2, w)$ et $\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2, w)$ d'un facteur $\frac{1}{w(0)}$. Or, puisque la valeur exacte de ces indices nous indiffère et que seuls les quotients $\frac{C(\mathbb{Z}_2,w)}{C_2(\mathbb{Z}_2,w)}$, $\frac{C(\mathbb{Z}_2,w)}{\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2,w)}$ et $\frac{\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2,w)}{C_2(\mathbb{Z}_2,w)}$ nous préoccupent, l'ajout ou l'absence du facteur $\frac{1}{w(0)}$ est transparent.

Le graphe ci-dessous illustre comment varient les quotients $\frac{C(\mathbb{Z}_2,w)}{C_2(\mathbb{Z}_2,w)}$ et $\frac{C(\mathbb{Z}_2,w)}{\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2,w)}$ en fonction de $t := \frac{w(1)}{w(0)}$. Étonnamment, le minimum local de $\frac{C}{C_2}$ ne se situe pas directement en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mais plutôt légèrement à la droite de ce point, soit en $t = \sqrt{3-\sqrt{6}}$.

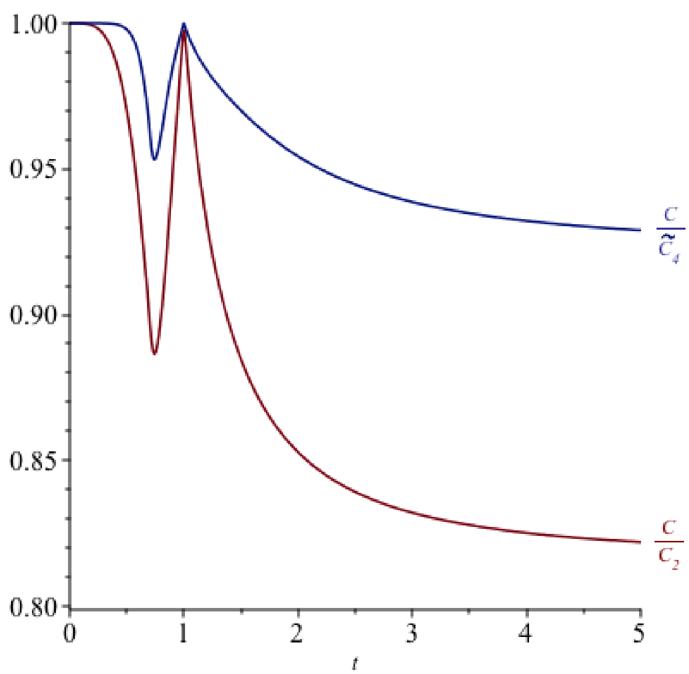

Figure 7.1 – Graphe de C/C_2 et $C/\widetilde{C}_4$ par rapport à $t := w(1)/w(0)$

On remarque que la courbe bleue est constamment située au-dessus de la courbe rouge. Cette observation visuelle se traduit mathématiquement par l'inégalité ci-dessous :

$$\frac{C(\mathbb{Z}_2, w)}{C_2(\mathbb{Z}_2, w)} \;\leq\; \frac{C(\mathbb{Z}_2, w)}{\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2, w)},$$

ou, de façon équivalente,

$$\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_2, w) \;\leq\; C_2(\mathbb{Z}_2, w).$$

On peut d'ailleurs aisément vérifier analytiquement à partir des équations obtenues au théorème 7.1 que cette inégalité est stricte pour $t \neq 1$ comme en fait foi la figure suivante :

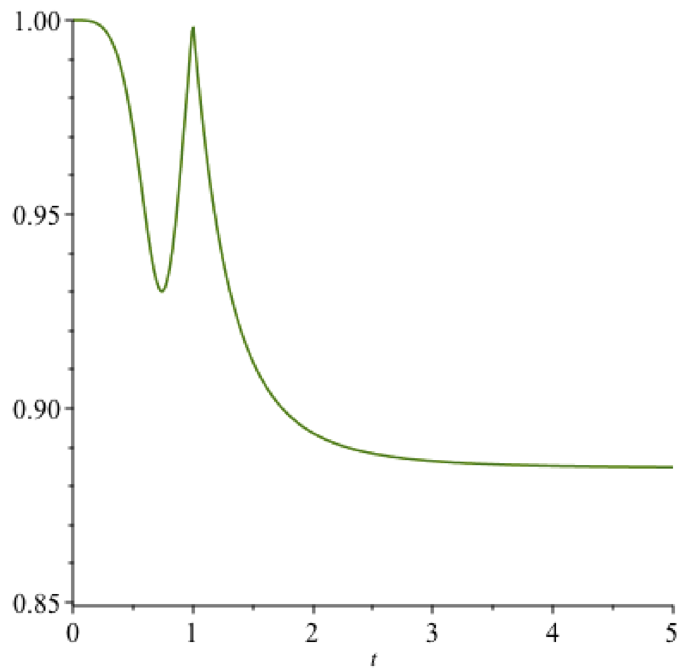

FIGURE 7.2 – Graphe de $\widetilde{C}_4/C_2$ par rapport à $t := w(1)/w(0)$

Bien que l'estimation $\widetilde{C}_4(G, w)$ puisse s'avérer être une approximation utile de $C(G, w)$, la proposition qui suit nous invite à la prudence : il arrive que, même pour des groupes finis très simples, l'estimation $\widetilde{C}_4(G, w)$ soit trop grossière pour être d'une quelconque utilité en vue des objectifs qui sont les nôtres.

Proposition 7.2. *Considérons le groupe $G := \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ et la pondération $w : \mathbb{Z}_3 \to (0, \infty)$ définie par $w(0) := 1$, $w(1) := a$ et $w(2) := b$. Si a et b satisfont $0 < \sqrt{2}b \leq a^2 < \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$, alors*

$$\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, w) \;>\; C_2(\mathbb{Z}_3, w).$$

Démonstration. D'une part, on obtient au terme d'un calcul direct que

$$C_2(\mathbb{Z}_3, w)^2 \;=\; \max\left\{2 + \frac{a^2}{b^4}\;,\; 2 + \frac{b^2}{a^4}\;,\; 1 + \frac{2}{a^2b^2}\right\}.$$

Or, sous les hypothèses stipulées ci-dessus, on a $a \geq b$ et $\frac{a^2}{b^4} \geq \frac{2}{a^2 b^2}$, de sorte que

$$C_2(\mathbb{Z}_3, w)^2 \;=\; 2 + \frac{a^2}{b^4}.$$

D'autre part, en ne retenant que les termes avec $(s, x, y, z) := (1, 1, 1, 2)$ et $(1, 0, 1, 2)$ dans la définition de $\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, w)$, on voit que

$$\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, 2)^8 \;\geq\; \frac{a^8}{b^{16}} + \frac{1}{b^{12}} \;=\; \frac{a^8}{b^{16}}\left(1 + \frac{b^4}{a^8}\right),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, 2)^2 \;&\geq\; \frac{a^2}{b^4}\left(1 + \frac{b^4}{a^8}\right)^{1/4} \\
&\geq\; \frac{a^2}{b^4}\left(1 + \frac{15}{16}\frac{b^4}{a^8}\right)^{1/4} \\
&\geq\; \frac{a^2}{b^4}\left(1 + 4\left(\frac{b^4}{16a^8}\right) + 6\left(\frac{b^4}{16a^8}\right)^2 + 4\left(\frac{b^4}{16a^8}\right)^3 + \left(\frac{b^4}{16a^8}\right)^4\right)^{1/4} \\
&=\; \frac{a^2}{b^4}\left(1 + \frac{b^4}{16a^8}\right) \\
&=\; \frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{16a^6}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, 2)^2 - C_2(\mathbb{Z}_3, w)^2 \;\geq\; \frac{1}{16a^6} - 2 \;>\; 0$$

car $a^6 < \frac{1}{32}$ par hypothèse. □

7.2 Cas du groupe $G = \mathbb{Z}_n$ pour $n \geq 3$

Un examen attentif de la courbe $\frac{C(\mathbb{Z}_2,w)}{C_2(\mathbb{Z}_2,w)}$ présentée à la figure 7.2 semble indiquer que cette fonction tend vers une limite non nulle lorsqu'on laisse t tendre vers l'infini. Un simple calcul avec les équations obtenues au théorème 7.1 révèle que cette limite est $\sqrt{2/3} \approx 0.816$. Par conséquent, quelle que soit la pondération $w : \mathbb{Z}_2 \to (0, \infty)$, on a toujours

$$\frac{C(\mathbb{Z}_2, w)}{C_2(\mathbb{Z}_2, w)} \;\geq\; \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Le prochain résultat montre cependant que, par un choix approprié de l'ordre n et de la pondération w, on peut faire en sorte que le ratio $\frac{C(\mathbb{Z}_n,w)}{C_2(\mathbb{Z}_n,w)}$ soit arbitrairement petit.

Théorème 7.3. *Étant donné un entier $n \geq 3$, on considère la pondération $w : \mathbb{Z}_n \to (0, \infty)$ définie par $w(0) = w(1) = ... = w(n-2) := 1$ et $w(n-1) := t \geq 1$. On a*

$$\frac{C(\mathbb{Z}_n, w)}{C_2(\mathbb{Z}_n, w)} \;\leq\; \left(\frac{(n-1) + t^2}{2 + (n-2)t^2}\right)^{1/2}.$$

Ce théorème découle directement des deux lemmes qui suivent.

Lemme 7.4. *Si w désigne la pondération définie dans l'énoncé du théorème 7.3, alors on a $C_2(\mathbb{Z}_n, w) = \big(2 + (n-2)t^2\big)^{1/2}$.*

Démonstration. En calculant $C_2(\mathbb{Z}_n, w)$ directement, on obtient

$$C_2(\mathbb{Z}_n, w)^2 \;=\; \max\left\{(n-2) + \frac{2}{t^2}\ ,\ (n-1) + \frac{1}{t^4}\ ,\ 2 + (n-2)t^2\right\}.$$

En particulier, pour $t \geq 1$, on a

$$C_2(\mathbb{Z}_n, w)^2 \;=\; 2 + (n-2)t^2. \qquad \square$$

Lemme 7.5. *Si w désigne la pondération définie dans l'énoncé du théorème 7.3 alors on a $C(\mathbb{Z}_n, w) \leq \big((n-1) + t^2\big)^{1/2}$.*

Démonstration. Une fois de plus, nous aurons recours au théorème 6.2 afin de calculer $C(\mathbb{Z}_n, w)$. Étant donné $h = \Big(h(0),\ h(1),\ h(2),\ ...,\ h(n-1)\Big)$ un élément unitaire générique de la n-ième coque sphérique de rayon 1, on vérifie directement à partir de la définition 6.2 que l'application linéaire est assimilable à la matrice suivante :

$$T_w(h) \;=\; \begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(n-3) & h(n-2) & h(n-1) \\ h(1) & h(2) & h(3) & \dots & h(n-2) & h(n-1)t & \frac{h(0)}{t} \\ h(2) & h(3) & h(4) & \cdots & h(n-1)t & h(0) & \frac{h(1)}{t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(n-3) & h(n-2) & h(n-1)t & \dots & h(n-6) & h(n-5) & \frac{h(n-4)}{t} \\ h(n-2) & h(n-1)t & h(0) & \dots & h(n-5) & h(n-4) & \frac{h(n-3)}{t} \\ h(n-1) & \frac{h(0)}{t} & \frac{h(1)}{t} & \dots & \frac{h(n-4)}{t} & \frac{h(n-3)}{t} & \frac{h(n-2)}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $T_w(h)$ peut se décomposer comme $T_w(h) = DA_w(h)D$, où D désigne la matrice diagonale suivante :

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

et $A_w(h)$ représente la matrice anticirculante suivante :

$$A_w(h) := \begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(n-3) & h(n-2) & h(n-1)t \\ h(1) & h(2) & h(3) & \dots & h(n-2) & h(n-1)t & h(0) \\ h(2) & h(3) & h(4) & \cdots & h(n-1)t & h(0) & h(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(n-3) & h(n-2) & h(n-1)t & \dots & h(n-6) & h(n-5) & h(n-4) \\ h(n-2) & h(n-1)t & h(0) & \dots & h(n-5) & h(n-4) & h(3) \\ h(n-1)t & h(0) & h(1) & \dots & h(n-4) & h(n-3) & h(n-2) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la matrice $A_w(h)$ peut s'écrire comme

$$A_w(h) \;=\; h(0)P_0 + h(1)P_1 + ... + h(n-2)P_{n-2} + th(n-1)P_{n-1},$$

où $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ désignent des matrices de permutations. Comme $t \geq 1$, on a que $\|D\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \leq 1$ et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \big\|T_w(h)\big\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} &\leq \|D\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})}\Big\|h(0)P_0 + h(1)P_1 + ... + h(n-2)P_{n-2} + th(n-1)P_{n-1}\Big\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})}\|D\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-2}\big|h(k)\big| + t\big|h(n-1)\big| \\ &\overset{\dagger}{\leq} (n-1+t^2)^{1/2}\|h\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

où (†) découle d'une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. En conséquence

$$C(\mathbb{Z}_n, w) \;=\; \big\|T_w : \mathcal{H} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})\big\| \;\leq\; (n-1+t^2)^{1/2}. \qquad \square$$

Remarque.

(i) Pour tout entier $n \geq 4$ fixé, on déduit aisément du théorème 7.1 que

$$\frac{C(\mathbb{Z}_n, w)}{C_2(\mathbb{Z}_n, w)} \;<\; 1$$

pour tout $t > 1$. Pour $n = 3$, cependant, le théorème 7.1 n'est pas concluant, car, pour tout $t > 1$, la majoration obtenue au lemme 7.5 correspond exactement à la formule pour $C_2(\mathbb{Z}_3, w)$. Le théorème 6.7 et l'estimation $\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, w)$ viennent alors à notre rescousse. En effet, si $w : \mathbb{Z}_3 \to (0, \infty)$ est définie par $w(0) = w(1) := 1$ et $w(2) := t > 1$ alors un calcul explicite nous donne

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_3, w)^8 &= t^8 + 6^4 + 5t^2 + 22 + \frac{28}{t^2} + \frac{12}{t^4} + \frac{5}{t^6} + \frac{2}{t^8} \\ &< t^8 + 6t^4 + 5t^2 + 69 \\ &< t^8 + 8t^6 + 24t^4 + 32t^2 + 16 \\ &= (2+t^2)^4 \\ &= C_2(\mathbb{Z}_3, w)^8. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t > 1$ on a, comme voulu, que :

$$\frac{C(\mathbb{Z}_n, w)}{C_2(\mathbb{Z}_n, w)} \;\leq\; \frac{\widetilde{C}_4(\mathbb{Z}_n, w)}{C_2(\mathbb{Z}_n, w)} \;<\; 1.$$

(ii) La pondération considérée au théorème 7.1 nous donne :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_2(\mathbb{Z}_n, w)}{C(\mathbb{Z}_n, w)} \;=\; \sqrt{n-2}.$$

Cela permet de voir que, pour de grandes valeurs de n, l'inégalité obtenue au corollaire 6.6 est bien près d'être optimale.

Pour tout entier $n \geq 4$ fixé, la borne supérieure pour $\frac{C(\mathbb{Z}_n,w)}{C_2(\mathbb{Z}_n,w)}$ obtenue au théorème 7.3 reproduit le comportement de $\frac{C(\mathbb{Z}_2,w)}{C_2(\mathbb{Z}_2,w)}$ qui avait été observé à la figure 8.3, au sens où ce ratio converge vers une limite non nulle lorsqu'on laisse t tendre vers l'infini. En effet, comme l'illustre la figure qui suit, on a

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{(n-1)+t^2}{2+(n-2)t^2}\right)^{1/2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{n-2}}.$$

Cela signifie que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut toujours choisir un entier $n \geq 1$ et un $t \geq 1$ assez grands pour que

$$\frac{C(\mathbb{Z}_n, w)}{C_2(\mathbb{Z}_n, w)} \;<\; \varepsilon.$$

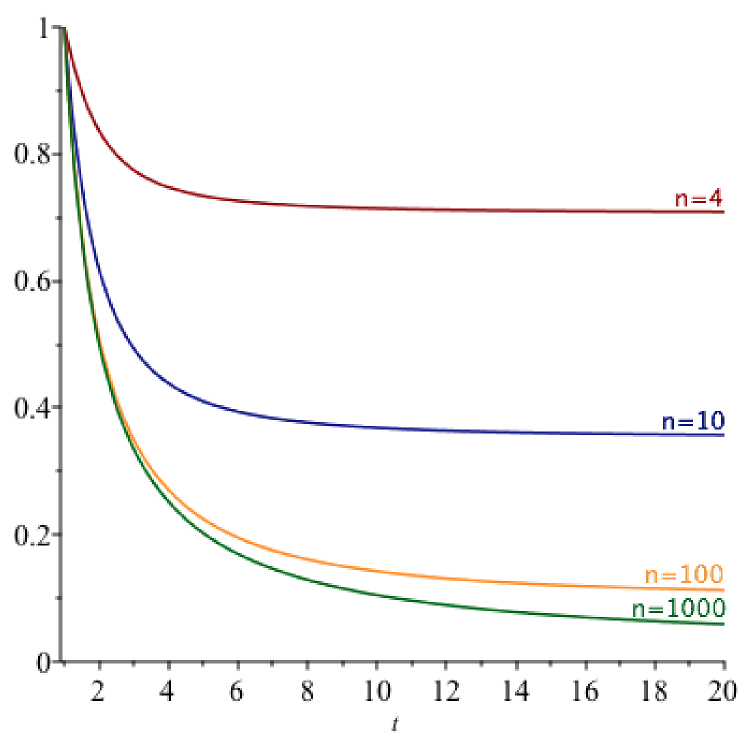

FIGURE 7.3 – Graphe de la borne supérieure pour le ratio $C(\mathbb{Z}_n, w)/C_2(\mathbb{Z}_n, w)$ par rapport à $t := w(n-1) \geq 1$ pour différentes valeurs de n

7.3 Groupes abéliens finis quelconques

À la section précédente nous avons vu que tout groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ admet des pondérations w pour lesquelles $\frac{C(\mathbb{Z}_n,w)}{C_2(\mathbb{Z}_n,w)} < 1$. Le théorème de structure des groupes abéliens finis que voici trace la voie vers une extension à tous les groupes abéliens finis.

Théorème 7.6. *Étant donné G un groupe abélien fini avec $|G| > 2$, il existe une unique suite d'entiers $n_1, n_2, ..., n_k \geq 2$ pour laquelle on a l'isomorphisme :*

$$G \;\simeq\; \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k},$$

avec la condition supplémentaire : n_{i+1} divise n_i pour tout i entre 1 et $k-1$.

Démonstration. Voir la section 6.1 de [10]. □

Afin d'espérer pouvoir mettre à profit le théorème de structure des groupes abéliens finis, il nous faudrait trouver une façon de définir une pondération sur produit direct de groupes pondérés (G_i, w_i), de façon à ce que les indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité de ce produit direct puissent être calculés aisément à partir des indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité des (G_i, w_i). Le théorème montre qu'une telle relation est obtenue si la pondération sur le produit direct est définie de la façon la plus naturelle qui soit.

Théorème 7.7. *Soient (G_1, w_1) et (G_2, w_2) des groupes pondérés (d'ordre fini ou infini). Posons $G := G_1 \times G_2$ et définissons $w : G \to (0, \infty)$ par $w(x_1, x_2) := w_1(x_1)w_2(x_2)$. Alors*

(i) $C_2(G, w) = C_2(G_1, w_1)C_2(G_2, w_2)$ *;*

(ii) $\widetilde{C}_4(G, w) = \widetilde{C}_4(G_1, w_1)\widetilde{C}_4(G_2, w_2)$ *;*

(iii) $C(G, w) = C(G_1, w_1)C(G_2, w_2)$*.*

Démonstration.

(i) Par calcul explicite on trouve que

$$\begin{aligned}
C_2(G,w)^2 &= \sup_{x\in G} \sum_{y\in G} \frac{w(x)^2}{w(y)^2 w(y^{-1}x)^2} \\
&= \sup_{(x_1,x_2)\in G} \sum_{(y_1,y_2)\in G} \frac{w_1(x_1)^2 w_2(x_2)^2}{w_1(y_1)^2 w_2(y_2)^2 w_1(y_1^{-1}x_1)^2 w_2(y_2^{-1}x_2)^2} \\
&= \sup_{x_1\in G_1} \left(\sum_{y_1\in G_1} \frac{w_1(x_1)^2}{w_1(y_1)^2 w_1(y_1^{-1}x_1)^2} \right) \sup_{x_2\in G_2} \left(\sum_{y_2\in G_2} \frac{w_2(x_2)^2}{w_2(y_2)^2 w_2(y_2^{-1}x_2)^2} \right) \\
&= C_2(G_1,w_1)^2 C_2(G_2,w_2)^2.
\end{aligned}$$

(ii) La preuve est analogue à celle de la partie (i).

(iii) Il s'agit d'une conséquence immédiate des lemmes 7.8 et 7.9 ci-dessous. $\square$

Lemme 7.8. *Soient* (G_1, w_1) *et* (G_2, w_2) *des groupes pondérés. Posons* $G := G_1 \times G_2$ *et définissons* $w : G \to (0, \infty)$ *par* $w(x_1, x_2) := w_1(x_1)w_2(x_2)$*. Alors* $C(G, w) \geq C(G_1, w_1)C(G_2, w_2)$*.*

Démonstration. Considérons des fonctions $f_1, g_1 \in \ell_2(G_1, w_1)$ ainsi que $f_2, g_2 \in \ell_2(G_2, w_2)$ et définissons $f, g : G \to \mathbb{C}$ comme suit $f(x_1, x_2) := f_1(x_1)f_2(x_2)$ et $g(x_1, x_2) := g(x_1)g(x_2)$. Remarquons d'abord que, de la façon dont nous avons défini les fonctions f et g ainsi que la pondération w, on a :

$$\|f\|_w^2 \;=\; \|f_1\|_{w_1}^2 \|f_2\|_{w_2}^2 \qquad \text{et} \qquad \|g\|_w^2 \;=\; \|g_1\|_{w_1}^2 \|g_2\|_{w_2}^2.$$

On vérifie par la suite que

$$\begin{aligned}
\left\|f * g\right\|_w^2 &= \sum_{(x_1,x_2)\in G} \left| \sum_{(y_1,y_2)\in G} f(y_1, y_2) g\big(y_1^{-1}x_1, y_2^{-1}x_2\big) \right|^2 w(x_1, x_2)^2 \\
&= \sum_{x_1\in G_1} \sum_{x_2\in G_2} \left| \sum_{y_1\in G_1} \sum_{y_2\in G_2} f_1(y_1)f_2(y_2)g_1\big(y_1^{-1}x_1\big)g_2\big(y_2^{-1}x_2\big) \right|^2 w_1(x_1)^2 w_2(x_2)^2 \\
&= \sum_{x_1\in G_1} \sum_{x_2\in G_2} \left| \left(\sum_{y_1\in G_1} f_1(y_1)g_1(y_1^{-1}x_1) \right) \left(\sum_{y_2\in G_2} f_2(y_2)g_2(y_2^{-1}x_2) \right) \right|^2 w_1(x_1)^2 w_2(x_2)^2 \\
&= \sum_{x_1\in G_1} \sum_{x_2\in G_2} \Big| (f_1 * g_1)(x_1) \cdot (f_2 * g_2)(x_2) \Big|^2 w_1(x_1)^2 w_2(x_2)^2 \\
&= \left(\sum_{x_1\in G_1} \big|(f_1 * g_1)(x_1)\big|^2 w_1(x_1)^2 \right) \left(\sum_{x_2\in G_2} \big|(f_2 * g_2)(x_2)\big|^2 w_1(x_1)^2 w_2(x_2)^2 \right) \\
&= \left\|f_1 * g_1\right\|_{w_1}^2 \left\|f_2 * g_2\right\|_{w_2}^2.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& C(G, w)^2 \\
= \quad & \sup \left\{ \frac{\left\|f * g\right\|_w^2}{\|f\|_w^2 \|g\|_w^2} \;:\; f, g \in \ell_2(G, w) \right\} \\
\geq \quad & \sup \left\{ \frac{\left\|f * g\right\|_w^2}{\|f\|_w^2 \|g\|_w^2} \;:\; f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2),\; g(x_1, x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2),\; f_i, g_i \in \ell_2(G_i, w_i) \right\} \\
= \quad & \sup \left\{ \frac{\left\|f_1 * g_1\right\|_{w_1}^2}{\|f_1\|_{w_1}^2 \|g_1\|_{w_1}^2} \;:\; f_1, g_1 \in \ell_2(G_1, w_1) \right\} \cdot \sup \left\{ \frac{\left\|f_2 * g_2\right\|_{w_2}^2}{\|f_2\|_{w_2}^2 \|g_2\|_{w_2}^2} \;:\; f_2, g_2 \in \ell_2(G_2, w_2) \right\} \\
= \quad & C(G_1, w_1)^2 C(G_2, w_2)^2
\end{aligned}$$

comme voulu. $\square$

Lemme 7.9. *Soient* (G_1, w_1) *et* (G_2, w_2) *des groupes pondérés tels dont les indices de* $*$*-stabilité sont finis. Posons* $G := G_1 \times G_2$ *et définissons* $w : G \to (0, \infty)$ *par* $w(x_1, x_2) := w_1(x_1)w_2(x_2)$. *Alors* $C(G, w) \leq C(G_1, w_1)C(G_2, w_2)$.

Démonstration.

- Cas où $f, g : G \to \mathbb{C}$ sont des fonctions de support fini. Pour $z \in G_2$, on définit $f_z, g_z : G_1 \to \mathbb{C}$ par $f_z(t) := f(t, z)$ et $g_z(t) := g(t, z)$.

  Remarquons que pour tout $x_2 \in G_2$ on a

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{x_1 \in G_1} \left|\sum_{y_1 \in G_1} \sum_{y_2 \in G_2} f(y_1, y_2) g\big(y_1^{-1}x_1, y_2^{-1}x_2\big)\right|^2 w_1(x_1)^2\right)^{1/2} \\
= & \left\|\sum_{y_2 \in G_2} \big(f_{y_2} * g_{y_2^{-1}x_2}\big)\right\|_{w_1} \\
\leq & \sum_{y_2 \in G_2} \left\|f_{y_2} * g_{y_2^{-1}x_2}\right\|_{w_1} \\
\leq & \ C(G_1, w_1) \sum_{y_2 \in G_2} \|f_{y_2}\|_{w_1} \left\|g_{y_2^{-1}x_2}\right\|_{w_1} \\
= & \ C(G_1, w_1)(u * v)(x_2),
\end{aligned}$$

  où $u, v : G_2 \to \mathbb{C}$ sont donnés par $u(z) := \|f_z\|_{w_1}$ et $v(z) := \|g_z\|_{w_1}$.

  Observons au passage que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{w_2}^2 &= \sum_{z \in G_2} \big|u(z)\big|^2 w_2(z)^2 \\
&= \sum_{z \in G_2} \|f_z\|_{w_1}^2 w_2(z)^2 \\
&= \sum_{z \in G_2} \sum_{t \in G_1} \big|f_z(t)\big|^2 w_1(t)^2 w_2(z)^2 \\
&= \sum_{z \in G_2} \sum_{t \in G_1} \big|f(t, z)\big|^2 w_1(t)^2 w_2(z)^2 \\
&= \|f\|_w^2.
\end{aligned}$$

  Un argument similaire montre que $\|v\|_{w_2}^2 = \|g\|_w^2$.

Nous sommes maintenant prêts à nous pencher sur la norme de la convolution de f et g :

$$\begin{aligned}
\big\|f*g\big\|_w^2 &= \sum_{(x_1,x_2)\in G}\left|\sum_{(y_1,y_2)\in G} f(y_1,y_2)g\big(y_1^{-1}x_1,y_2^{-1}x_2\big)\right|^2 w(x_1,x_2)^2\\
&= \sum_{x_2\in G_2}\left(\sum_{x_1\in G_1}\left|\sum_{y_1\in G_1}\sum_{y_2\in G_2} f(y_1,y_2)g\big(y_1^{-1}x_1,y_2^{-1}x_2\big)\right|^2 w_1(x_1)^2\right) w_2(x_2)^2\\
&\le \sum_{x_2\in G_2} C(G_1,w_1)^2\big((u*v)(x_2)\big)^2 w(x)^2\\
&= C(G_1,w_1)^2\big\|u*v\big\|_{w_2}^2\\
&\le C(G_1,w_1)^2C(G_2,w_2)^2\|u\|_{w_2}^2\|v\|_{w_2}^2\\
&= C(G_1,w_1)^2C(G_2,w_2)^2\|f\|_w^2\|g\|_w^2.
\end{aligned}$$

- Cas général. Notons d'entrée de jeu que la finitude des indices de $*$-stabilité des (G_i,w_i) implique, en vertu de la proposition 4.1, que $\inf\limits_{y_i\in G_i} w_i(y_i)w(y_1^{-1}x_i) > 0$. Il s'ensuit donc que

$$\inf_{y\in G} w(y)w(y^{-1}x) \;\ge\; \inf_{y_1\in G_1} w_1(y_1)w_1(y_1^{-1}x_1)\inf_{y_2\in G_2} w_2(y_2)w_2(y_2^{-1}x_2) \;>\; 0.$$

Ainsi, toujours en vertu de la proposition 4.1, on a que $\sum\limits_{y\in G} f(y)g(y^{-1}x)$ converge absolument pour tout $f,g\in\ell_2(G,w)$.

Soient $f,g\in\ell_2(G,w)$ et soit $z_1,z_2,...$ une énumération des éléments appartenant à $\mathrm{supp}(f)\cup\mathrm{supp}(g)$. Définissons $f_n,g_n : G\to\mathbb{C}$ comme suit :

$$f_n(z_i) := \begin{cases} f(z_i), & \text{si } i\le n,\\ 0, & \text{sinon;}\end{cases} \qquad\text{et}\qquad g_n(z_i) := \begin{cases} g(z_i), & \text{si } i\le n,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, on a que f_n,g_n sont des fonctions à support fini. De plus on a

$$\|f_n\|_w \;\le\; \|f\|_w \qquad\text{et}\qquad \|g_n\|_w \;\le\; \|g\|_w.$$

Notons d'une part que, puisque les fonctions

$$\big|(f-f_n)(y)(g-g_n)(y^{-1}x)\big|,\qquad \big|(f-f_n)(y)g_n(y^{-1}x)\big|,\qquad\text{et}\qquad \big|f_n(y)(g-g_n)(y^{-1}x)\big|$$

sont dominées, en tant que fonctions de y, par $\big|f(y)g(y^{-1}x)\big|$ et, puisque nous avons vu plus haut que $\sum\limits_{y\in G}\big|f(y)g(y^{-1}x)\big|$ converge, le théorème de convergence dominée et la continuité de la norme impliquent que

$$\lim_{n\to\infty}\big\|(f-f_n)*(g-g_n)\big\|_w \;=\; \lim_{n\to\infty}\big\|(f-f_n)*g_n\big\|_w \;=\; \lim_{n\to\infty}\big\|f_n*(g-g_n)\big\|_w \;=\; 0.$$

D'autre part, comme f_n et g_n sont deux fonctions de support fini, on déduit du cas précédemment traité que

$$\big\|f_n*g_n\big\|_w \;\le\; C(G_1,w_1)C(G_2,w_2)\|f_n\|_w\|g_n\|_w \;\le\; C(G_1,w_1)C(G_2,w_2)\|f\|_w\|g\|_w.$$

On conclut donc que

$$
\begin{aligned}
& \left\|f*g\right\|_w \\
= \quad & \left\|(f-f_n+f_n)*(g-g_n+g_n)\right\|_w \\
= \quad & \left\|(f-f_n)*(g-g_n) \ + \ (f-f_n)*g_n+f_n*(g-g_n)+f_n*g_n\right\|_w \\
\leq \quad & \left\|(f-f_n)*(g-g_n)\right\|_w+\left\|(f-f_n)*g_n\right\|_w+\left\|f_n*(g-g_n)\right\|_w+\left\|f_n*g_n\right\|_w \\
\leq \quad & \left\|(f-f_n)*(g-g_n)\right\|_w+\left\|(f-f_n)*g_n\right\|_w+\left\|f_n*(g-g_n)\right\|_w \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +C(G_1,w_1)C(G_2,w_2)\|f_n\|_w\|g_n\|_w \\
\leq \quad & \left\|(f-f_n)*(g-g_n)\right\|_w+\left\|(f-f_n)*g_n\right\|_w+\left\|f_n*(g-g_n)\right\|_w \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +C(G_1,w_1)C(G_2,w_2)\|f\|_w\|g\|_w \\
\xrightarrow[n\to\infty]{} \quad & C(G_1,w_1)C(G_2,w_2)\|f\|_w\|g\|_w.
\end{aligned}
$$

Cela achève la démonstration du résultat annoncé. □

Nous avons vu au théorème 7.3 que, pour un choix approprié de $n \geq 2$ de $t > 1$, on peut faire en sorte que le ratio $\frac{C(\mathbb{Z}_n,w)}{C_2(\mathbb{Z}_n,w)}$ soit aussi petit que désiré. Autrement dit, on peut faire en sorte que $C(\mathbb{Z}_n, w)$ soit négligeable comparativement à $C_2(\mathbb{Z}_n, w)$. Le théorème 7.7 nous permet d'apporter une modeste amélioration à ce résultat : nous montrerons qu'il existe un groupe pondéré fini pour lequel l'indice de $*$-stabilité est non seulement arbitrairement petit relativement à l'indice de sous-convolutivité, mais également arbitrairement petit dans l'absolu.

Proposition 7.10. *Quels que soient $\epsilon < 1$ et $M > \sqrt{2}$, il existe un groupe pondéré (G, w) satisfaisant*

$$C(G,w) < \epsilon \qquad \text{et} \qquad M = C_2(G,w).$$

Démonstration.

- Considérons la pondération $w_1 : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ définie par $w_1(0) = w_1(1) := 1$ et $w_1(2) = t \geq 1$. Par le théorème 7.3 on a que $C_2(\mathbb{Z}_3, w_1) = \sqrt{2+t^2}$. Choisissons t de sorte que

$$M \ = \ C_2(\mathbb{Z}_3, w_1).$$

- Considérons la pondération $w_2 : \mathbb{Z}_2 \to (0,\infty)$ définie par $w_2(0) := \sqrt{2}$ et $w_2(1) = 2$. On vérifie par un calcul direct que $C(\mathbb{Z}_2, w_2) < 1 = C_2(\mathbb{Z}_2, w_2)$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$C(\mathbb{Z}_2, w_2)^n \ \leq \ \frac{\epsilon}{2M}.$$

- Posons $G := \mathbb{Z}_3 \times \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2\right)$ et définissons $w : G \to (0,\infty)$ par

$$w(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) := \ w_1(x_1)w_2(x_2)w_2(x_3)\cdots w_2(x_{n+1}).$$

En appliquant le théorème 7.7 à n reprises, on trouve d'une part

$$C(G,w) \;=\; C(\mathbb{Z}_3,w_1)C(\mathbb{Z}_2,w_2)^n \;\leq\; M\cdot\frac{\epsilon}{2M} \;<\; \epsilon$$

et d'autre part

$$C_2(G,w) \;=\; C_2(\mathbb{Z}_3,w_1)C_2(\mathbb{Z}_2,w_2)^n \;=\; M\cdot 1^n. \qquad \square$$

Chapitre 8

Conclusion

Pour conclure, nous formulerons quelques remarques concernant le contenu de la dernière partie de la présente thèse. De plus, nous décrirons brièvement quelques pistes à explorer pour tenter de résoudre le problème principal.

8.1 Groupes abéliens de type fini

À la section 7.3 nous avons mis à profit le théorème de structure pour les groupes abéliens finis afin de réduire le problème consistant à calculer les indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité d'un groupe abélien d'ordre fini quelconque à des problèmes analogues sur des groupes cycliques finis.

Une approche similaire reposant sur l'utilisation du théorème de structure pour les groupes abéliens *de type fini* – une généralisation du théorème de structure pour les groupes abéliens *finis* démontrée par Henri Poincaré – permet cette fois de réduire le difficile problème consistant à calculer les indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité d'un groupe abélien de type fini et d'ordre infinie à un problème analogue (plus accessible, mais encore non résolu) sur $\mathbb{Z}$, l'unique[1] groupe cyclique d'ordre infini.

Théorème 8.1. *Étant donné G un groupe abélien de type fini, il existe un unique entier $r \geq 0$ et une unique suite d'entiers $n_1, n_2, ..., n_k \geq 2$ pour lesquels on a l'isomorphisme*

$$G \;\simeq\; \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$$

avec la condition supplémentaire suivante : n_{i+1} divise n_i pour tout i entre 1 et $k-1$.

Démonstration. Voir la section 12.1 de [10]. □

1. À isomophisme près.

Proposition 8.2. *S'il existe une pondération $w : \mathbb{Z} \to (0, \infty)$ pour laquelle $C(\mathbb{Z}, w) < \infty$ et $C_2(\mathbb{Z}, w) = \infty$, alors tout groupe abélien de type fini G d'ordre infini admet une pondération $\widetilde{w}$ satisfaisant $C(G, \widetilde{w}) < \infty$ et $C_2(G, \widetilde{w}) = \infty$.*

Démonstration. En vertu du théorème 8.1, on a

$$G \;\simeq\; \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$$

pour un certain entier $r > 0$ et une certaine suite d'entiers $n_1, n_2, ..., n_k \geq 2$. C'est donc dire qu'un élément générique de G est de la forme $(x_1, x_2, ..., x_r, y_1, y_2, ..., y_k)$ où $x_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $y_j \in \mathbb{Z}_{n_j}$ pour $1 \leq j \leq k$.

Considérons la fonction $\widetilde{w} : G \to (0, \infty)$ définie comme suit :

$$\widetilde{w}(x_1, x_2, ..., x_r, y_1, y_2, ..., y_k) := \prod_{i=1}^{r} w(x_i).$$

Le théorème 7.7 implique alors que

$$C(G, v) \;=\; \prod_{i=1}^{r} C(\mathbb{Z}, w) \prod_{j=1}^{k} C(\mathbb{Z}_{n_k}, \mathbf{1}) \;<\; \infty$$

et

$$C_2(G, v) \;=\; \prod_{i=1}^{r} C_2(\mathbb{Z}, w) \prod_{j=1}^{k} C_2(\mathbb{Z}_{n_k}, \mathbf{1}) \;=\; \infty. \qquad \square$$

Certes, la proposition 8.1 ne nous rapproche pas d'une solution générale au problème principal, mais elle ajoute à l'intérêt de résoudre le cas particulier du groupe additif $\mathbb{Z}$ – le groupe autour duquel s'est concentré notre intérêt – car sa résolution par la négative entraînerait automatiquement celle du problème analogue sur tous les autres groupes de type fini.

8.2 Application aux sommes directes de groupes finis

Contrairement à ce que la notation peut sembler indiquer, le lien est plutôt ténu entre le comportement des indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité sur $\mathbb{Z}$ et ceux sur les groupes $\mathbb{Z}_n$. Il est en effet tout sauf évident d'entrevoir comment des pondérations sur des groupes cycliques finis pourraient être concaténées ou adaptées de sorte à obtenir une pondération sur le groupe $\mathbb{Z}$ dont l'indice de $*$-stabilité serait fini et l'indice de sous-convolutivité serait infini.

D'ailleurs, la compacité des groupes cycliques finis suggère qu'il est peut-être plus approprié de se représenter mentalement les groupes $\mathbb{Z}_n$ comme des approximations discrètes (de plus en plus fidèle à mesure qu'on fait croître n) du groupe circulaire $\mathbb{T} := \big\{ z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1 \big\}$ plutôt que comme des approximations finies de $\mathbb{Z}$. Or, comme nous l'avons vu à l'exemple 1.4, il est déjà établi qu'il existe des pondérations sur $\mathbb{T}$ pour lesquelles l'indice de $*$-stabilité est fini mais pas l'indice de sous-convolutivité.

Dès lors, l'étude des groupes cycliques finis que nous avons entrepris au chapitre 6 ne revient-elle pas à enfoncer une porte ouverte ? Pas tout à fait.

Dans cette section nous donnerons les grandes lignes d'une approche consistant à mettre à profit la connaissance acquise au sujet des indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité des groupes abéliens discrets finis pour concevoir des pondérations sur certains groupes abéliens discrets dénombrables, mais *de type infini*.

8.2.1 Produits directs et sommes directes de groupes

Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement deux façons élémentaires de construire des groupes d'ordre infini à partir de groupes finis.

Définition 8.1. Soit $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de groupes non triviaux.

(i) Le *produit direct* des G_i, qu'on désigne par $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}} G_i$, est le groupe dont les éléments sont les fonctions $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} G_i$ ayant la propriété que $f(i) \in G_i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$ et dont la loi de composition interne est définie ponctuellement.

(ii) La *somme directe* des G_i, notée $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} G_i$, est le groupe dont les éléments sont les fonctions $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} G_i$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes :

(a) $f(i) \in G_i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$;

(b) $f(i) = e_i$ pour tout $i \in \mathcal{I}$ sauf possiblement pour un nombre fini d'entre eux ;

et dont la loi de composition interne est définie ponctuellement.

Lorsque l'index $\mathcal{I}$ est fini alors les notions de produit direct et de somme direct des G_i coïncident. Par contre, lorsque l'index $\mathcal{I}$ est infini alors le produit direct des G_i et la somme directe de G_i sont deux groupes aux propriétés substantiellement différentes.

La première différence notable concerne l'ordre de ces groupes : indépendamment de l'ordre des G_i, le groupe $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}} G_i$ est *toujours* indénombrable tandis que le groupe $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} G_i$, lui, est d'ordre dénombrable si et seulement si tous les G_i sont au plus dénombrables.

On peut déduire du théorème 4.7 que $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}} G_i$ n'admet aucune pondération pour laquelle l'indice de $*$-stabilité est fini. De même, si l'un des G_i est indénombrable alors on peut exclure l'existence de pondération sur $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} G_i$ pour laquelle l'indice de $*$-stabilité est fini. Toutefois, si tous les G_i sont au plus dénombrable alors le théorème 4.7 implique qu'il existe des pondérations sur $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} G_i$ pour lesquelles l'indice de $*$-stabilité est fini.

Nous présenterons, en terminant, deux types de pondérations sur des sommes directes de groupes finis et tenterons de déterminer dans quelle mesure celles-ci sont dignes d'intérêt dans la poursuite de la tentative de résolution du problème qui nous a occupé tout au long de cette thèse.

8.2.2 Pondérations de type « produit ponctuel »

Étant donné $\big\{(G_n, w_n)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini, un prototype de pondération sur $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$, que nous pourrions appeler *pondération de type « produit ponctuel »*, s'impose à l'esprit : à savoir $w(x) \sim \prod_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n)$ à supposer que ce produit soit bien défini pour tout $x \in G$ et qu'il ne soit jamais nul, de sorte que w soit une fonction de G à image dans $(0, \infty)$.

Puisqu'un élément générique $x := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in G$ vérifie $x_n = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf possiblement un nombre fini d'entre eux, la seule façon de s'assurer que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n)$ ait du sens et qu'il soit non nul est d'avoir $w_n(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sauf possiblement un nombre fini d'entres eux). Mais cette obligation est lourde de conséquences :

Théorème 8.3. *Soit $\big\{(G_n, w_n)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini où $w_n(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ et définissons $w : G \to (0, \infty)$ par $w(x) := \prod_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n)$. Alors, quel que soit le sous-ensemble fini $\{n_1, n_2, ..., n_k\} \subseteq \mathbb{N}$, on a :*

$$C(G, w) \;\geq\; \prod_{i=1}^{k} C(G_{n_i}, w_{n_i}).$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, considérons des fonctions $f_{n_i}, g_{n_i} \in \ell_2(G_{n_i}, w_{n_i})$ quelconque et définissons $f, g : G \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$f(x) := \prod_{i=1}^{k} f_{n_i}(x_{n_i}) \qquad \text{et} \qquad g(x) := \prod_{i=1}^{k} g_{n_i}(x_{n_i}).$$

Ainsi définies, les fonctions f et g satisfont :

$$\|f\|_w^2 \;=\; \prod_{i=1}^{k} \|f_{n_i}\|_{w_{n_i}}^2 \qquad \text{et} \qquad \|g\|_w^2 \;=\; \prod_{i=1}^{k} \|g_{n_i}\|_{w_{n_i}}^2.$$

On vérifie par la suite que

$$
\begin{aligned}
&\left\|f*g\right\|_w^2\\
=\ & \sum_{x\in G}\left|\sum_{y\in G} f(x)g(x)\right|^2 w(x)^2\\
=\ & \sum_{x_{n_1}\in G_{n_1}}\cdots\sum_{x_{n_k}\in G_{n_k}}\left|\sum_{y_{n_1}\in G_{n_1}}\cdots\sum_{y_{n_k}\in G_{n_k}} f_{n_1}(y_{n_1})\cdots f_{n_k}(y_{n_k})g_{n_1}\left(y_{n_1}^{-1}x_{n_1}\right)\cdots g_{n_k}\left(y_{n_k}^{-1}x_{n_k}\right)\right|^2\\
&\qquad\qquad\cdot w_{n_1}(x_{n_1})^2\cdots w_{n_k}(x_{n_k})^2\\
=\ & \sum_{x_{n_1}\in G_{n_1}}\cdots\sum_{x_{n_k}\in G_{n_k}}\left|\left(\sum_{y_{n_1}\in G_{n_1}} f_{n_1}(y_{n_1})g_{n_1}(y_{n_1}^{-1}x_{n_1})\right)\cdots\left(\sum_{y_{n_k}\in G_{n_k}} f_{n_k}(y_{n_k})g_{n_k}(y_{n_k}^{-1}x_{n_k})\right)\right|^2\\
&\qquad\qquad\cdot w_{n_1}(x_{n_1})^2\cdots w_{n_k}(x_{n_k})^2\\
=\ & \sum_{x_{n_1}\in G_{n_1}}\cdots\sum_{x_{n_k}\in G_{n_k}}\left|(f_{n_1}*g_{n_1})(x_{n_1})\cdots(f_{n_k}*g_{n_k})(x_{n_k})\right|^2 w_{n_1}(x_{n_1})^2\cdots w_{n_k}(x_{n_k})^2\\
=\ & \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{x_{n_i}\in G_{n_i}}\left|(f_{n_i}*g_{n_i})(x_{n_i})\right|^2 w_{n_i}(x_{n_i})^2\right)\\
=\ & \prod_{i=1}^{k}\left\|f_{n_i}*g_{n_i}\right\|_{w_{n_i}}^2.
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
&C(G,w)^2\\
=\ & \sup\left\{\frac{\left\|f*g\right\|_w^2}{\|f\|_w^2\|g\|_w^2}\ :\ f,g\in\ell_2(G,w)\right\}\\
\geq\ & \sup\left\{\frac{\left\|f*g\right\|_w^2}{\|f\|_w^2\|g\|_w^2}\ :\ f(x):=\prod_{i=1}^{k} f_{n_i}(x_{n_i}),\quad g(x):=\prod_{i=1}^{k} g_{n_i}(x_{n_i}),\quad f_{n_i},g_{n_i}\in\ell_2(G_{n_i},w_{n_i})\right\}\\
=\ & \sup\left\{\frac{\prod_{i=1}^{k}\left\|f_{n_i}*g_{n_i}\right\|_{w_{n_i}}^2}{\prod_{i=1}^{k}\|f_{n_i}\|_{w_{n_i}}^2\prod_{i=1}^{k}\|g_i\|_{w_i}^2}\ :\ f_{n_i},g_{n_i}\in\ell_2(G_{n_i},w_{n_i})\right\}\\
=\ & \prod_{i=1}^{k}\sup\left\{\frac{\left\|f_{n_i}*g_{n_i}\right\|_{w_{n_i}}^2}{\|f_{n_i}\|_{w_{n_i}}^2\|g_{n_i}\|_{w_{n_i}}^2}\ :\ f_{n_i},g_{n_i}\in\ell_2(G_{n_i},w_{n_i})\right\}\\
=\ & \prod_{i=1}^{k} C(G_{n_i},w_{n_i})^2
\end{aligned}
$$

comme voulu. $\square$

Corollaire 8.4. *L'indice de $*$-stabilité de toute pondération de type « produit ponctuel » sur la somme directe d'une famille infinie de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini est infini.*

Démonstration. Soit $\big\{(G_n, w_n)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes abéliens discrets pondérés d'ordre fini. Posons $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ et définissons $w : G \to (0,\infty)$ par $w(x) := \prod_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n)$.

Il découle de la proposition 6.9 que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $C(G_n, w_n) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Par conséquent, quel que soit $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$C(G,w) \ \geq \ \prod_{i=1}^{k} \frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty. \qquad \square$$

Ayant exclu la possibilité de définir une pondération sur $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ dont l'indice de $*$-stabilité serait fini en considérant simplement le produit ponctuel de pondérations sur les G_n, on est forcé de se rabattre sur des constructions plus complexes. Ce faisant, les chances de pouvoir établir un résultat analogue au théorème 8.3 établissant une relation entre $C(G,w)$ et les $C(G_n, w_n)$ s'amenuisent à mesure que la construction de la pondération $w : G \to (0,\infty)$ se fait complexe. On risque donc d'être une fois de plus confronté à des groupes pondérés pour lesquels nous ne disposons d'aucun outil permettant de déterminer si l'indice de $*$-stabilité est fini ou non.

8.2.3 Pondérations de type « supremum »

Étant donné $\big\{(G_n, w_n)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes pondérés d'ordre fini, on appelle *pondération de type « supremum »* sur $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ le prototype de pondération défini par $w(x) \sim \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n)$, à supposer, bien entendu, que ce supremum existe pour tout $x := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in G$.

La proposition suivante montre que, contrairement aux pondérations de type « produit ponctuel », les pondérations de type « supremum » peuvent donner lieu à un indice de $*$-stabilité fini.

Proposition 8.5. *Étant donné $\big\{G_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes abéliens discrets d'ordre fini, on définit inductivement des pondérations w_n sur G_n comme suit :*

$$w_n(y) := \begin{cases} 1, & si\ y = e_n, \\ (n+1)\left(\big(|G_n|-1\big)\prod_{i=1}^{n-1}|G_i|\right)^{1/2}, & sinon. \end{cases}$$

Considérons le groupe $G := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ et la pondération sur G définie par $w(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n)$. Alors on a $C_2(G,w) < \infty$.

Démonstration. On vérifie sans difficulté que w est une fonction paire satisfaisant

$$w(xy) \;\leq\; w(x) + w(y), \qquad\qquad \forall x, y \in G.$$

Par conséquent, le théorème 4.8 implique que

$$C_2(G,w)^2 \;<\; \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} \;<\; \infty.$$

Or, cette série peut être calculée explicitement :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in G} \frac{1}{w(x)^2} \;&=\; 1 + \sum_{\substack{x \in G \\ x \neq e}} \frac{1}{w(x)^2} \\
&=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((|G_n| - 1) \prod_{i=1}^{n-1} |G_n| \right)}{\left((n+1) \left((|G_n| - 1) \prod_{i=1}^{n-1} |G_i| \right)^{1/2} \right)^2} \\
&=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Or cette dernière série converge. $\square$

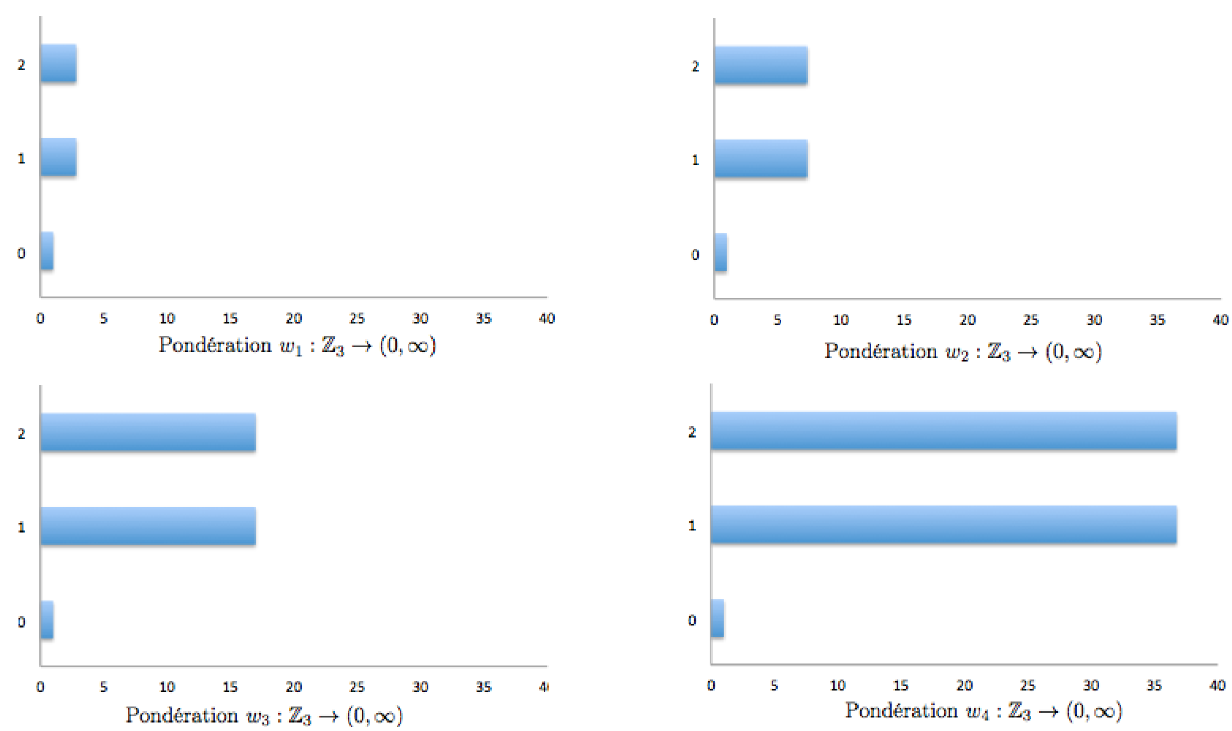

FIGURE 8.1 – Représentation des pondérations $w_n : \mathbb{Z}_3 \to (0,\infty)$ définies suivant la définition donnée à la proposition 8.5 pour $n = 1, 2, 3, 4$

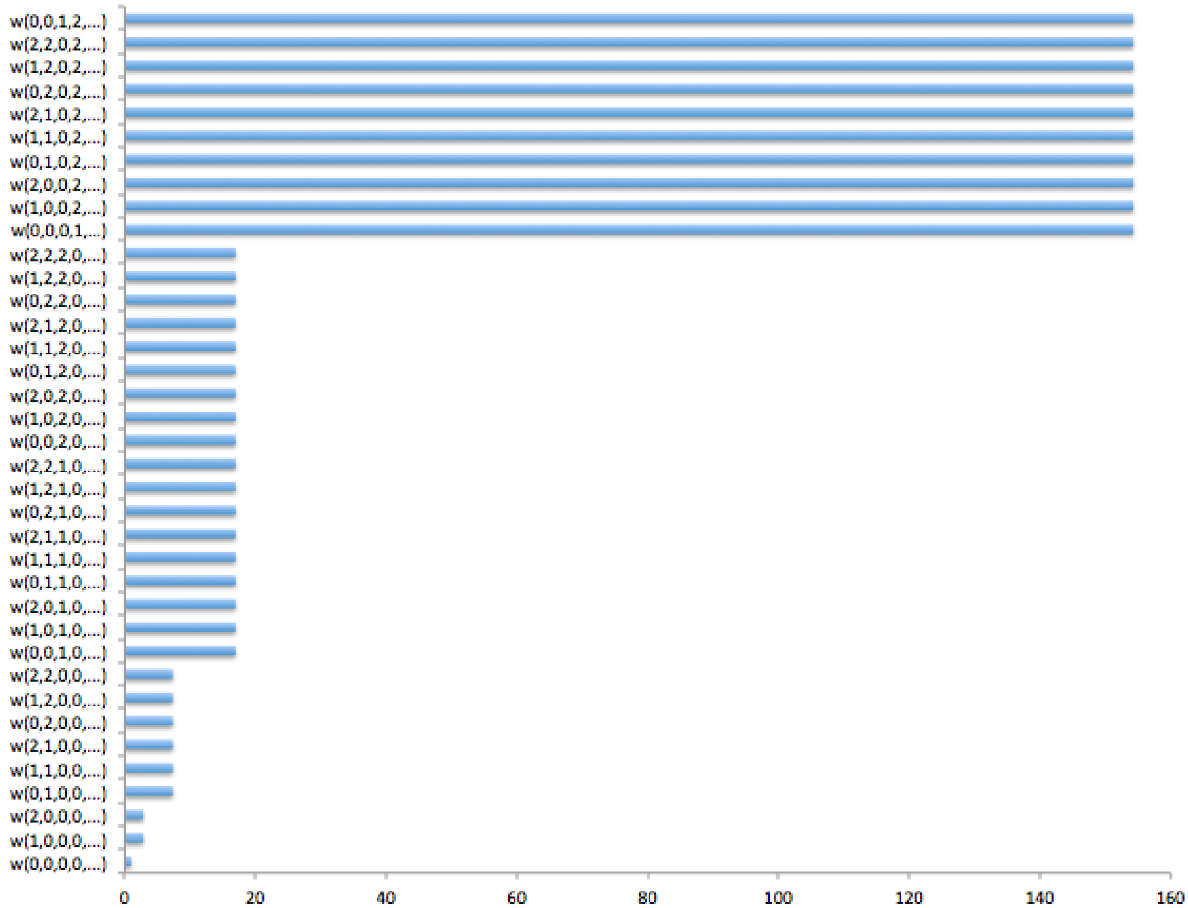

FIGURE 8.2 – Représentation d'une pondération de type « supremum » suivant la définition donnée à la proposition 8.5, où les pondérations w_n sont celles illustrées à la figure 8.3

La pondération construite à la proposition 8.5 ne permet pas de résoudre le problème principal puisqu'elle donne lieu à des indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité qui sont tous deux finis. Quoi qu'il en soit, la proposition 8.5 autorise un optimisme prudent : si une construction aussi rudimentaire a permis de produire une pondération dont l'indice de $*$-stabilité est fini, peut-être est-il possible d'affiner notre démarche jusqu'à l'obtention d'une pondération dont l'indice de sous-convolutivité sera infini.

On retient du théorème 4.8 que si l'on veut espérer réaliser la désolidarisation des indices de $*$-stabilité et de sous-convolutivité (c'est-à-dire parvenir à faire en sorte que le premier soit fini, mais pas le second) alors il faut axer notre recherche du côté des pondérations violant la condition de Pytlik suivante :

$$w(xy) \;\leq\; M\Big(w(x)+w(y)\Big), \qquad\qquad (x,y\in G).$$

L'exemple suivant montre avec quelle facilité on peut concevoir une pondération de type « supremum » qui ne vérifie pas la condition de Pytlik et dont l'indice de sous-convolutivité est infini.

Exemple 8.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $G_n := \mathbb{Z}_3$. Définissons inductivement les pondérations $w_n : G_n \to (0, \infty)$ comme suit :

— Cas $n = 1$. On pose $w_1(0) = 1$, $w_1(1) = 2^2$ et $w_1(2) = 2^4$.

— Cas $n > 1$. On pose $w_n(0) = 1$, $w_n(1) = 2w_{n-1}(2)\sqrt{3^{n-1}}$ et $w_n(2) = w_n(1)^2$.

On pose ensuite $G := \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$ et $w : G \to (0, \infty)$ par $w(x_1, x_2, ...) := \sup_{n \in \mathbb{N}} w_n(x_n)$.

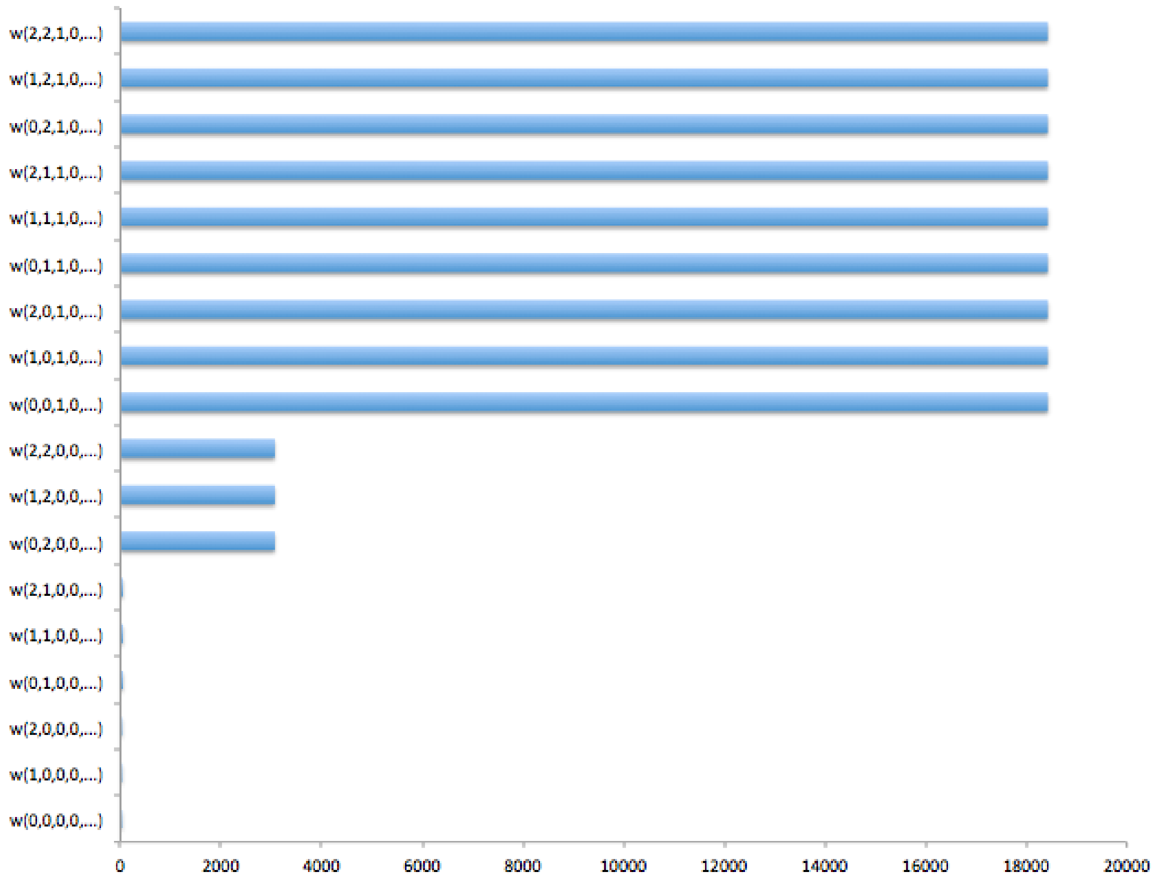

Figure 8.3 – Représentation de la pondération de type « supremum » définie à l'exemple 8.1

Ainsi définie, la pondération w jouit des propriétés suivantes :

- Violation de la condition de Pytlik. Quel que soit $M > 0$, prenons k un entier satisfaisant $k > M$ et considérons l'élément $x \in G$ suivant :

$$x := (\underbrace{0,0,0,....,0}_{k-1 \text{ fois}},1,0,0,...). \tag{8.1}$$

  On a

$$w(x+x) \;=\; w_k(2) \;=\; w_k(1)^2 \;\geq\; 2kw_k(1) \;>\; 2Mw_k(1) \;=\; M\Big(w(x)+w(x)\Big).$$

- Infinitude de l'indice de sous-convolutivité. Considérons pour s'en convaincre les éléments de G de la forme

$$x^{(k)} := (\underbrace{0,0,0,....,0}_{k-1 \text{ fois}},2,0,0,...)$$

  de même que les sous-ensembles de G suivants

$$Y^{(k)} := \Big\{y \in G: \; y_k = 1, \quad y_n = 0 \;\; \forall n > k\Big\}.$$

  On vérifie aisément que pour tout $y \in Y^{(k)}$ on a que $x^{(k)} - y \in Y^{(k)}$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{y\in G} \frac{w(x^{(k)})^2}{w(y)^2 w(x^{(k)}-y)^2} \;&\geq\; \sum_{y\in Y^{(k)}} \frac{w(x^{(k)})^2}{w(y)^2 w(x^{(k)}-y)^2}\\ &=\; \sum_{y\in Y^{(k)}} \frac{w_k(2)^2}{w_k(1)^4}\\ &\geq\; 3^{k-1}\frac{w_k(2)^2}{w_k(1)^4}\\ &=\; 3^{k-1}\frac{w_k(1)^4}{w_k(1)^4}\\ &=\; 3^{k-1}.\end{aligned}$$

  Ainsi

$$C_2(G,w)^2 \;=\; \sup_{x\in G}\left(\sum_{y\in G}\frac{w(x_n)^2}{w(y)^2w(x_n-y)^2}\right) \;\geq\; \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{y\in G}\frac{w(x^{(n)})^2}{w(y)^2w(x^{(n)}-y)^2}\right) \;\geq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} 3^{n-1}.$$

- Satisfaction de la condition nécessaire vue au théorème 4.4 : En considérant tous les quelques cas de figure possibles (un nombre assez restreint vu la façon dont w est définie) que

$$\sup\left\{\frac{w(xy)}{w(x)w(y)} \;:\; x,y\in G\right\} \;\leq\; 1.$$

- Satisfaction de la condition nécessaire vue au théorème 4.5. Considérons un élément de la forme $x \in G$ de la forme $x = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, 1, 0, 0, ...)$. Alors

$$w(x) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n) \;=\; w_k(1) \;=\; 2w_{k-1}(2)\sqrt{3^{k-1}}$$

et

$$w(x^{-1}) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n(x_n) \;=\; w_k(2) \;=\; w_k(1)^2 \;\geq\; w_k(1) \;=\; 2w_{k-1}(2)\sqrt{3^{k-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;\leq\; \frac{1}{4(k+1)^2\cdot 3^{k-1}}. \tag{8.2}$$

Or, le groupe G comporte exactement $2\cdot 3^{k-1}$ éléments dont la plus grande composante non nulle est la k-ième et ceux-ci satisfont tous l'inégalité (8.2). Ainsi, la somme des quotients $\frac{1}{w(x)w(x^{-1})}$ pour tout ces x est bornée par $\frac{1}{(k+1)^2}$ et il s'ensuit que

$$\sum_{x\in G}\frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;=\; \frac{1}{w(0)^2} + \sum_{x\in G\setminus\{0\}}\frac{1}{w(x)w(x^{-1})} \;\leq\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \;<\; \infty.$$

Puisque la pondération construite à l'exemple qui précède satisfait toutes les conditions nécessaires à la finitude de l'indice de $*$-stabilité ayant été mentionnées dans cette thèse, nous ne sommes pas en mesure d'exclure d'emblée la possibilité que son indice de $*$-stabilité soit fini. Néanmoins, comme l'unique majoration dont on dispose pour estimer $C(G, w)$ - à savoir l'indice de sous-convolutivité $C_2(G, w)$ - est infini, nous sommes également incapables d'exclure la possibilité que son indice de $*$-stabilité soit infini [2].

2. Yulia Kuznetsova a récemment montré – par une approche *ad hoc* – que l'indice de $*$-stabilité du groupe pondéré défini à l'exemple 8.1 est infini, mais il n'en demeure pas moins que cet exemple illustre de façon patente l'écart qui subsiste entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes connues à ce jour. Ce faisant, il souligne l'importance d'identifier de nouveaux estimés pour $C(G, w)$, possiblement au moyen de la théorie des espaces de Hilbert à noyau reproduisant, ou encore au moyen de la caractérisation en termes de normes d'opérateurs développée dans la seconde partie de cette thèse, voire en reformulant le problème d'un toute autre manière.

Annexe A

Séries, cardinalité et convergence

Proposition A.1. *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble infini (pas nécessairement dénombrable) et soit $\{x_\iota\}_{\iota\in\mathcal{I}}$ une famille de nombres réels positifs ou nuls. Si la série $\sum_{\iota\in\mathcal{I}} x_\iota$ converge alors $x_\iota = 0$ pour tout $\iota \in \mathcal{I}$ sauf possiblement pour un nombre au plus dénombrable d'entre eux.*

Démonstration. Posons $M := \sum_{\iota\in\mathcal{I}} x_\iota$ et définissons

$$S_n := \left\{\iota \in \mathcal{I} :\ x_\iota > \frac{1}{n}\right\}, \qquad (n > 0).$$

Quel que soit l'entier $n > 0$, on a

$$M \ \geq\ \sum_{\iota\in S_n} x_\iota \ \geq\ \sum_{\iota\in S_n} \frac{1}{n} \ =\ \frac{|S_n|}{n}.$$

Il s'ensuit que $|S_n| \leq nM$. Par conséquent, l'ensemble

$$\{\iota \in \mathcal{I} :\ x_\iota > 0\} \ =\ \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

est au plus dénombrable. □

Corollaire A.2. *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble indénombrable. Si $\{x_\iota\}_{\iota\in\mathcal{I}}$ est une collection de nombres réels strictement positifs alors la série $\sum_{\iota\in\mathcal{I}} x_\iota$ diverge.*

Annexe B

Prolongements linéaires continus

Théorème B.1. *Soient X un espace vectoriel normé, Y un espace de Banach et $D \subseteq X$. Étant donné une application linéaire continue $T : D \to Y$, il existe une unique application linéaire continue $\widetilde{T} : \overline{D} \to Y$ qui prolonge T, au sens où $\widetilde{T} \restriction D \equiv T$ et $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Démonstration. Étant donné $x \in \overline{D}$, il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de D vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Comme T est une application linéaire continue, on a

$$\big\|T(x_n) - T(x_m)\big\|_Y \;=\; \big\|T(x_n - x_m)\big\|_Y \;\leq\; \|T\|\|x_n - x_m\|_X, \qquad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Cela signifie que $\big\{T(x_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans Y. Comme cet espace est complet, on conclut que cette suite converge vers une limite et on pose alors $\widetilde{T}(x)$ comme étant cette limite.

Notons que la fonction $\widetilde{T}$ est bien définie, car si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ désignent deux suites distinctes convergeant vers $x \in \overline{D}$, alors les suites $\big\{T(x_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ et $\big\{T(z_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ convergent elles aussi vers une même limite dans Y puisque ces deux suites sont des sous-suites de la suite convergente $\big\{T(v_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$, où $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ désigne la suite $(x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, v_3 ...)$.

On vérifie aisément que l'application $\widetilde{T}$ est linéaire et qu'elle vérifie $\widetilde{T}(x) = T(x)$ pour tout $x \in D$. Il reste à montrer que la norme de $\widetilde{T}$ coïncide avec celle de T. Pour ce faire, on met dans un premier temps à profit la continuité de l'application $x \mapsto \|x\|$ et on laisse n tendre vers l'infini dans l'inégalité suivante

$$\|T(x_n)\|_Y \;\leq\; \|T\|\|x_n\|_X$$

afin d'obtenir

$$\|\widetilde{T}(x)\|_Y \;\leq\; \|T\|\|x\|_X, \qquad (x \in X).$$

Il s'ensuit alors que $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. L'inégalité inverse, elle, est évidente, car

$$\|\widetilde{T}\| \;=\; \sup_{\substack{x\in\overline{D}\\ x\neq 0_X}} \frac{\|\widetilde{T}(x)\|}{\|x\|} \;\geq\; \sup_{\substack{x\in D\\ x\neq 0_X}} \frac{\|\widetilde{T}(x)\|}{\|x\|} \;=\; \sup_{\substack{x\in D\\ x\neq 0_X}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \;=\; \|T\|. \qquad \square$$

Annexe C

Hiérarchie des espaces $\mathscr{L}_p$

Théorème C.1. *Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace mesuré où* μ *désigne une mesure positive. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\mathcal{L}_r(X, \mathscr{A}, \mu) \subseteq \mathcal{L}_s(X, \mathscr{A}, \mu)$ *pour tous les indices* r *et* s *satisfaisant* $1 \leq r < s \leq \infty$ *et cette inclusion est continue ;*

(ii) $m > 0$ *où* $m := \inf \Big\{ \mu(A) : \quad A \in \mathscr{A},\ A \neq \emptyset \Big\}$.

Démonstration. Voir le théorème 1 de [50]. □

Comme nous le verrons, dans le cas particulier où μ désigne la mesure de dénombrement, l'inclusion continue dont le théorème C.1 fait mention se révèle être un plongement de constante de distorsion 1. Pour démontrer ce cas particulier, nous aurons besoin du lemme qui suit.

Lemme C.2. *Pour toute suite de nombres complexes* $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *et tout* $\alpha \in (0, 1]$ *on a*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \right)^{\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{\alpha}.$$

Démonstration. Il suffit de constater que

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \right)^{\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{\alpha} & \\
\iff \quad & \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n| \right)^{\alpha} \leq \sum_{n=1}^{N} |c_n|^{\alpha}, & (N \in \mathbb{N}) \\
\iff \quad & \big(x + y \big)^{\alpha} \leq x^{\alpha} + y^{\alpha}, & (x, y \geq 0) \\
\iff \quad & (1 + t)^{\alpha} \leq 1 + t^{\alpha}, & (0 < t < 1).
\end{aligned}$$

Or, le dernier terme de cette chaîne d'équivalence est aisément vérifié en utilisant des techniques d'analyse élémentaire. □

Proposition C.3. *Pour tout groupe discret G et tous les indices r et s satisfaisant $1 \leq r < s \leq \infty$ on a $\ell_r(G) \subseteq \ell_s(G)$ et $\|f\|_r \geq \|f\|_s$.*

Démonstration.

- CAS OÙ $s < \infty$. Notons que $\mathrm{supp}(f) := \big\{x \in G : \ f(x) \neq 0\big\}$ est un ensemble au plus dénombrable. Soit $\{x_1, x_2, ...\}$ une énumération des éléments de $\mathrm{supp}(f)$. Sous l'hypothèse voulant que $\frac{r}{s} < 1$, le lemme qui précède implique directement que

$$\|f\|_s \ = \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(x_n)\big|^s\right)^{r/rs} \ \leq \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(x_n)\big|^{s(r/s)}\right)^{1/r} \ = \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(x_n)\big|^r\right)^{1/r} \ = \ \|f\|_r.$$

- CAS OÙ $s = \infty$. Quel que soit $f \in \ell_\infty(G)$, on a

$$\|f\|_\infty^r \ = \ \sup_{x \in G} |f(x)|^r \ \leq \ \sum_{x \in G} |f(x)|^r \ = \ \|f\|_r^r. \qquad \square$$

Théorème C.4. *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, où μ est une mesure positive. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\mathcal{L}_r(X, \mathscr{A}, \mu) \supseteq \mathcal{L}_s(X, \mathscr{A}, \mu)$ *pour tous les indices r et s satisfaisant $1 \leq r < s \leq \infty$ et cette inclusion est continue ;*

(ii) $M < \infty$ *où* $M := \sup\Big\{\mu(A) : \quad A \in \mathscr{A}\Big\}$.

Démonstration. Voir le théorème 2 de [50]. $\square$

Lorsque X est un ensemble fini muni de la mesure de dénombrement, la constante de distorsion de l'inclusion dont fait état le théorème C.4 peut être déterminé avec exactitude comme en fait foi la proposition suivante.

Proposition C.5. *Pour tout groupe discret fini G et tous les indices r et s satisfaisant $1 \leq r < s \leq \infty$, on a*

$$\|f\|_r \ \leq \ |G|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|f\|_s.$$

Démonstration.

- CAS OÙ $s < \infty$. D'une part, par l'inégalité de Hölder appliquée à la fonction $\big|f(x)\big|^r$ avec les exposants conjugués $\frac{s}{r}$ et $\frac{s}{(s-r)}$, on a :

$$\begin{aligned} \|f\|_r^r \ &= \ \sum_{x \in G} \big|f(x)\big|^r \\ &\leq \ \left(\sum_{x \in G} 1\right)^{(s-r)/s} \left(\sum_{x \in G} \big|f(x)\big|^{r \cdot \frac{s}{r}}\right)^{r/s} \\ &= \ |G|^{1 - \frac{r}{s}} \cdot \|f\|_s^r. \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction $g \equiv 1$ permet de s'assurer de l'optimalité de la constante $|G|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}$.

- Cas où $s = \infty$. Quel que soit $f \in \ell_\infty(G)$, on a

$$\|f\|_r^r \;=\; \sum_{x \in G} |f(x)|^r \;\leq\; |G| \cdot \sup_{x \in G} |f(x)|^r \;=\; |G| \cdot \|f\|_\infty^r. \qquad \square$$

Annexe D

Algèbres et sous-multiplicativité

Définition D.1. Une *algèbre* est un espace vectoriel A muni d'une *multiplication*, c'est-à-dire d'une fonction

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. Bilinéarité. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et tout $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ on a

$$\begin{aligned} (\lambda a_1 + \mu a_2)b &= \lambda(a_1 b) + \mu(a_2 b) \\ a(\lambda b_1 + \mu b_2) &= \lambda(ab_1) + \mu(ab_2); \end{aligned}$$

2. Associativité. Pour tout $a, b, c \in A$ on a

$$a(bc) = (ab)c.$$

Définition D.2. Une algèbre A est dite *unifère* s'il existe un élément non nul $\mathbf{1}_A \in A$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. Absorbance à gauche. $\mathbf{1}_A a = a$ pour tout $a \in A$.
2. Absorbance à droite. $a\mathbf{1}_A = a$ pour tout $a \in A$.

Définition D.3. Soit A une algèbre. Une norme d'espace vectoriel $\|\cdot\| : A \to [0, \infty)$ est dite :

1. *Sous-multiplicative* si

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \qquad (a, b \in A).$$

2. *C-faiblement sous-multiplicative* si

$$\|ab\| \leq C\|a\|\|b\|, \qquad (a, b \in A).$$

Définition D.4. Soit A une algèbre.

1. Une *norme d'algèbre* sur A est une norme d'espace vectoriel $\|\cdot\| : A \to [0, \infty)$ qui est sous-multiplicative.

2. Une *algèbre normée* est une paire $\big(A, \|\cdot\|\big)$, où A désigne une algèbre et $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur A.
3. Une *algèbre unifère normée* est une algèbre normée unifère $\big(A, \|\cdot\|\big)$ satisfaisant $\|\mathbf{1}_A\| = 1$, où $\mathbf{1}_A$ désigne l'unité de l'algèbre unifère A.
4. Une *algèbre de Banach* (unifère) est une algèbre (unifère) normée, où $\|\cdot\|$ – vue comme une norme d'espace vectoriel – est complète sur A.

Théorème D.1. *Soit A une algèbre unifère munie d'une norme d'espace vectoriel $\|\cdot\| : A \to [0, \infty)$ qui est C-faiblement sous-multiplicative pour une certaine constante $C > 1$. Alors A est isomorphe à une algèbre normée qui est complète si l'algèbre $\big(A, \|\cdot\|\big)$ l'est.*

Démonstration. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_m : & A & \to & [0, \infty). \\ & a & \mapsto & \sup\limits_{\substack{b \in A \\ b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|ab\|}{\|b\|} \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que, comme le suggère la notation, la fonction $\|\cdot\|_m$ est une norme d'espace vectoriel sur A.

Nous affirmons que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_m$ sont équivalentes. En effet, on a d'une part

$$\|a\|_m \;=\; \sup_{\substack{b \in A \\ b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|ab\|}{\|b\|} \;\leq\; \sup_{\substack{b \in A \\ b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{C\|a\|\|b\|}{\|b\|} \;=\; C\|a\| \tag{D.1}$$

et d'autre part

$$\|a\|_m \;=\; \sup_{\substack{b \in A \\ b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|ab\|}{\|b\|} \;\geq\; \frac{\|a\mathbf{1}_A\|}{\|\mathbf{1}_A\|} \;=\; \|a\|.$$

Nous allons maintenant montrer que $\big(A, \|\cdot\|_m\big)$ est une algèbre unifère normée.

- Sous-multiplicativité. Pour des raisons évidentes, si $\|a_1a_2\|_m = 0$ alors on a

$$\|a_1a_2\|_m \;\leq\; \|a_1\|_m\|a_2\|_m.$$

On peut donc se restreindre à étudier le cas où $\|a_1a_2\|_m > 0$. On a

$$\begin{aligned} \|a_1a_2\|_m \;&=\; \sup_{\substack{b \in A \\ b, a_2b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|a_1a_2b\|}{\|b\|} \\ &=\; \sup_{\substack{b \in A \\ b, a_2b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\big\|a_1(a_2b)\big\|}{\|a_2b\|} \cdot \frac{\|a_2b\|}{\|b\|} \\ &\leq\; \left(\sup_{\substack{a_2b \in A \\ a_2b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\big\|a_1(a_2b)\big\|}{\|a_2b\|} \right) \cdot \left(\sup_{\substack{b \in A \\ b \neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|a_2b\|}{\|b\|} \right) \\ &=\; \|a_1\|_m\|a_2\|_m. \end{aligned}$$

- UNITARITÉ. On a
$$\|\mathbf{1}_A\|_m \;=\; \sup_{\substack{b\in A\\ b\neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|\mathbf{1}_A b\|}{\|b\|} \;=\; \sup_{\substack{b\in A\\ b\neq \mathbf{0}_A}} \frac{\|b\|}{\|b\|} \;=\; 1.$$

- COMPLÉTUDE. Si l'algèbre A est complète par rapport à la norme $\|\cdot\|$ alors, étant donné une suite de Cauchy $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans A, il existe $a \in A$ tel que $\big\|a_n - a\big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par conséquent, l'équation (D.1) implique que
$$\big\|a_n - a\big\|_m \;\leq\; C\big\|a_n - a\big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Il s'ensuit donc que l'algèbre A est également complète par rapport à la norme $\|\cdot\|_m$.

$\square$

Annexe E

Caractères et transformation de Gel'fand

E.1 Espace des caractères

Définition E.1. Soit A une algèbre complexe commutative et unifère.

(i) Un *caractère* sur A est une fonctionnelle linéaire $\chi : A \to \mathbb{C}$ jouissant des propriétés suivantes :

   (a) Multiplicativité. $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$, $\qquad (a, b \in A)$;

   (b) Préservation de l'élément neutre multiplicatif. $\chi(\mathbf{1}_A) = 1$.

(ii) L'*espace des caractères* de A, noté $\Delta(A)$, est l'ensemble de tous les caractères sur A.

Proposition E.1. *Soit A une algèbre complexe commutative et unifère. Tout $\chi \in \Delta(A)$ est continu et de norme 1.*

Démonstration. Voir le lemme 2.1.5 de [23]. □

Théorème E.2. *Tout anneau commutatif et unifère non trivial possède au moins un idéal maximal.*

Démonstration. Il s'agit du célèbre théorème de Krull. Voir [25]. □

Théorème E.3. *Étant donné une algèbre de Banach complexe commutative et unifère, l'application*

$$\chi \mapsto \ker \chi = \{a \in A : \ \chi(a) = 0\}$$

établie une bijection entre $\Delta(A)$, l'espace des caractères de A, et Max(A), l'ensemble de tous les idéaux maximaux de A.

Démonstration. Voir le théorème 2.1.8 de [23]. □

Théorème E.4. *Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unifère. Alors $\Delta(A)$ est non vide.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de Krull E.2 et du théorème E.3. □

E.2 Transformation de Gel'fand

Les caractères sur l'algèbre de Banach complexe commutative et unifère A étant des fonctionnelles linéaires de norme 1 ils appartiennent à la boule unité du dual de A. Or, par le théorème de Banach–Alaoglu, cette boule unité est faiblement-$*$ compacte, c'est-à-dire compacte dans la topologie la plus grossière pour laquelle toutes les fonctionnelles linéaires d'évaluation ponctuelle sont continues. Par voie de conséquence, les fonctionnelles d'évaluation ponctuelle sont également continues dans la topologie induite sur $\Delta(A)$ par restriction de celle sur la boule unité de A^* et cela implique que l'espace $\Delta(A)$ est faiblement-* compact.

Définition E.2. Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unifère.

(i) La *transformation de Gel'fand* est l'application $\Gamma : A \to \mathcal{C}\big(\Delta(A)\big)$ définie par $\Gamma(a) := \mathrm{ev}_a \restriction \Delta(A)$.

(ii) On appelle *transformée de Gel'fand* de A l'image de A par la transformation de Gel'fand et on note celle-ci $\widehat{A}$.

Le résultat classique suivant porte le nom de théorème de représentation de Gel'fand :

Théorème E.5. *Soit A une algèbre de Banach complexe commutative et unifère.*

(i) La transformation de Gel'fand est un homomorphisme d'algèbre qui est continu et contractif, au sens où

$$\|\Gamma(a)\|_\infty \ \leq \ \|a\|_A, \qquad (a \in A).$$

(ii) Le noyau de la transformée de Gel'fand correspond au radical de Jacobson[1] de A. Ainsi, il s'agit d'un isomorphisme d'algèbre si et seulement si A est semi-simple[2].

Démonstration. Voir le théorème 11.9 de [45]. □

1. Le *radical de Jacobson* d'une algèbre commutative est l'intersection de ses idéaux maximaux.
2. Une algèbre commutative est dite *semi-simple* si son radical de Jacobson est réduit à $\{0\}$.

Annexe F

Groupe dual et transformation de Fourier–Gel'fand

Étant donné G un groupe abélien, l'ensemble $\widehat{G}$ de tous les homomorphismes continus $\alpha : G \to \mathbb{T}$ forme un groupe – appelé le *groupe dual* de G – par rapport à loi interne définie par

$$(\alpha_1\alpha_2)(x) := \alpha_1(x)\alpha_2(x), \qquad \big(x \in G,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{G}\big)$$

et à l'opération suivante :

$$\alpha^{-1}(x) := \overline{\alpha(x)}, \qquad (x \in G).$$

Le résultat qui suit nous dit que le groupe dual $\widehat{G}$ est canoniquement identifiable à $\Delta\big(\mathscr{L}_1(G)\big)$, l'ensemble des caractères sur l'algèbre de convolution $\mathscr{L}_1(G)$.

Théorème F.1. *Soit G un groupe abélien et soit $\alpha \in \widehat{G}$. L'application $\chi_\alpha : \mathscr{L}_1(G) \to \mathbb{C}$ définie comme suit :*

$$\chi_\alpha(f) := \int_G f(x)\overline{\alpha(x)}\, d\mu(x), \qquad \big(f \in \mathscr{L}_1(G)\big).$$

appartient à $\Delta\big(\mathscr{L}_1(G)\big)$. De plus, l'application $\widehat{G} \to \Delta\big(\mathscr{L}_1(G)\big)$ associant α à χ_α est une bijection.

Démonstration. Voir le théorème 2.7.2 de [23]. □

Remarque. Si $G := \mathbb{T}$, on peut vérifier que le groupe dual $\widehat{\mathbb{T}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En effet, les éléments de $\widehat{\mathbb{T}}$ sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccc} \alpha_n : & \mathbb{T} & \to & \mathbb{T}, \\ & t & \mapsto & e^{int} \end{array}$$

où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, l'application qui associe $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{T})$ à la fonction $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{T}} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(\alpha_n) := \chi_{\alpha_n}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{\alpha_n(t)}\, \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\, \frac{dt}{2\pi},$$

coïncide avec la transformation de Fourier classique associant à $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{T})$ la fonction $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(n) := \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi}.$$

De la même façon, l'application associant $f \in \mathscr{L}_1(G)$ à la fonction $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ définie par $\widehat{f}(\alpha) := \chi_\alpha(f)$ étend la transformation de Fourier aux groupes abéliens quelconques.

Dans le cas où G est un groupe abélien discret, on peut également voir l'application associant $f \in \ell_1(G)$ à la fonction $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ définie par $\widehat{f}(\alpha) := \chi_\alpha(f)$ comme associant plutôt $f \in \ell_1(G)$ à $\mathrm{ev}_f(\chi_{\alpha_n}) \in \mathcal{C}\big(\Delta(\ell_1(G))\big)$, car

$$\mathrm{ev}_f(\chi_\alpha) \;=\; \chi_\alpha(f) \;=\; \widehat{f}(\alpha).$$

Ainsi, en plus de généraliser la transformation de Fourier, l'application $f \mapsto \widehat{f}$ coïncide avec la transformation de Gel'fand vue à la définition E.2. C'est pourquoi nous y accolerons le nom de *transformation de Fourier–Gel'fand.*

Théorème F.2. *Soit G un groupe abélien discret.*

(i) La transformée de Fourier–Gel'fand est injective.

(ii) La transformée de Fourier–Gel'fand est surjective si et seulement G est un groupe fini.

Démonstration. Voir les théorèmes 2.7.7 et 2.7.12 de [23]. □

Annexe G

Classes de Schatten

Dans ce qui suit, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert de dimension infinie.

Théorème G.1. *Soit* $\{e_\iota : \ \iota \in \mathcal{I}\}$ *un système orthonormé de* $\mathcal{H}$.

1. Inégalité de Bessel. *Pour tout* $x \in \mathcal{H}$ *on a* $\sum_{\iota \in \mathcal{I}} \big|\langle x, e_\iota\rangle\big|^2 \leq \|x\|^2$.
2. *Quel que soit* $x \in \mathcal{H}$*, l'ensemble des* $\iota \in \mathcal{I}$ *pour lesquels* $\langle x, e_\iota\rangle \neq 0$ *est au plus dénombrable.*

Démonstration. Pour l'inégalité de Bessel, voir le théorème 4.8 [6]. Quant au second point, il découle du corollaire A.2. □

Le résultat qui suit est le célèbre *théorème de représentation de Fréchet–Riesz* caractérisant le dual de $\mathcal{H}$:

Théorème G.2. *Pour toute fonctionnelle linéaire* $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$*, il existe un unique élément* $h \in \mathcal{H}$ *avec* $\|\varphi\| = \|h\|_{\mathcal{H}}$ *et tel que*

$$\varphi(x) \ = \ \langle x, h\rangle, \qquad\qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Démonstration. Voir le théorème 3.4 du premier chapitre de [6]. □

Théorème G.3. *Soit* $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$*. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\big\langle T(x), x\big\rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{H}$ *;*

(ii) T *est auto-adjoint et* $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.

Démonstration. Voir le théorème 12.32 de [45]. □

Corollaire G.4. *Quel que soit l'opérateur* $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$*, le spectre de l'opérateur auto-adjoint* T^*T *est entièrement composé de nombres réels positifs ou nuls.*

Démonstration. Cela découle du théorème qui précède et du fait que :

$$\big\langle T^*T(x), x\big\rangle \ = \ \big\langle T(x), T(x)\big\rangle \ = \ \big\|T(x)\big\|^2, \qquad\qquad (x \in \mathcal{H}). \quad □$$

Opérateurs compacts

Définition G.1. Un opérateur $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est qualifié de *compact* s'il envoie la boule unité de $\mathcal{H}$ sur un ensemble relativement compact [1] de $\mathcal{H}$.

On note par $\mathscr{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$.

Proposition G.5. *Si $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ alors T^*, TT^* et T^*T appartiennent tous trois à $\mathscr{K}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Voir le théorème 1.3.5 de [55]. □

Théorème G.6. *Si $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ alors $\sigma(T)$ est compact, au plus dénombrable et admet 0 parmi ses points limites.*

Démonstration. Voir le théorème 4.25 de [45]. □

Le théorème suivant est une généralisation de la décomposition de Schur pour les matrices carrées.

Théorème G.7.

(i) Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un système orthonormé de $\mathcal{H}$ et $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels convergeant vers zéro. Soit encore T l'opérateur sur $\mathcal{H}$ défini par

$$T(x) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Alors $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$.

(ii) Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur $\mathcal{H}$. Alors il existe une suite de nombres réels $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers zéro et il existe un système orthonormé $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que

$$T(x) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Démonstration. Voir les théorèmes 1.3.10 et 1.3.11 de [55]. □

Corollaire G.8. *L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint compact sur $\mathcal{H}$ est toujours non vide.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\lambda_n \neq 0$ dans la décomposition de T dont l'existence est assurée par la partie (ii) du théorème G.7, on a que

$$(\lambda_n I - T)(e_n) \;=\; \lambda_n e_n - \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n \langle x, e_n\rangle e_n \;=\; \lambda_n e_n - \lambda_n e_n \;=\; 0. \qquad \square$$

1. Un sous-ensemble d'un espace topologique est dit *relativement compact* si sa fermeture est compacte.

Valeurs singulières

Étant donné un opérateur compact T, on déduit du corollaire G.4, de la proposition G.5 et du théorème G.6 que le spectre de T^*T est une suite au plus dénombrable de nombres réels positifs.

Définition G.2. Soit $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$. On appelle *valeurs singulières*[2] de T les racines carrées des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint compact T^*T, ordonnées de sorte que

$$\sigma_0(T) \;\geq\; \sigma_1(T) \;\geq\; \sigma_2(T) \;\geq\; \dots$$

Les valeurs singulières d'un opérateur compact interviennent dans le théorème de représentation des opérateurs compacts – qu'on appelle le *théorème de décomposition de Schmidt* – qui s'apparente à la décomposition décrite à la partie (ii) du théorème G.7, mais qui s'applique plus généralement à tous les opérateurs compacts plutôt qu'aux seuls opérateurs compacts auto-adjoints.

Théorème G.9. *Soit $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$. Alors il existe des systèmes orthonormés $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ tels que*

$$T(x) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n(T)\langle x, e_n\rangle f_n, \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Démonstration. Voir la discussion à la page 15 de [55]. □

Opérateurs de rang fini

Définition G.3.

1. Un opérateur $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ est dit *de rang fini* si son image est de dimension finie.
2. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note par $\mathscr{F}(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les opérateurs de rang fini sur $\mathcal{H}$.
3. Étant donné un entier $n \geq 0$, on note par $\mathscr{F}_n(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathscr{F}(\mathcal{H})$ dont l'image est de dimension au plus n.

Théorème G.10. *Un opérateur $T \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est compact si et seulement s'il existe une suite $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'opérateurs de rang fini tels que*

$$\left\|T_n - T\right\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. Voir le théorème 1.3.13 de [55]. □

2. La notion de valeurs singulières d'un opérateur compact a été introduite par Erhard Schmidt sous une autre dénomination en 1907. C'est Frank Smithies, un mathématicien britannique dont nous avons fait mention dans nos remerciements, qui a forgé le terme « valeurs singulières » et l'a fait entrer dans l'usage dans [48].

Le résultat suivant, qui est dû à Allahverdiev, est parfois appelé la *formule de distance* :

Théorème G.11. *Étant donné $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ et un entier $n \geq 1$, on a*

$$\sigma_n(T) \;=\; \inf\left\{ \big\|T - F\big\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} :\; F \in \mathscr{F}_n(\mathcal{H}) \right\}.$$

Démonstration. Voir le théorème 1.4.11 de [55]. □

Corollaire G.12. *Pour tout $T \in \mathscr{K}(\mathcal{H})$ on a $\|T\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} = \sigma_0(T)$.*

Démonstration. En vertu du théorème G.11, on a

$$\sigma_0(T) \;=\; \inf\left\{ \big\|T - F\big\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} :\; F \in \mathscr{F}_0(\mathcal{H}) \right\}.$$

Or, dire que F est un opérateur de rang 0 signifie que $F \equiv 0$ et il s'ensuit que

$$\big\|T - F\big\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \;=\; \|T\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})}.$$ □

Les classes de Schatten

Définition G.4. Étant donné $p \in [1, \infty)$ on définit la *p-ième classe de Schatten* comme étant

$$\mathscr{S}_p(\mathcal{H}) := \left\{ T \in \mathscr{K}(\mathcal{H}) :\quad \big\{\sigma_n(T)\big\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p\big(\mathbb{N}\big) \right\}$$

et on pose

$$\|T\|_{\mathscr{S}_p(\mathcal{H})} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^p(T) \right)^{1/p}.$$

Proposition G.13. *Pour tout $p \in [1, \infty)$ et tout $T \in \mathscr{S}_p(\mathcal{H})$ on a*

$$\|T\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \;\leq\; \|T\|_{\mathscr{S}_p(\mathcal{H})}.$$

Démonstration. Cela découle directement du corollaire G.12 et de la définition de la classe $\mathscr{S}_p(\mathcal{H})$:

$$\|T\|_{\mathscr{B}(\mathcal{H})} \;\overset{\text{G.12}}{=}\; \sigma_0(T) \;\leq\; \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^p(T) \right)^{1/p} \;=\; \|T\|_{\mathscr{S}_p(\mathcal{H})}.$$ □

Proposition G.14. *Pour tous les indices r et s satisfaisant $1 \leq r < s \leq \infty$ on a $\mathscr{S}_r(\mathcal{H}) \subseteq \mathscr{S}_s(\mathcal{H})$ et*

$$\|T\|_{\mathscr{S}_r(\mathcal{H})} \;\geq\; \|T\|_{\mathscr{S}_s(\mathcal{H})}.$$

Démonstration. Cela découle directement de la proposition C.3. □

Proposition G.15. *Pour tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension finie et tous les indices r et s satisfaisant $1 \leq r < s \leq \infty$, on a $\mathscr{S}_r(\mathcal{H}) \supseteq \mathscr{S}_s(\mathcal{H})$ et*

$$\|T\|_{\mathscr{S}_r(\mathcal{H})} \;\leq\; dim(\mathcal{H})^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|T\|_{\mathscr{S}_s(\mathcal{H})}.$$

Démonstration. Cela découle directement de la proposition C.5. □

Définition G.5. On appelle *opérateurs de Hilbert–Schmidt* les éléments de la classe $\mathscr{S}_2(\mathcal{H})$.

Théorème G.16. *Soit T un opérateur de Hilbert–Schmidt sur $\mathcal{H}$ dont les valeurs singulières sont $\big\{\sigma_n(T)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout système orthonormé $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$, on a*

$$\|T\|_{\mathscr{S}_2(\mathcal{H})} \;=\; \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \big|\sigma_n(T)\big|^2\right)^{1/2} \;=\; \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \big\|T(e_n)\big\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \;=\; \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big|\big\langle T^*T(e_n), e_n\big\rangle\Big|\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Voir le théorème 1.4.2 de [55]. □

Remarque. On peut en quelque sorte se représenter mentalement chacun des espaces d'opérateurs dont il a été question comme des analogues non commutatifs des espaces $\ell_p(\mathbb{N})$. En effet, la chaîne d'inclusion suivante, pour $1 \leq r \leq 2 \leq s < \infty$,

$$c_{00}(\mathbb{N}) \;\subseteq\; \ell_1(\mathbb{N}) \;\subseteq\; \ell_r(\mathbb{N}) \;\subseteq\; \ell_2(\mathbb{N}) \;\subseteq\; \ell_s(\mathbb{N}) \;\subseteq\; c_0(\mathbb{N}) \;\subseteq\; \ell_\infty(\mathbb{N})$$

trouve un équivalent dans la chaîne d'inclusion que voici :

$$\mathscr{F}(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathscr{S}_1(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathscr{S}_r(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathscr{S}_2(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathscr{S}_s(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathscr{K}(\mathcal{H}) \;\subseteq\; \mathscr{B}(\mathcal{H}).$$

Bibliographie

[1] Fatemeh Abtahi, Heidar Ghaeid Amini, Hasan A. Lotfi, and Ali Rejali, *Some intersections of the weighted L^p-spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2013), Art. ID 986857, 12. MR 3121403.

[2] Fatemeh Abtahi, Rasoul Nasr-Isfahani, and Ali Rejali, *On the weighted l^p-space of a discrete group*, Publ. Math. Debrecen **75** (2009), no. 3-4, 365–374. MR 2588211.

[3] ———, *Weighted L^p-conjecture for locally compact groups*, Period. Math. Hungar. **60** (2010), no. 1, 1–11. MR 2629649.

[4] Nachman Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404. MR 0051437.

[5] Ariel Blanco, Sten Kaijser, and Thomas J. Ransford, *Real interpolation of Banach algebras and factorization of weakly compact homomorphisms*, J. Funct. Anal. **217** (2004), no. 1, 126–141. MR 2097609.

[6] John B. Conway, *A course in functional analysis*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990. MR 1070713.

[7] Gilbert Crombez, *An elementary proof about the order of the elements in a discrete group*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), no. 1, 59–60. MR 647897.

[8] Gilbert Crombez and Willy J. F. Govaerts, *A characterization of certain weak*-closed subalgebras of $L_\infty(G)$*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), no. 2, 430–434. MR 559380.

[9] Anton Deitmar and Siegfried Echterhoff, *Principles of harmonic analysis*, Universitext, Springer, New York, 2009. MR 2457798.

[10] David S. Dummit and Richard M. Foote, *Abstract algebra*, third ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004. MR 2286236.

[11] Robert E. Edwards, *The stability of weighted Lebesgue spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 369–394. MR 0112050.

[12] Omar El-Fallah and Thomas J. Ransford, *Peripheral point spectrum and growth of powers of operators*, J. Operator Theory **52** (2004), no. 1, 89–101. MR 2091461.

[13] Mary R. Embry, *Strictly cyclic operator algebras on a Banach space*, Pacific J. Math. **45** (1973), 443–452. MR 0318922.

[14] Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, second ed., Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016. MR 3444405.

[15] Gerd H. Fricke, *A note on strictly cyclic shifts on l_p*, Internat. J. Math. Math. Sci. **1** (1978), no. 2, 203–208. MR 0487569.

[16] Roland J. Gaudet and John L. B. Gamlen, *An elementary proof of part of a classical conjecture*, Bull. Austral. Math. Soc. **3** (1970), 289–292. MR 0268599.

[17] Israel Gel'fand, Dmitry A. Raikov, and Georgi E. Shilov, *Commutative normed rings*, Translated from the Russian, with a supplementary chapter, Chelsea Publishing Co., New York, 1964. MR 0205105.

[18] Loukas Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004. MR 2449250.

[19] Karlheinz Gröchenig, *Weight functions in time-frequency analysis*, Pseudo-differential operators : partial differential equations and time-frequency analysis, Fields Inst. Commun., vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 343–366. MR 2385335.

[20] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. II : Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970. MR 0262773.

[21] ———, *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 115, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, Structure of topological groups, integration theory, group representations. MR 551496.

[22] David L. Johnson, *A new proof of the L^p-conjecture for locally compact abelian groups*, Colloq. Math. **47** (1982), no. 1, 101–102. MR 679390.

[23] Eberhard Kaniuth, *A course in commutative Banach algebras*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 246, Springer, New York, 2009. MR 2458901.

[24] Edward Kerlin and Alan Lambert, *Strictly cyclic shifts on l_p*, Acta Sci. Math. (Szeged) **35** (1973), 87–94. MR 0328658.

[25] Wolfgang Krull, *Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung*, Math. Ann. **101** (1929), no. 1, 729–744. MR 1512564.

[26] Yulia N. Kuznetsova, *Weighted L_p-algebras on groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **40** (2006), no. 3, 82–85. MR 2265690.

[27] ———, *The invariant weighted algebras $L_p^w(G)$*, Mat. Zametki **84** (2008), no. 4, 567–576. MR 2485196.

[28] ———, *Example of a weighted algebra $L_p^w(G)$ on an uncountable discrete group*, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), no. 2, 660–665. MR 2508967.

[29] Paul Milnes, *Convolution of L^p functions on non-unimodular groups*, Canad. Math. Bull. **14** (1971), 265–266. MR 0310544.

[30] Benjamin Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR 0293384.

[31] Nikolai K. Nikol'skiĭ, *Selected problems of weighted approximation and spectral analysis*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976, Translated from the Russian by F. A. Cezus. MR 0467270.

[32] Vern I. Paulsen and Mrinal Raghupathi, *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 152, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. MR 3526117.

[33] Tadeusz Pytlik, *On the spectral radius of elements in group algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **21** (1973), 899–902. MR 0328476.

[34] ———, *Symbolic calculus on weighted group algebras*, Studia Math. **73** (1982), no. 2, 169–176. MR 667971.

[35] Tong S. Quek and Leonard Y. H. Yap, *Sharpness of Young's inequality for convolution*, Math. Scand. **53** (1983), no. 2, 221–237. MR 745076.

[36] Minakshisundaram Rajagopalan, *L^p-spaces and convolution in locally compact groups*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1963, Thesis (Ph.D.)–Yale University. MR 2939462.

[37] ———, *On the L^p-space of a locally compact group*, Colloq. Math. **10** (1963), 49–52. MR 0148792.

[38] ———, *L^p-conjecture for locally compact groups. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **125** (1966), 216–222. MR 0201991.

[39] ———, *L^p-conjecture for locally compact groups. II*, Math. Ann. **169** (1967), 331–339. MR 0208403.

[40] Minakshisundaram Rajagopalan and Wiesław Żelazko, *L^p-conjecture for solvable locally compact groups*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **29** (1965), 87–92. MR 0185036.

[41] Neil W. Rickert, *Convolution of L^2-functions*, Colloq. Math. **19** (1968), 301–303. MR 0228930.

[42] Kenneth A. Ross, *A trip from classical to abstract Fourier analysis*, Notices Amer. Math. Soc. **61** (2014), no. 9, 1032–1038. MR 3241559.

[43] Walter Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12, Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962. MR 0152834.

[44] ———, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157.

[45] ———, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR 1157815.

[46] Sadahiro Saeki, *The L^p-conjecture and Young's inequality*, Illinois J. Math. **34** (1990), no. 3, 614–627. MR 1053566.

[47] Issai Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math. **140** (1911), 1–28. MR 1580823.

[48] Frank Smithies, *The Eigen-Values and Singular Values of Integral Equations*, Proc. London Math. Soc. (2) **43** (1937), no. 4, 255–279. MR 1575214.

[49] Kazimierz Urbanik, *A proof of a theorem of Żelazko on L^p-algebras*, Colloq. Math. **8** (1961), 121–123. MR 0130318.

[50] Alfonso Villani, *Another note on the inclusion $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), no. 7, 485–487. MR 801221.

[51] John Wermer, *On a class of normed rings*, Ark. Mat. **2** (1954), 537–551. MR 0062363.

[52] William H. Young, *On the multiplication of successions of fourier constants*, vol. 87, 1912.

[53] Wiesław Żelazko, *On the algebras L_p of locally compact groups*, Colloq. Math. **8** (1961), 115–120. MR 0130317.

[54] ———, *On the Burnside problem for locally compact groups*, (1975), 409–416. MR 0396841.

[55] Kehe Zhu, *Operator theory in function spaces*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 138, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. MR 2311536.